DNS

Sujet

Spire dans un champ B

I. Spire en rotation dans un champ magnétique uniforme et constant

Une spire conductrice circulaire (S), de résistance négligeable, de rayon a, de surface $S=\pi a^2$ et de centre O, tourne à vitesse angulaire ω supposée constante $(\omega>0)$ autour d'un de ses diamètres servant d'axe Oz au problème.

Les axes Ox, Oy et Oz sont munis de la base orthonormée $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$. La position de (S) est repérée par l'angle $\theta=\omega t$ entre le plan xOz des coordonnées cartésiennes et le plan de la spire. L'orientation du sens positif du courant dans la spire est imposée (voir *figure* 1 et *figure* 2).

Cette spire est placée dans un champ magnétique uniforme et constant, parallèle à l'axe Oy et noté $\vec{B}=B\vec{u}_y$ (B constante positive).

La spire forme un circuit électrique fermé avec un dipôle X (X sera suivant les questions une résistance ou un condensateur), la spire et X étant en série (on ne se préoccupera pas des problèmes techniques engendrés par la connexion électrique entre la spire en rotation et X). Le coefficient d'auto-induction de la spire (S) sera négligé.

On indique que le moment du couple électromagnétique $\vec{\Gamma}$ (dû aux forces de Laplace) qui s'exerce sur un circuit électrique parcouru par un courant i, dont le vecteur surface est $\vec{S}$ (orienté en fonction de i), et placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, est donné par la formule $\vec{\Gamma}=\vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B}$ où $\vec{\mathcal{M}}$ désigne le moment magnétique du cadre avec $\vec{\mathcal{M}}=i\vec{S}$.

On rappelle que lors de la rotation d'un solide, la puissance P d'un couple de moment $\vec{\Gamma}$ est donnée par la formule $P=\vec{\Gamma}\vec{\omega}$ où $\vec{\omega}$ représente le vecteur rotation instantanée du circuit.

Les grandeurs moyennes demandées seront rapportées à la période.

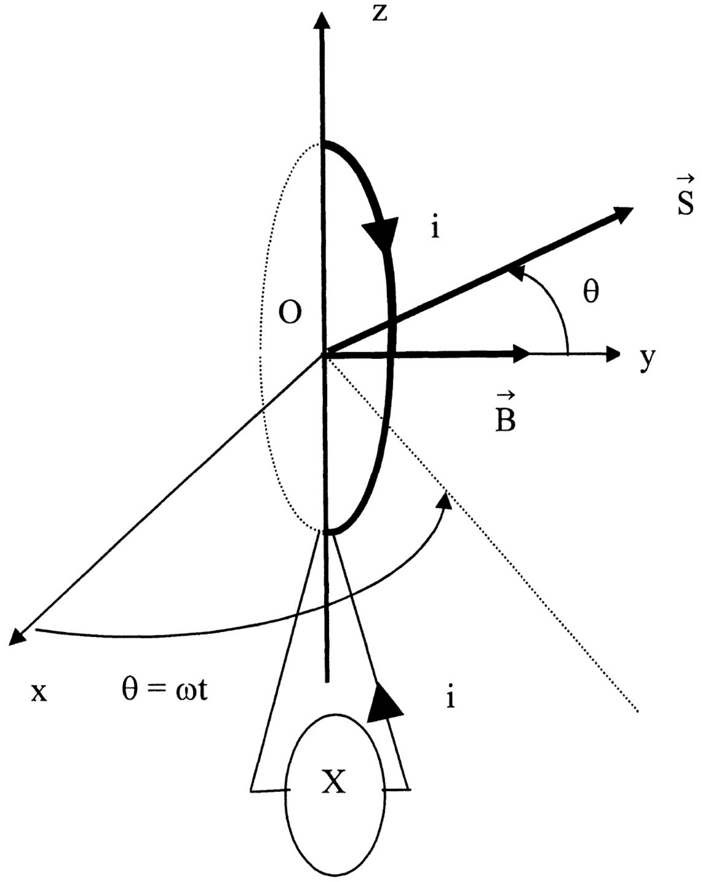


Figure 1 : vue en perspective.

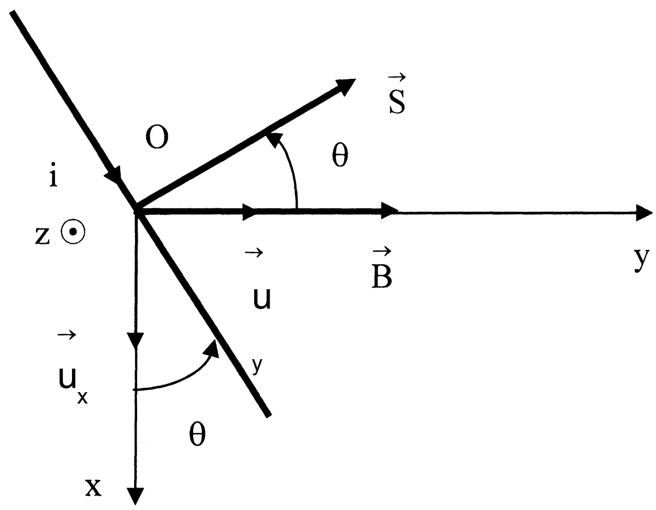


Figure 2 : vue de dessus.

1. Expliquer par quel phénomène physique un courant électrique va circuler dans le circuit formé par la spire et le dipôle X .

A. Dipôle résistif

Le dipôle X est un conducteur ohmique de résistance R .

2. Déterminer le courant électrique i qui va traverser R en fonction de B , ω , S , R et t .
3. Déterminer la valeur moyenne $<P_J>$ de la puissance Joule qui en résulte en fonction de B , S , R et ω .
4. Montrer qu'un moteur extérieur devra exercer un couple moteur sur la spire pour maintenir la vitesse de rotation constante (on négligera tout frottement). Quelle sera la puissance moyenne $<P_M>$ de ce couple moteur ?
5. Analyser les transferts d'énergie du dispositif.

B. Dipôle capacitif

X est maintenant un condensateur de capacité C , la résistance de la spire étant toujours négligée. On suppose qu'à $t=0$, le condensateur est déchargé.

6. Déterminer le courant dans le circuit en fonction de B , S , ω , C et t .
7. Déterminer la puissance moyenne $<P_M>$ qu'un moteur extérieur doit exercer sur la spire pour maintenir sa vitesse de rotation constante ?
8. Déterminer la puissance électrique instantanée $P_e(t)$ mise en jeu dans le condensateur en fonction de B , S , ω , C et t . Calculer la valeur moyenne $<P_e>$ de cette puissance.
9. Écrire les bilans de puissance du dispositif (moteur, spire, condensateur) et l'équation différentielle en θ dans le cas général d'une vitesse de rotation quelconque. On désignera par J le moment d'inertie de la spire en rotation par rapport à l'axe de rotation. Étudier les deux cas particuliers suivants:
   - Spire tournant à vitesse constante. Retrouver les résultats précédents.
   - Spire lancée depuis la position $\theta=0$ avec une vitesse ω_0 sans la présence d'un moteur extérieur. Déterminer $\omega=f(\theta)$. Écrire le bilan de puissance électromécanique. Déterminer les intervalles sur lesquels le condensateur est récepteur (préciser alors d'où provient l'énergie) ou générateur (préciser alors où va l'énergie libérée).

II. Spire fixe dans un champ magnétique variable.

La spire étudiée précédemment est maintenant fixe. Son centre est placé à l'intérieur et sur l'axe d'un solénoïde de coefficient d'auto-induction L_S et de résistance R_S , l'axe de la spire étant confondu avec l'axe du solénoïde (ce qui suppose que le rayon de la spire est plus petit que celui du solénoïde).

Le solénoïde est directement alimenté par un générateur de courant qui impose à partir de l'instant $t=0$ un courant électromoteur $\eta=\alpha t$ (α étant une constante positive).

La spire est connectée à une résistance R (non représentée sur la figure). Il n'y a pas de connexion électrique entre la spire et le solénoïde, les deux circuits étant seulement en mutuelle induction : voir *figure* 3 ci-dessous, où les orientations sont imposées.

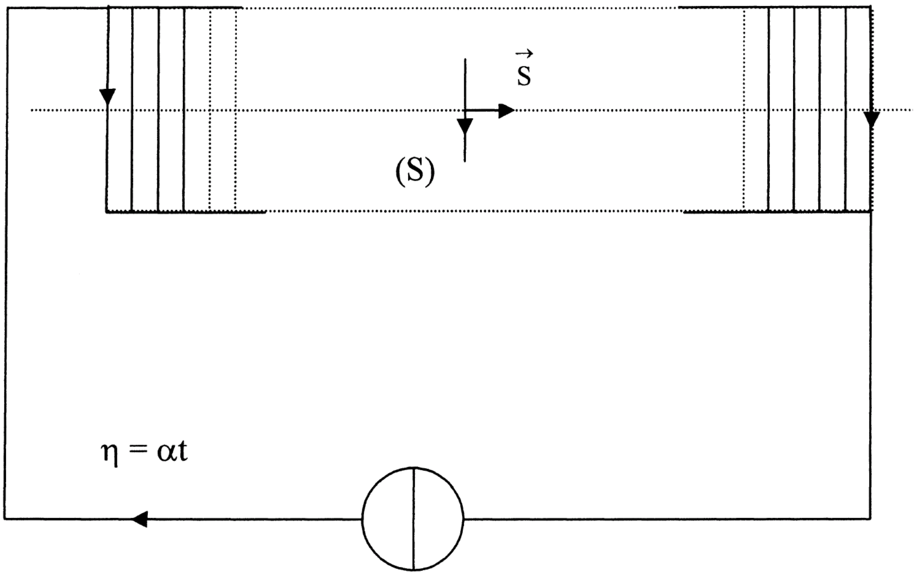


Figure 3

On rappelle que la densité volumique d'énergie magnétique (énergie magnétique par unité de volume) est donnée par la formule $w_m = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$.

10. Montrer que le flux magnétique Φ envoyé par le solénoïde sur la spire peut se mettre sous la forme ($\Phi = M\eta$), où M est une constante qu'on ne demande pas de calculer. Justifier clairement le signe de M en fonction des orientations choisies pour la spire et le solénoïde. Justifier que M est le coefficient de mutuelle induction solénoïde-spire.

11. Déterminer le courant i qui va apparaître dans la spire ainsi que la puissance Joule P_J correspondante. On exprimera ces deux grandeurs en fonction de M , α et R .

12. Ce courant dans la spire est-il continu ou variable ? L'apparition de ce courant dans la spire provoque-t-il une force électromotrice de mutuelle induction dans le solénoïde ?

13. Déterminer la puissance instantanée P_G fournie par le générateur de courant en fonction de R_S , L_S , α et t .

14. Le résultat précédent est-il modifié si la spire n'est pas présente ? Justifier clairement la réponse.

On se propose dans cette question de faire un bilan énergétique du problème précédent. En vertu du principe de conservation de l'énergie, toute la puissance fournie par le générateur de courant doit se retrouver dans le bilan énergétique du reste du circuit.

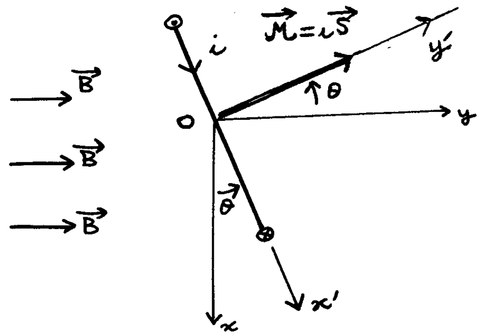
15. L'ensemble solénoïde-spire est un transformateur dans lequel l'inductance de la spire (circuit secondaire) est négligée.

- Donner les expressions des flux d'induction magnétique des circuits primaire et secondaire.
- Donner le schéma électrocinétique équivalent à l'ensemble solénoïde-spire et écrire les équations électrocinétiques des circuits primaire et secondaire.
- Effectuer le bilan de puissance électromagnétique.
- Analyser qualitativement sous quelles formes se manifeste l'énergie dans l'ensemble du dispositif.

On a vu que la puissance fournie par le générateur ne dépend pas de la présence ou non de la spire.

16. Comment expliquer alors le paradoxe suivant : le générateur fournit la même quantité d'énergie qu'il y ait ou non l'effet Joule dans R ? Cette énergie est-elle « gratuite » ce qui contredirait le principe de conservation ? Aucun calcul n'est demandé, seulement un raisonnement qualitatif.

Réponses



1) On est dans le cas d'un conducteur en mouvement dans un champ $\vec{B}$ extérieur permanent. Il y donc (phénomène d'<u>induction de Lorentz</u>) création d'un <u>force électromotrice induite</u>. Le circuit étant fermé sur un dipôle X, ce dipôle sera donc parcouru par un <u>courant induit</u>

---

2) On calcule d'abord la f.e.m. induite par la loi de Faraday

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

avec $\phi = \phi_{ext} + \phi_{propre}$

$$= \underbrace{B\pi a^2}_{S}\cos\theta + Li$$

on néglige L
L=0

$$\boxed{e = B S \omega \sin(\omega t)}$$

$$i = \frac{e}{R}$$

$$\boxed{i = \frac{B S \omega}{R} \sin(\omega t)}$$

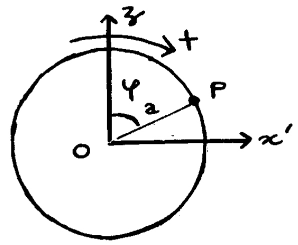
remarque :

Dans le cas de Lorentz
(cas de courant surfacique
cas de certaines rotations type roue de Barlow)
le calcul par le champ électromoteur est plus adapté

on fait alors :

$$e = \oint \vec{E}_m \, \vec{dl}$$
$$= \oint (\vec{V} \wedge \vec{B}) \, \vec{dl}$$

Ici, le calcul n'est pas simple.
Par exemple, dans la base $(\vec{u_{x'}}, \vec{u_{y'}}, \vec{u_z})$



en repérant un point P par l'angle φ

$$\vec{OP} = a \sin\varphi \, \vec{u_{x'}} + a \cos\varphi \, \vec{u_z}$$
$$\vec{dl} = d\vec{OP}$$
$$= a \cos\varphi \, d\varphi \, \vec{u_{x'}} - a \sin\varphi \, d\varphi \, \vec{u_z}$$
$$\vec{B} = B \, \vec{u_y}$$
$$= B \, (\sin\theta \, \vec{u_{x'}} + \cos\theta \, \vec{u_{y'}})$$
$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$$
$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a\sin\varphi \\ 0 \\ a\cos\varphi \end{vmatrix}$$
$$= a\omega \sin\varphi \, \vec{u_{y'}}$$
$$e = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} (\vec{V} \wedge \vec{B}) \, \vec{dl}$$
$$\begin{vmatrix} 0 \\ a\omega\sin\varphi \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B\sin\theta \\ B\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a\cos\varphi \, d\varphi \\ 0 \\ -a\sin\varphi \, d\varphi \end{vmatrix}$$
$$= B a^2 \omega \sin\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi}_{\pi}$$
$$= B S \omega \sin\omega t$$

---

3)

$$P_J = R i^2$$
$$= \frac{e^2}{R}$$
$$= \frac{B^2 S^2 \omega^2}{R} \sin^2\omega t$$

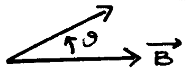
$$\boxed{\langle P_J \rangle = \frac{B^2 S^2 \omega^2}{2R}}$$

---

4) Dans un champ $\overrightarrow{B}$ uniforme, le moment des forces de Laplace d'un cadre parcouru par i est indépendant du point de calcul (couple) et vaut

$$\overrightarrow{\Gamma_L} = \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}}}_{\text{moment magnétique}} \wedge \overrightarrow{B}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = i\overrightarrow{S}$$



$$= iS\,\overrightarrow{u_{y'}} \wedge B\,\overrightarrow{u_y}$$

$$= iS\,(\cos\theta\,\overrightarrow{u_y} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_x}) \wedge B\,\overrightarrow{u_y}$$

$$= -iSB\sin\theta\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_L} = -\frac{B^2S^2\omega}{R}\sin^2\omega t\,\overrightarrow{u_z}}$$

$$= \Gamma_L\,\overrightarrow{u_z}$$

avec $\Gamma_L \leqslant 0$

ce couple est donc résistant.

En appliquant le théorème du moment cinétique à la spire, on a, en projection selon $\overrightarrow{u_z}$

$$\Gamma_{moteur} + \Gamma_{Laplace} = \underbrace{J_z}_{\text{moment inertie}} \frac{d\omega}{dt}$$

$$= 0$$

puisque la spire tourne à vitesse constante.

$$\Gamma_{moteur} = -\Gamma_{Laplace}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_m} = \frac{B^2S^2\omega}{R}\sin^2\omega t\,\overrightarrow{u_z}}$$

La puissance exercée par le moteur pour faire tourner la spire est :

$$P_m = \overrightarrow{\Gamma_m}\,\overrightarrow{\omega}$$

$$\boxed{P_m = \frac{B^2S^2\omega^2}{R}\sin^2\omega t}$$

$$\boxed{\langle P_m\rangle = \frac{B^2S^2\omega^2}{2R}}$$

---

5) On obtient

$$P_m = P_J$$
$$\langle P_m\rangle = \langle P_J\rangle$$

La puissance fournie par le moteur qui fait tourner la spire dans B est dissipée en effet Joule.

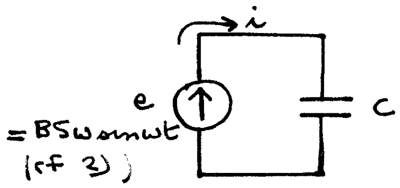
remarque :

on vérifie bien le principe de conversion électromécanique (dans $\overrightarrow{B}$ indépendant du temps)

$$P_{Laplace} + e_{ext}\,i = 0$$
$$-P_{moteur} + R\,i^2 = 0$$
$$P_m = P_J$$

---

6)



$$i = C\frac{de}{dt}$$

$$\boxed{i = BSC\omega^2\cos\omega t}$$

---

7) $$\overrightarrow{\Gamma_L} = -iSB\sin\omega t\ \overrightarrow{u_z} \quad \text{(cf 4))}$$
$$= -B^2S^2C\omega^2\sin\omega t\cos\omega t\ \overrightarrow{u_z}$$

Si la vitesse de rotation est constante, on a

$$\overrightarrow{\Gamma_m} = -\overrightarrow{\Gamma_L} \qquad \text{(cf 4))}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_m} = B^2 S^2 C \omega^2 \sin \omega t \cos \omega t \ \overrightarrow{u_z}}$$

La puissance exercée par le moteur est

$$P_m = \overrightarrow{\Gamma_m} \, \overrightarrow{\omega}$$

$$\boxed{P_m = B^2 S^2 C \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t}$$

Et donc, puisque

$$\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \langle \overrightarrow{\Gamma_m} \rangle = \overrightarrow{0} \\ \langle P_m \rangle = 0 \end{array}}$$

---

8) La puissance reçue par le condensateur est

$$\begin{aligned} P_e &= u\, i \\ &= e\, i \\ &= e\, C \frac{de}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C e^2\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{P_e = B^2 S^2 C \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t}$$

$$\boxed{\langle P_e \rangle = 0}$$

---

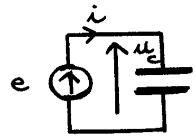
9) Etude générale avec

$$\phi = BS\cos\theta(t)$$

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = +BS\sin\theta\ \dot{\theta}$$

$$\Gamma_L = -iSB\sin\theta$$

→ équation électrique



$$\boxed{i = C\frac{de}{dt}}$$

$u_c = e$

bilan de puissance électromagnétique :

$$ie = C\frac{de}{dt}e$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Ce^2\right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_c^2\right) = \underbrace{ei}_{-P_L}}$$

(cf principe de conversion)

→ équation mécanique

$$\boxed{\Gamma_L + \Gamma_m = J\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

(J moment d'inertie du système en rotation)

bilan de puissance mécanique :

$$\Gamma_L\dot{\theta} + \Gamma_m\dot{\theta} = J\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$P_L + P_m = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right) = P_L + P_m}$$

remarque: le principe de conversion électromécanique (en champ extérieur permanent)

$$P_L + e_{ext}\, i = 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$-iSB\sin\theta\ \dot{\theta} \qquad BS\sin\theta\ \dot{\theta}\, i$$

→ équation différentielle (en θ)

$$-iSB\sin\theta + \Gamma_m = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-SB\sin\theta\, C\frac{de}{dt} + \Gamma_m = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-S^2B^2C\sin\theta\left(\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta\right) + \Gamma_m = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\boxed{\Gamma_m - CB^2S^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta^2 = \ddot\theta\left(J + CB^2S^2\sin^2\theta\right)}$$

bilan de puissance électromécanique :

$$P_m = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\dot\theta^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_c^2\right)$$

$$\boxed{P_{moteur} = \frac{d\,E_{cinétique}}{dt} + \frac{d\,U_{cond}}{dt}}$$

Si la spire tourne à vitesse constante ($\dot\theta = cste$, $\ddot\theta = 0$)

- bilan de puissance électromécanique

$$P_{moteur} = \frac{dU_{cond}}{dt}$$

(on a trouvé effectivement

$$P_m = P_e\ )$$

- équation du mouvement

$$\Gamma_m - CB^2S^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta^2 = 0$$

Si il n'y a pas de moteur ($\Gamma_m = 0$)

- bilan de puissance électromécanique

$$0 = \frac{dE_{cinétique}}{dt} + \frac{dU_{cond}}{dt}$$

$$\boxed{E_{cinétique} + U_{\text{énergie électrique stockée dans le condensateur}} = Cste}$$

- si l'énergie cinétique diminue, l'énergie stockée dans le condensateur augmente
- et inversement.

• équation du mouvement

$$\boxed{-CB^2S^2 \sin\theta \cos\theta \ \dot{\theta}^2 = \ddot{\theta}\left(J + CB^2S^2 \sin^2\theta\right)}$$

on cherche $\dot{\theta} = f(\theta)$

$$\ddot{\theta} = \underbrace{\frac{df(\theta)}{d\theta}}_{f'(\theta)} \dot{\theta}$$

$$-CB^2S^2 \sin\theta \cos\theta \ f^2(\theta) = f'(\theta)\, f(\theta)\ (J + CB^2S^2 \sin^2\theta)$$

$$\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = -\frac{CB^2S^2 \sin\theta \cos\theta}{J + CB^2S^2 \sin^2\theta}$$

$$\frac{df}{f} = -\frac{CB^2S^2 \sin\theta \cos\theta}{J + CB^2S^2 \sin^2\theta}\, d\theta$$

avec $\left| \begin{array}{l} D = J + CB^2S^2 \sin^2\theta \\ dD = 2\, CB^2S^2 \sin\theta \cos\theta \, d\theta \end{array}\right.$

$$\frac{df}{f} = -\frac{1}{2}\frac{dD}{D}$$

$$\ln f = -\frac{1}{2} \ln D + \text{cste}$$

$$\dot{\theta} = \frac{A}{\sqrt{J + CB^2S^2 \sin^2\theta}}$$

C.I. $\dot{\theta}_0 = \dfrac{A}{\sqrt{J}}$

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \sqrt{\frac{J}{J + CB^2S^2 \sin^2\theta}}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{\dot{\theta}_0}{\sqrt{1 + \frac{CB^2S^2}{J} \sin^2\theta}}}$$

• tracés de courbes

1) $\dot{\theta} = \omega = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{CB^2S^2}{J} \sin^2\theta}}$

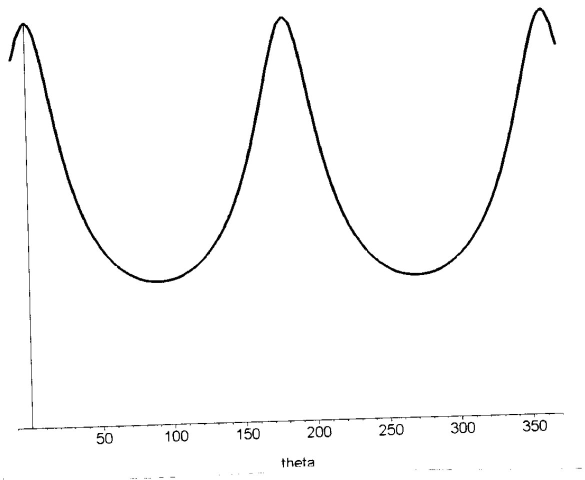
2)
$$\frac{dE_c}{dt} = J\,\omega \frac{d\omega}{dt}$$
$$= J\,\omega \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$
$$= J\,\omega^2\, \omega'_\theta$$

3) $\dfrac{dU_{CONDO}}{dt} = e\ C\ \dfrac{de}{dt}$

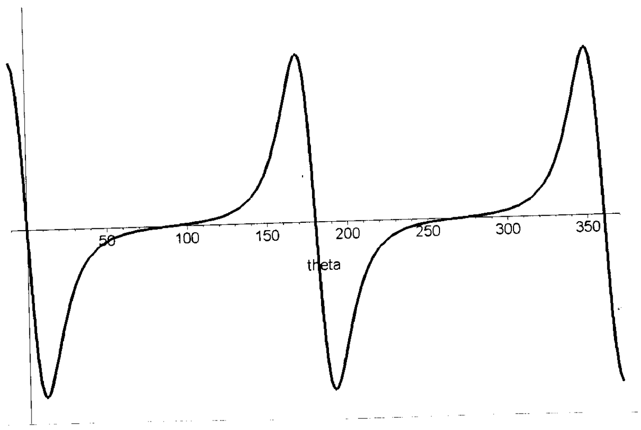
$= BS \sin\theta\ \omega\quad C\ BS\ \left(\cos\theta\ \omega^2 + \sin\theta\ \dfrac{d\omega}{dt}\right)$

$= C B^2 S^2\ \sin\theta\ \ \omega\ \left(\cos\theta\ \omega^2 + \sin\theta\ \omega\ \omega'_\theta\right)$

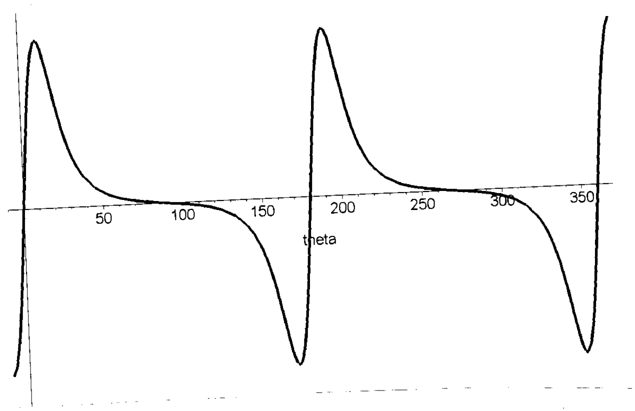
$\dot{\theta}$



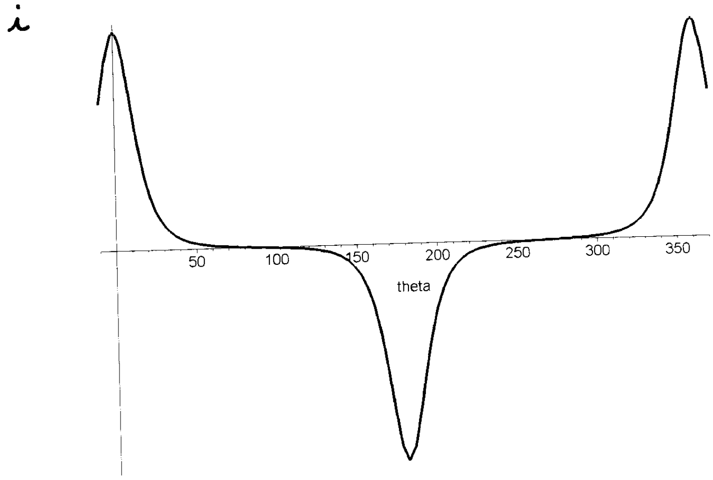
$\dfrac{dE_c}{dt}$



$\dfrac{dU_c}{dt}$



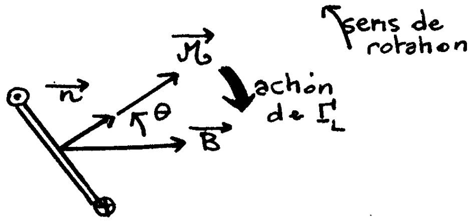
interprétation



($i(t)$ - en négligeant le champ propre -)

On peut interpréter en se rappelant que les forces de Laplace tendent à ramener $\vec{\mathcal{M}}$ vers $\vec{B}$. $(\vec{\mathcal{M}} = i\,S\,\vec{n})$

$0 < \theta < 90^\circ \quad i > 0$



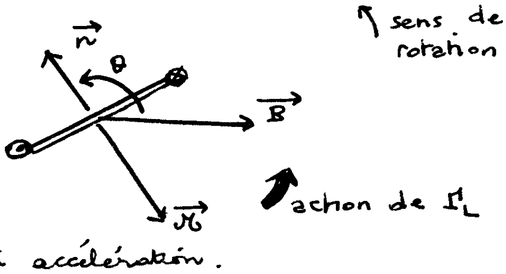
ici freinage

$\dot{\theta} \searrow$

$E_c \searrow$

$U_c \nearrow$

$90^\circ < \theta < 180^\circ \quad i < 0$

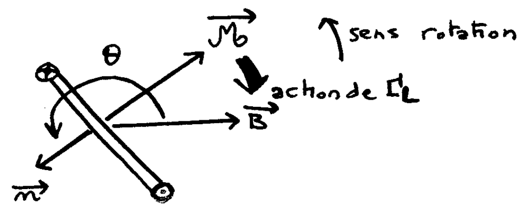


ici accélération.

$\dot{\theta} \nearrow$

$E_c \nearrow$ et $U_c \searrow$

$180° < \theta < 270° \qquad i < 0$



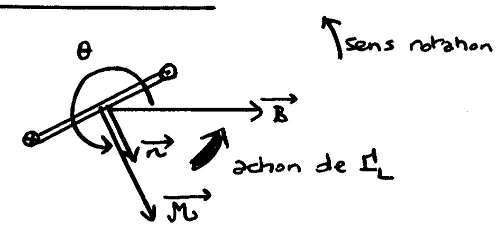
ici freinage

$\dot\theta \searrow$

$E_c \searrow$

$U_c \nearrow$

$270° < \theta < 360° \qquad i > 0$



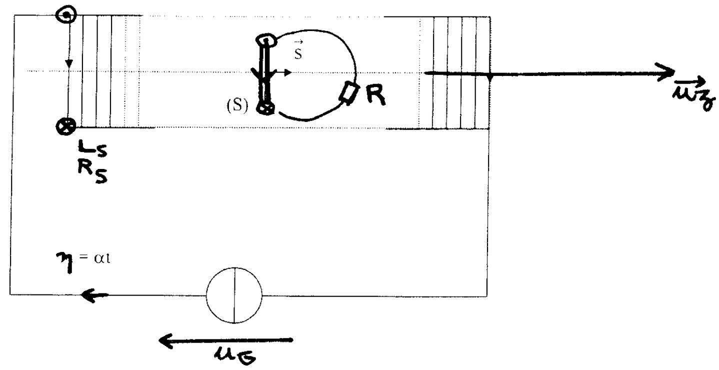
ici accélération

$\dot\theta \nearrow$

$E_c \nearrow$

$U_c \searrow$

10)



$\overrightarrow{B_s}$ créé par le solénoïde est proportionnel à η
Le flux ϕ dû à $\overrightarrow{B_s}$ dans la spire est donc proportionnel aussi à η

$$\boxed{\phi = M\,\eta}$$

M est donc le coefficient de mutuelle induction solénoïde-spire.
$\overrightarrow{B_s}$ et $\overrightarrow{S}_{spire}$ sont de même sens (car le solénoïde et la spire sont orientés dans le même sens)

donc $\phi > 0$ (si $\eta > 0$)

$$\boxed{M > 0}$$

remarque :

expression de M si le solénoïde est supposé sans effets de bords.

$$\overrightarrow{B_s} = \mu_0 \frac{N_{\text{spires solénoïde}}}{\ell_{\text{longueur solenoïde}}}\,\eta\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\phi = \underbrace{\mu_0 \frac{N_s}{\ell_s} S}_{M}\,\eta$$

11) La f.e.m. induite dans la spire est :

$$e = -\frac{d}{dt}\left(\phi + \cancel{L_{spire}}\,i\right)$$

on néglige

$$e = -M \frac{d\eta}{dt}$$

$$i = \frac{e}{R}$$

$$\boxed{i = -\frac{M}{R}\frac{d\eta}{dt}}$$

$$\boxed{i = -\frac{M}{R}\alpha}$$

$$P_J = R\, i^2$$

$$\boxed{P_J = \frac{M^2}{R}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2}$$

$$\boxed{P_J = \frac{M^2}{R}\alpha^2}$$

---

12) Ce courant est <u>indépendant du temps</u>.
La force électromotrice de mutuelle induction dans le solénoïde est $-M \underbrace{\cancel{\frac{di}{dt}}}_{\text{nul}}$. Elle est donc <u>nulle</u>.

---

13) La tension fournie par le générateur de courant est :

$$u_G = R_s\, \eta - \underbrace{e_{\text{induite dans le solénoïde}}}_{-\frac{d}{dt}(L_s \eta + M i)}$$

$$u_G = R_s\, \eta + L_s \frac{d\eta}{dt}$$

$$P_G = u_G\, \eta$$

$$= R_s \eta^2 + L_s \eta \frac{d\eta}{dt}$$

$$\boxed{P_G = R_s \eta^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_s \eta^2\right)}$$

$$\boxed{P_G = R_s \alpha^2 t^2 + L_s \alpha^2 t}$$

---

14) Les caractéristiques de la spire n'interviennent pas dans P_G.
Le résultat précédent n'est pas modifié si la spire n'est pas présente.

---

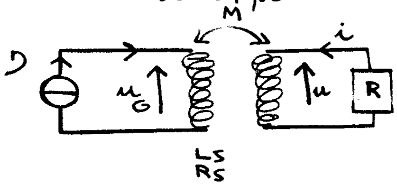
15) $\longrightarrow$

$$\phi_{primaire} = \phi_s = L_s j + M i$$

$$\phi_{secondaire} = \phi = \cancel{L_{spire}}\, i + M j$$

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_s &= L_s j + M i \\ \phi &= M j \end{aligned}}$$

$\longrightarrow$ schéma électrocinétique



$$u_G = R_s j + L_s \frac{dj}{dt} + \cancel{M \frac{di}{dt}} \text{ nul}$$

$$u = -e = +M \frac{dj}{dt} = -R i$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_G &= R_s j + L_s \frac{dj}{dt} \\ M \frac{dj}{dt} &= -R i \end{aligned}}$$

$\longrightarrow$ bilan de puissance électromagnétique

$$\frac{dU_{em}}{dt} = \underset{\text{reçue}}{P_{em}} + \underset{\text{produite (source)}}{P_{em}}$$

$$\boxed{\frac{dU_{em}}{dt} = P_G - (R_s j^2 + R i^2)}$$

remarque :

démonstration :

$$U_{em} = \frac{1}{2} L_s j^2 + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2} L_{spire}\, i^2}}_{\text{négligé}} + \underbrace{M j i}_{\text{energie mutuelle}}$$

$$\frac{dU_{em}}{dt} = \underbrace{L_s j \frac{dj}{dt}}_{j\,(u_G - R_s j)} + \underbrace{M \frac{dj}{dt} i}_{(-R i\ i)}$$

$\left(\text{ici } \frac{di}{dt} = 0\right)$

→ énergie se manifeste sous quelles formes

On vient de trouver :

$$\underbrace{P_G}_{\substack{P_{\text{fournie}}\\ \text{par le}\\ \text{générateur}}} = \frac{dU_{em}}{dt} + \underbrace{R_S \eta^2}_{P_{\text{Joule } R_S}} + \underbrace{R i^2}_{P_{\text{Joule } R}}$$

On avait trouvé en 13)

$$P_G = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_S \eta^2\right) + R_S \eta^2$$

On en déduit que la puissance correspondant à l'inductance mutuelle correspond à la puissance dissipée dans R

$$\frac{d}{dt}(M \eta i) = -R i^2$$

---

16) En présence de la spire $U_{em} = \frac{1}{2} L_S \eta^2 + \underbrace{M \eta i}_{<0}$

$$= \frac{1}{2} L_S \alpha^2 t^2 - \frac{M^2 \alpha^2}{R} t$$

U_{em} croît moins vite (présence du terme en $-\frac{M^2 \alpha^2 t}{R}$)

Ce terme correspond à la dissipation Joule dans R

($R i^2 = \frac{M^2 \alpha^2}{R}$ soit une énergie $\frac{M^2 \alpha^2}{R} t$)
