DNS

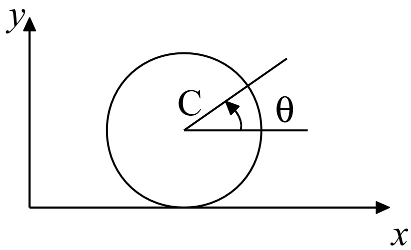
Sujet

Roues.....1
I.Roue soumise à un couple de freinage.....1
II.Roue sur un tapis roulant incliné.....2
III.Expérience de Timochenko.....2

Roues

I. Roue soumise à un couple de freinage

1. Rappel sur la notion de couple. On considère un ensemble de deux forces: $\vec{F}_1=\vec{F}$ appliquée en A_1 et $\vec{F}_2=-\vec{F}$ appliquée en A_2. Ces deux forces opposées forment un couple. Déterminer la résultante ou somme de ces deux forces. Déterminer le moment de ces deux forces en un point O. Montrer que le moment en un point (désigné aussi par « couple ») est indépendant du point de calcul O. Ceci est-il en accord avec la « formule de transport du moment »?



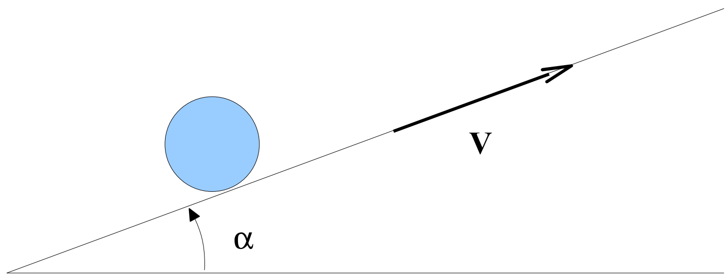
On considère une roue (masse M, rayon a, centre C, moment d'inertie par rapport à son axe $J=\frac{1}{2}Ma^2$). Le coefficient de frottement de la roue sur le sol est f. La roue roule sans glisser sur le sol horizontal à la vitesse $\vec{v}_C=v_0\vec{u}_x$ ($v_0>0$).

En $t=0$ et jusqu'à l'arrêt de la roue, on applique un couple de freinage $\vec{\Gamma}=\Gamma\vec{u}_z$ afin d'arrêter la roue.

2. Déterminer le signe de Γ.
3. On suppose qu'il y a alors roulement sans glissement. Écrire les équations. Quelle est la condition que doit vérifier Γ. Déterminer la distance d parcourue avant l'arrêt de la roue?
4. On suppose qu'il y a roulement avec glissement. Écrire les équations. Quelle est la condition que doit vérifier Γ. Déterminer .la distance d parcourue avant l'arrêt de la roue?

II. Roue sur un tapis roulant incliné

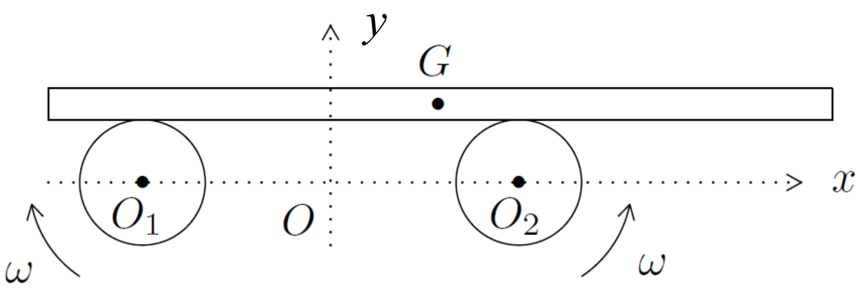
On considère une roue (masse M, rayon a, centre C, moment d'inertie par rapport à son axe $J=\frac{1}{2}M a^2$). En $t=0$ on pose la roue, sans vitesse, sur un tapis roulant qui défile à la vitesse V constante sur le plan incliné d'angle α. Le coefficient de frottement entre la roue et le tapis roulant est f. On supposera $f>\tan\alpha$. On se place dans le référentiel galiléen du laboratoire $\mathcal{R}$.



1. Paramétrer le mouvement du cylindre et exprimer la vitesse de glissement.
2. Justifier qu'il y a glissement au moins au départ et préciser le sens du glissement.
3. Déterminer le mouvement tant qu'il y a glissement. En déduire la date t_1 où le glissement cesse.
4. Étudier le mouvement ultérieur en supposant qu'il y a non-glissement et en validant a posteriori.
5. Pour chacune des deux phases, étudier l'aspect énergétique dans $\mathcal{R}$ (bilan de puissance pour la roue et pour le tapis roulant en précisant si les frottements sont moteurs ou résistants, puissance totale des actions de contact, bilan de puissance pour le système: roue+tapis roulant). Reprendre la question dans le référentiel $\mathcal{R}'$ galiléen, lié au tapis roulant.

III. Expérience de Timochenko

Les deux roues ont un rayon a. Elles tournent à vitesse constante en sens inverse autour de leur axes respectifs fixes $\vec{\omega}_2=\omega\vec{u}_z$ et $\vec{\omega}_1=-\omega\vec{u}_z$ avec $\omega>0$. Les axes de ces deux roues sont distants de d. Une planche d'épaisseur considérée comme négligeable, homogène, de masse m, de longueur $L>d$, repose horizontalement sur les deux roues. On désigne par f le coefficient de frottement de la planche sur les cylindres.



On constate que la planche ne bascule pas et qu'elle oscille. On suppose que la barre est suffisamment grande pour que le contact existe toujours.

On désigne par x l'abscisse du centre de masse G de la planche à l'instant t et donc $\frac{dx}{dt}$ désigne la vitesse et $\frac{d^2x}{dt^2}$ est l'accélération de la planche.

La réaction exercée par la roue 2 sur la planche en I_2 est notée $\vec{R}_2 = N_2 \vec{u}_y + T_2 \vec{u}_x$. De même, la réaction exercée par la roue 1 sur la planche en I_1 est notée $\vec{R}_1 = N_1 \vec{u}_y + T_1 \vec{u}_x$.

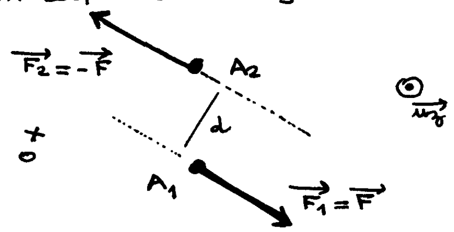
L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g\,\vec{u}_y$.

1. Écrire le théorème de la résultante cinétique à la planche dans le référentiel galiléen du laboratoire.
2. Écrire le théorème du moment cinétique à la planche dans le référentiel barycentrique en G . A titre d'exercice, vérifier que le résultat obtenu en appliquant le théorème du moment cinétique en O dans le référentiel galiléen du laboratoire donne le même résultat final.
3. À ce niveau, combien manque-t-il d'équations pour résoudre ?
4. En utilisant certaines des équations précédentes, donner les expressions de N_1 et N_2 en fonction de x et indiquer les conditions (supposées remplies) pour que la planche ne bascule pas.
5. Déterminer les expressions des vitesses de glissement de la planche $\vec{v}_{gliss1}$ sur la roue 1 et $\vec{v}_{gliss2}$ sur la roue 2 faisant intervenir $\frac{dx}{dt}$ et $a\,\omega$. En utilisant les lois de Coulomb pour le frottement, déterminer les cinq cas a priori possibles selon les valeurs de $\frac{dx}{dt}$ et $a\,\omega$ et indiquer à chaque fois le lien entre T_i , N_i et f ($i=1{,}2$).
6. Au départ, la planche a été posée sans vitesse initiale sur les roues en rotation. On pose $x_{t=0} = x_0$ .Que peut-on déduire pour l'expression de T_1 et celle de T_2 pendant la première phase du mouvement. Écrire l'équation différentielle et déterminer l'expression de x . À quelle condition portant sur $|x_0|$ l'équation différentielle reste-t-elle toujours valable ? Déterminer dans ce cas l'expression de la période du mouvement. Quelle peut-être l'application de cette expérience ?
7. On reprend la question 6 mais $x_{t=0} = x_0 > 0$ ne vérifie pas la condition obtenue à la question précédente. Étudier le mouvement.
8. On reprend la question 6 mais cette fois, l'épaisseur de la planche n'est plus négligeable. Que devient la période ?
9. On reprend la question 6 mais les cylindres tournent en sens inverse : $\vec{\omega}_2 = -\omega\,\vec{u}_z$ et $\vec{\omega}_1 = \omega\,\vec{u}_z$ avec $\omega > 0$. Étudier.

Réponses

Roue soumise à un couple de freinage

1)



résultante :

$$\overrightarrow{R} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$$
$$= \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$$
$$= \overrightarrow{F} - \overrightarrow{F}$$
$$\boxed{\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}}$$

moment :

En O

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(O) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(O)_{\overrightarrow{F_1}} + \overrightarrow{\mathcal{M}}(O)_{\overrightarrow{F_2}}$$
$$= \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{F_2}$$
$$= \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{F} + \overrightarrow{OA_2} \wedge -\overrightarrow{F}$$
$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}(O) = \overrightarrow{A_2A_1} \wedge \overrightarrow{F} = \|\overrightarrow{F}\| d \,\overrightarrow{u_z}}$$

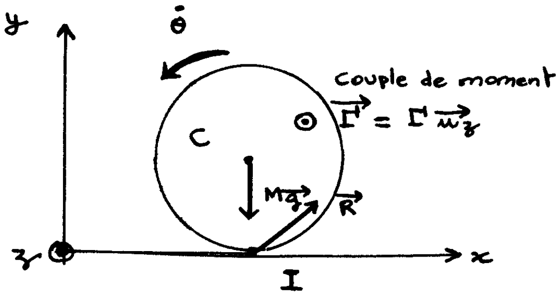
Ce moment est <u>indépendant du point O</u> utilisé pour le calcul.
(cf = force × distance entre les deux forces)

cf. "formule de transport du moment"

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(O') = \overrightarrow{\mathcal{M}}(O) + \overrightarrow{O'O} \wedge \underbrace{\overrightarrow{R}}_{\text{nul}}$$
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(O') = \overrightarrow{\mathcal{M}}(O)$$

---

2)



→ expression de la vitesse de glissement :

$$\vec{v}_{\substack{gliss \\ (roue/sol)}} = \underbrace{\vec{v}_{I \in roue}}_{\vec{v_C} + \vec{\omega} \wedge \vec{CI}} - \underbrace{\vec{v}_{I \in sol}}_{nul}$$

$$= \dot{x}\,\vec{u_x} + \dot{\theta}\,\vec{u_z} \wedge -a\vec{u_y}$$

$$\boxed{\vec{v}_{\substack{gliss \\ roue/sol}} = (\dot{x} + a\dot{\theta})\,\vec{u_x}}$$

au départ, la vitesse de glissement est nulle donc

$$\vec{0} = (v_0 + a\,\dot{\theta}_0)\,\vec{u_x}$$

$$\boxed{\dot{\theta}_0 = -\frac{v_0}{a}}$$

→ le couple est un couple de freinage si la puissance qu'il fournit est négative

$$\boxed{P = \vec{\Gamma}\,\vec{\omega} < 0}$$

$$= \Gamma\,\dot{\theta} < 0$$

on trouve donc, ce qui est prévisible, que Γ doit être contraire à $\dot{\theta}$ pour freiner.

si $\dot{\theta} > 0$ $\quad \Gamma_{freinage} < 0$

si $\dot{\theta} < 0$ $\quad \Gamma_{freinage} > 0$

Ici $\dot{x} > 0$, $\dot{\theta} < 0$ donc

$$\boxed{\Gamma > 0}$$

→ On peut subodorer que si $|\Gamma|$ est trop grand, il y aura glissement ...

---

3) roulement sans glissement

– les équations générales

• résultante cinétique :

$$\vec{R} + M\,\vec{g} = M\,\vec{a}$$

$/x$ $\quad \boxed{R_x = M\,\ddot{x} \qquad (1)}$

$/y$ $\quad \boxed{R_y - M\,g = 0 \qquad (2)}$

- th du σ dans $\mathcal{R}^*$ en projection selon Gz

$$\mathcal{M}_{ext/Gz} = \frac{d}{dt}\sigma^*_z$$

$$a R_x + \Gamma' = J \frac{d}{dt}\omega_z$$

$$\boxed{a R_x + \Gamma' = \frac{1}{2} M a^2 \ddot{\theta} \qquad (3)}$$

- relations de non-glissement

$$\boxed{\dot{x} = -a\dot{\theta} \qquad (4)}$$

$$\boxed{\left|\frac{R_x}{R_y}\right| \leq f \qquad (5)}$$

– la résolution

$$a R_x + \Gamma' = \frac{1}{2} M a^2 \ddot{\theta} \qquad (3)$$

$$a M \ddot{x} + \Gamma' = -\frac{1}{2} M a \ddot{x} \qquad \text{en utilisant (1) et (4)}$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{2}{3}\frac{\Gamma'}{Ma}}$$

La décélération est constante.

($\Gamma' > 0$ donc $\ddot{x} < 0$ et $\dot{x}\ddot{x} < 0$ donc $\frac{dv^2}{dt} < 0$ ce qui correspond bien à un freinage)

– la condition

$$\left|\frac{R_x}{R_y}\right| \leq f$$

$$\left|\frac{M\left(-\frac{2}{3}\frac{\Gamma'}{Ma}\right)}{Mg}\right| \leq f$$

$$\boxed{\Gamma' \leq \frac{3}{2} f M g a}$$

– la distance parcourue d

On peut retrouver la formule connue :

$$v^2 - v_0^2 = 2\, a\, (x - x_0)$$

$$0 - v_0^2 = 2\left(-\frac{2}{3}\frac{\Gamma'}{Ma}\right) d$$

$$\boxed{d = \frac{3}{4}\frac{M a v_0^2}{\Gamma'}}$$

– l'approche énergétique

Il n'y a pas conservation de l'énergie à cause du couple de freinage. On écrit le théorème de la puissance cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\substack{\text{uissance}\\ \text{toutes forces}}}$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right)}_{\frac{3}{4}M\dot{x}^2} = \underbrace{M\vec{g}\,\vec{v}}_{\text{nul}} + \vec{R}\,\underbrace{\vec{v}_{I\in roue}}_{\text{nul}} + \underbrace{\vec{\Gamma}\,\vec{\omega}}_{\Gamma\dot{\theta}=-\frac{\Gamma}{a}\dot{x}}$$

ce qui permettait d'obtenir $\ddot{x}$ plus rapidement

$$\frac{3}{2}M\dot{x}\ddot{x} = -\frac{\Gamma}{a}\dot{x}$$

d'où

$$\ddot{x} = -\frac{2}{3}\frac{\Gamma}{Ma}$$

---

4) roulement avec glissement

On s'attend à trouver $\Gamma \geq \frac{3}{2} f\, Mga$

- les équations générales

$R_x = M\ddot{x}$	(1)
$R_y = Mg$	(2)
$aR_x + \Gamma = \frac{1}{2}Ma^2\ddot{\theta}$	(3)
$\left\lvert\frac{R_x}{R_y}\right\rvert = f$	(4)
$R_x\, v_{gliss} \leq 0$	(5)

- la résolution

R_x est négatif (cf (1) car $\ddot{x}$ est du signe opposé à $\dot{x}$ en cas de freinage ... on pourrait aussi "subodorer" que v_{gliss} sera positif si Γ trop grand et $R_x<0$ cf (5))

donc (4) (2) $R_x = -fmg$ puis avec (1) :

$$\boxed{\ddot{x} = -fg}$$

- la condition

$$\dot{x} = -fgt + v_0$$

puis (3)

$$a\ddot{\theta} = -2fg + \frac{2\Gamma}{Ma}$$

$$a\dot{\theta} = \left(-2fg + \frac{2\Gamma}{Ma}\right)t - v_0$$

donc $v_{gliss} = \left(-3fg + \frac{2\Gamma}{Ma}\right) t$

On a supposé $R_x < 0$, on doit donc vérifier (cf (5))

$v_{gliss} \geq 0$ soit puisque $t \geq 0$

$$\boxed{\Gamma \geq \frac{3}{2} f M g a}$$

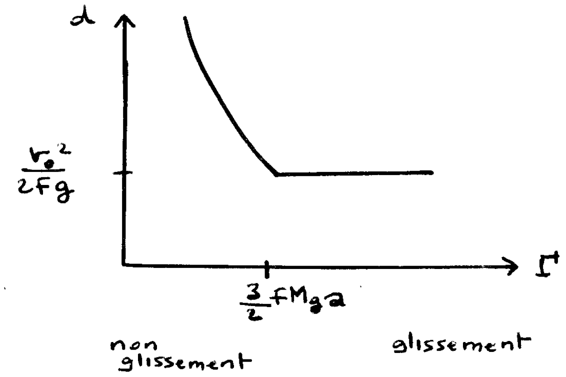
- la distance parcourue d

$$v^2 - v_0^2 = 2a\,(x - x_0)$$

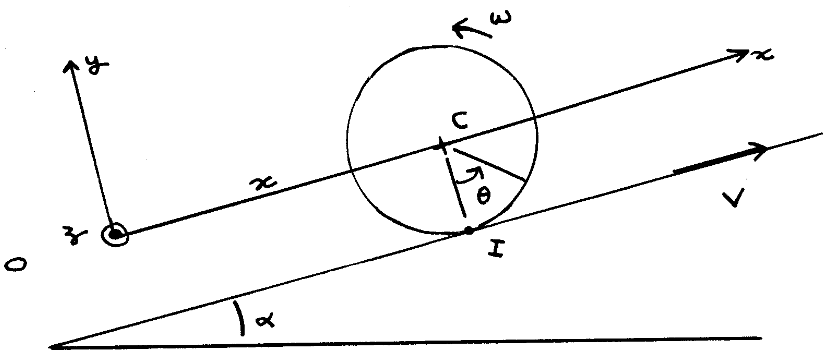
$$0 - v_0^2 = 2(-fg)\,d$$

$$\boxed{d = \frac{v_0^2}{2fg}}$$

- graphe



Roue sur un tapis roulant incliné



1) On paramètre le cylindre par

x abscisse de C

θ (repère la rotation du cylindre)

donc

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{v_{(C)}} &= \dot{x}\ \overrightarrow{u_x} = v\ \overrightarrow{u_x}\\ \overrightarrow{\omega}_{roue} &= \dot{\theta}\ \overrightarrow{u_z} = \omega\ \overrightarrow{u_z}\end{aligned}}$$

---

2) Vitesse de glissement

$$\overrightarrow{v_{gliss}}_{\ roue/tapis\ roulant} = \overrightarrow{v_{I\in roue}} - \overrightarrow{v_{I\in tapis\ roulant}}$$

$$= \left(\overrightarrow{v_{(C)}} + \overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{CI}\right) - \overrightarrow{V}$$

$$= (v + a\omega - V)\ \overrightarrow{u_x}$$

$$\boxed{v_{gliss} = v - V + a\omega}$$

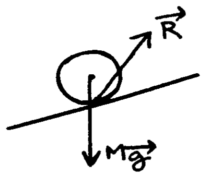
En $t=0$, il y a glissement vers le bas

$$v_{gliss_0} = 0 - V + 0$$

$$\boxed{v_{gliss_0} = -V < 0}$$

---

3)



<u>équations :</u>

Théorème de la résultante cinétique :

$$\vec{R} + M\vec{g} = M\vec{a}$$

/Ox $\quad \boxed{R_x - Mg\sin\alpha = M\dfrac{dv}{dt}}$ (1)

/Oy $\quad \boxed{R_y - Mg\cos\alpha = 0}$ (2)

Théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique en projection selon Cz :

$$\vec{u_z}\,(\vec{CI} \wedge \vec{R}) = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}^* \vec{u_z})$$

$$a R_x = J \frac{d\omega}{dt}$$

$$a R_x = \frac{1}{2} M a^2 \frac{d\omega}{dt}$$

$$\boxed{R_x = \frac{1}{2} M a \frac{d\omega}{dt}} \quad (3)$$

Lois de Coulomb du frottement solide :

$$\boxed{\left|\frac{R_x}{R_y}\right| = f} \quad (4)$$

$$\boxed{R_x\, v_{gliss} \leq 0} \quad (5)$$

La phase étudiée est une phase de glissement négatif.

$$v_{gliss} \leq 0$$

donc (5)

$$R_x > 0$$

et (2) et (4)

$$\boxed{R_x = f M g \cos\alpha}$$

<u>résolution :</u>

De (1), on tire :

$$\frac{dv}{dt} = (f\cos\alpha - \sin\alpha)\, g$$

De (3), on tire

$$a\frac{d\omega}{dt} = 2 f g \cos\alpha$$

$$\boxed{\begin{aligned} v &= (f\cos\alpha - \sin\alpha)\, g t \\ a\omega &= 2 f g \cos\alpha \; t \end{aligned}}$$

condition :

$$\begin{aligned} v_{gliss} &= v - V + a\omega && \leq 0 \\ &= (3f\cos\alpha - \sin\alpha)\, g t - V && \leq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{t \leq \frac{V}{(3f\cos\alpha - \sin\alpha)\, g}}$$

ce qui n'a de sens que si

$$3f\cos\alpha - \sin\alpha > 0$$

$$f > \frac{1}{3}\tan\alpha$$

(vérifié puisque $f > \tan\alpha$)

Le glissement négatif cesse en :

$$\boxed{t_1 = \frac{V}{(3f\cos\alpha - \sin\alpha)\, g}}$$

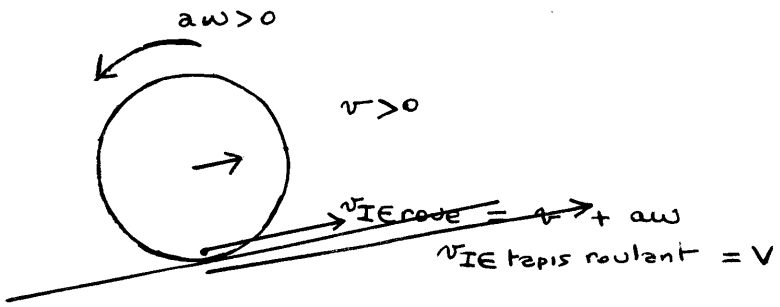
alors :

$$v_1 = \frac{f - \tan\alpha}{3f - \tan\alpha}\, V$$

$$a\omega_1 = \frac{2f}{3f - \tan\alpha}\, V$$

$\tan\alpha < f$

1ère phase



---

4) La deuxième phase qui démarre en t_1 pourrait être une nouvelle phase de glissement (glissement positif) ou une phase de non glissement.

On suppose le non glissement

équations :

$$R_x - Mg\sin\alpha = M\frac{dv}{dt} \qquad (1)$$

$$R_y - Mg\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$R_x = \frac{1}{2} M a \frac{d\omega}{dt} \qquad (3)$$

$$v_{gliss} = v + a\omega - V = 0 \qquad (4)$$

$$\left|\frac{R_x}{R_y}\right| \leq f \qquad (5)$$

<u>résolution</u> :

de (4) et (3) :
$$a\frac{d\omega}{dt} = -\frac{dv}{dt}$$
$$R_x = -\frac{1}{2}M\frac{dv}{dt}$$

de (1) :
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{2}{3}g\sin\alpha$$
$$\boxed{v = -\frac{2}{3}g\sin\alpha\,(t-t_1) + v_1}$$

$$a\frac{d\omega}{dt} = +\frac{2}{3}g\sin\alpha$$
$$\boxed{a\omega = \frac{2}{3}g\sin\alpha\,(t-t_1) + a\omega_1}$$

$a\omega$ reste toujours positif

v s'annule en t_2 tel que $t_2 - t_1 = \dfrac{3v_1}{2g\sin\alpha}$

puis la roue descend le tapis roulant (sans glisser)

<u>vérification</u> :

$$R_x = -\frac{1}{3}Mg\sin\alpha$$
$$R_y = Mg\cos\alpha$$
$$\left|\frac{R_x}{R_y}\right| = \frac{1}{3}\tan\alpha$$

qui est effectivement inférieur à f

---

5) Aspects énergétiques

Dans le référentiel galiléen du labo $\mathcal{R}$

- à la roue

phase 1 : $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2\right) = -Mg\,v\sin\alpha + \underbrace{R_x\, v_{I \in roue/\mathcal{R}}}_{R_x(v+a\omega)}$,

>0 les frottements sont MOTEURS pour la roue

phase 2 : $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2\right) = -Mg\,v\sin\alpha + \underbrace{R_x(v+a\omega)}_{R_x V}$,

avec $a\omega = V - v$

<0 les frottements sont RÉSISTANTS pour la roue

- au tapis roulant

L'énergie cinétique du tapis roulant est constante. Idem pour son énergie potentielle. Ce tapis roulant est entraîné par un moteur électrique qui fournit P_{moteur}. On néglige tout frottement (sauf ce qui se passe en I, au contact avec la roue).

phase 1 : $0 = \underbrace{(-R_x)\, v_{I \in tapis\,roulant}}_{-R_x V} + P_{moteur}$

réaction de la roue sur le tapis : $-\vec{R}$

<0 les frottements en I sont RÉSISTANTS pour le tapis.

phase 2 : $0 = -R_x V + P_{moteur}$

>0 les frottements en I sont MOTEURS pour le tapis

- puissance totale des actions de contact ($\leqslant 0$)

phase 1 : $P_{tot\,\vec{R}} = R_x(v+a\omega) - R_x V$

$= R_x\, v_{glissement} \leqslant 0$

phase 2 : $P_{tot\,\vec{R}} = R_x V - R_x V$

$= 0$ (cf pas de glissement)

- puissance à roue + tapis roulant

On fait la somme pour roue et tapis roulant

phase 1 : $\underbrace{\frac{d}{dt}\left(E_{mécanique\ roue/\mathcal{R}}\right)}_{>0} - \underbrace{R_x v_{glissement}}_{\substack{\text{puissance totale frottements} \\ <0}} = \underbrace{P_{moteur}}_{>0}$

Le moteur donne de l'énergie à la roue et lutte contre les frottements

phase 2 : $\underbrace{\dfrac{d}{dt}\left(E\,\text{mécanique}_{\text{roue}/\mathcal{R}}\right)}_{<0} = \underset{<0}{P_{moteur}}$

C'est la roue qui perd de l'énergie au profit du moteur.

Dans le référentiel lié au tapis roulant $\mathcal{R}'$ (galiléen)

- à la roue

phase 1 : $\dfrac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}M(v-V)^2+\frac{1}{2}J\omega^2\right) = -Mg(v-V)\sin\alpha + R_x\,v_{glissement}$

<0 les frottements sont RESISTANTS pour la roue

phase 2 : $\dfrac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}M(v-V)^2+\frac{1}{2}J\omega^2\right) = -Mg(v-V)\sin\alpha + 0$
avec $v-V=-a\omega$

les frottements ne travaillent pas car non glissement

- au tapis roulant qui est immobile. La réaction $(-\vec{R})$ s'applique donc à un point (fixe) du tapis dans $\mathcal{R}'$. Les bilans donnent $0=0$.

- puissance totale des actions de contact (≤ 0)

phase 1 : $P_{tot} = R_x\,v_{glissement} + 0$

phase 2 : $P_{tot} = 0 + 0$

- puissance à roue + tapis roulant

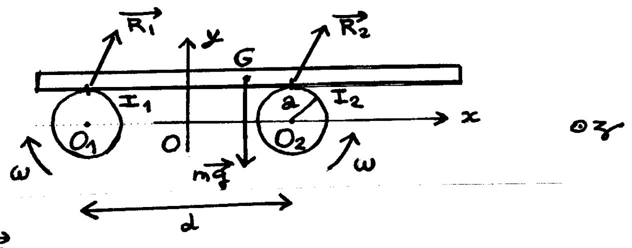
phase 1 : $\dfrac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}M(v-V)^2+\frac{1}{2}J\omega^2\right) = -Mg(v-V)\sin\alpha + R_x\,v_{glissement}$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2\right)+Mgv\sin\alpha}_{\frac{dE_{meca\ roue/\mathcal{R}}}{dt}} - \underbrace{R_x v_{gliss}}_{\text{puissance totale frottements}} = \underbrace{V\left(Mg\sin\alpha+M\frac{dv}{dt}\right)}_{R_x V}$$

que l'observateur dans $\mathcal{R}$ interprète comme fournie par le moteur.

phase 2 : idem mais pas de travail des frottements.

Expérience de Timochenko



$$\overrightarrow{\omega_1} = -\omega\,\overrightarrow{u_z}$$
$$\overrightarrow{\omega_2} = +\omega\,\overrightarrow{u_z}$$

1) Th de la résultante cinétique dans $\mathcal{R}$

$$\overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} + m\vec{g} = m\ddot{x}\,\overrightarrow{u_x}$$

$$/x \quad \boxed{T_1 + T_2 = m\ddot{x}} \qquad (1)$$

$$/y \quad \boxed{N_1 + N_2 - mg = 0} \qquad (2)$$

---

2) Th du moment cinétique de $\mathcal{R}^*$ en G
(dans $\mathcal{R}^*$ la planche est immobile. Pas de rotation donc $\vec{\sigma}^* = \vec{0}$)

$$\overrightarrow{GI_1} \wedge \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{GI_2} \wedge \overrightarrow{R_2} = \vec{0} \qquad \text{avec } \overrightarrow{GI_1} = \overrightarrow{OI_1} - \overrightarrow{OG}, \quad \overrightarrow{GI_2} = \overrightarrow{OI_2} - \overrightarrow{OG}$$

$$(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}) \begin{vmatrix} -(\frac{d}{2}+x) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_1 \\ N_1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{d}{2}-x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_2 \\ N_2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$(3') \qquad /z \quad \boxed{-(\tfrac{d}{2}+x)\,N_1 + (\tfrac{d}{2}-x)\,N_2 = 0}$$

Pour le plaisir, on applique le th du moment cinétique dans $\mathcal{R}$ en O

$$\overrightarrow{OI_1} \wedge \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{OI_2} \wedge \overrightarrow{R_2} + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{d\vec{\sigma}}{dt}(O)$$

avec (th de König)

$$\vec{\sigma}(O) = \overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{v_G} + \underbrace{\vec{\sigma}^*}_{\text{nul}}$$
$$= a\,\overrightarrow{u_y} \wedge m\dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$$
$$= -ma\dot{x}\,\overrightarrow{u_z}$$

Donc

$$\overrightarrow{OI_1} \wedge \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{OI_2} \wedge \overrightarrow{R_2} + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{d}{dt}(-ma\dot{x}\,\overrightarrow{u_z})$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{d}{2} \\ a \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_1 \\ N_1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{d}{2} \\ a \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_2 \\ N_2 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x \\ a \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$(3'') \qquad /z \quad \boxed{\tfrac{d}{2}(N_2 - N_1) - a(T_1 + T_2) - mgx = -ma\ddot{x}}$$

En tenant compte de (1) et (2), (3') et (3'') donnent la même chose :

$$\boxed{\frac{d}{2}(N_2 - N_1) = mg\,x} \qquad (3)$$

---

3) On dispose de 3 équations pour 5 inconnues (T_1 , T_2 , N_1 , N_2 , x)

$$\boxed{\text{Il manque 2 équations}}$$

---

4) Avec (2) et (3)

$$(2) \qquad N_1 + N_2 = mg$$

$$(3) \qquad -N_1 + N_2 = mg\,\frac{2x}{d}$$

$$\boxed{\begin{aligned} N_1 &= \frac{mg}{2}\left(1 - \frac{2x}{d}\right) \\ N_2 &= \frac{mg}{2}\left(1 + \frac{2x}{d}\right) \end{aligned}}$$

Ces grandeurs doivent être positives (sinon le contact cesse sur la planche pour laquelle N s'annule – en changeant de signe – et la planche bascule)

$$N_1 \geq 0 \qquad x \leq \frac{d}{2}$$

$$N_2 \geq 0 \qquad x \geq -\frac{d}{2}$$

<u>On suppose ces conditions remplies</u> (G se trouve toujours entre I_1 et I_2)

$$\boxed{-\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2}}$$

---

5) vitesses de glissement :

$$\overrightarrow{v_{gliss1}} = \overrightarrow{v_{I_1 \in planche}} - \overrightarrow{v_{I_1 \in roue}}$$

$$= (\ \dot{x} - a\omega\ )\ \overrightarrow{u_x}$$

$$\overrightarrow{v_{gliss2}} = \overrightarrow{v_{I_2 \in planche}} - \overrightarrow{v_{I_2 \in roue}}$$

$$(\ \dot{x} - (-a\omega)\ )\ \overrightarrow{u_x}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_{gliss\,1} &= \dot{x} - a\omega \\ v_{gliss\,2} &= \dot{x} + a\omega \end{aligned}}$$

on sait que - si non glissement $\left|\frac{T}{N}\right| \leq f$

- si glissement $\left|\frac{T}{N}\right| = f$

(avec T de signe contraire à v_{glis})

$\dot{x} > a\omega$	$v_{gliss\,1} > 0$ $v_{gliss\,2} > 0$	$T_1 = -f\frac{mg}{2}\left(1-\frac{2x}{d}\right)$ $T_2 = -f\frac{mg}{2}\left(1+\frac{2x}{d}\right)$	(a)
$\dot{x} = a\omega$	$v_{gliss\,1} = 0$ $v_{gliss\,2} > 0$	$\lvert T_1\rvert \leq f\frac{mg}{2}\left(1-\frac{2x}{d}\right)$ $T_2 = -f\frac{mg}{2}\left(1+\frac{2x}{d}\right)$	(b)
$-a\omega < \dot{x} < a\omega$	$v_{gliss\,1} < 0$ $v_{gliss\,2} > 0$	$T_1 = f\frac{mg}{2}\left(1-\frac{2x}{d}\right)$ $T_2 = -f\frac{mg}{2}\left(1+\frac{2x}{d}\right)$	(c)
$\dot{x} = -a\omega$	$v_{gliss\,1} < 0$ $v_{gliss\,2} = 0$	$T_1 = f\frac{mg}{2}\left(1-\frac{2x}{d}\right)$ $\lvert T_2\rvert \leq f\frac{mg}{2}\left(1+\frac{2x}{d}\right)$	(d)
$\dot{x} < -a\omega$	$v_{gliss\,1} < 0$ $v_{gliss\,2} < 0$	$T_1 = f\frac{mg}{2}\left(1-\frac{2x}{d}\right)$ $T_2 = f\frac{mg}{2}\left(1+\frac{2x}{d}\right)$	(e)

---

6) En $t=0$ $\quad x = x_0$

$$\boxed{\dot{x}_{t=0} = 0}$$

donc <u>on se trouve dans le cas (c) au départ.</u>

On a donc dans la première phase du mouvement

$$T_1 + T_2 = m\ddot{x} \qquad (1)$$

$$\frac{fmg}{2}\left(1-\frac{2x}{d}\right) - \frac{fmg}{2}\left(1+\frac{2x}{d}\right) = m\ddot{x}$$

$$-2fmg\frac{x}{d} = m\ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{2fg}{d}\,x = 0}$$

On pose :

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2fg}{d}}}$$

On obtient :

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

C.I. $t=0$
$$\left|\begin{array}{l} x_0 = A \\ \dot{x} = 0 = B\omega \end{array}\right.$$

$$\boxed{x = x_0 \cos\omega t}$$

On reste dans cette phase tant que $v_{gliss\,1} < 0$ et $v_{gliss\,2} > 0$ soit

$$-a\omega < \dot{x} < a\omega$$

$$-a\omega < -x_0\omega\sin\omega t < a\omega$$

Cette condition sera vérifiée à tout instant si

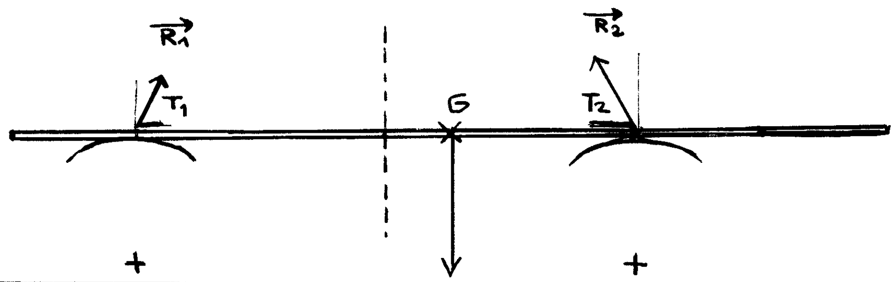
$$\boxed{|x_0| < a}$$

La période est

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{2fg}}}$$

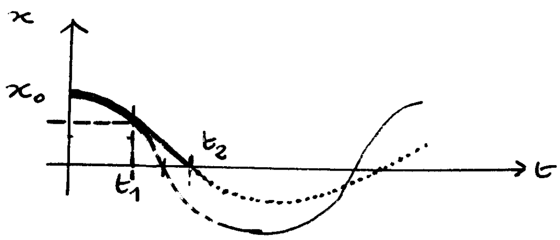
et donc, connaissant T, d, g on trouve expérimentalement la valeur de f

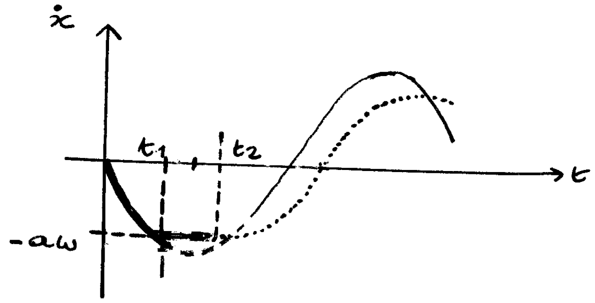


7) On a cette fois $x_0 > a$ et $\dot{x}_{t=0} = 0$

→ La première phase est donc comme précédemment (voir ©) telle que $v_{gliss\,1} < 0$ et $v_{gliss\,2} > 0$. On obtient :

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x_0 \cos \omega t \\ \dot{x} = -\omega x_0 \sin \omega t \end{array}}$$





Cette première phase s'achève lorsque $v_{gliss\,2} = 0$ en t_1 avec

$$\boxed{t_1 \text{ tel que : } \dot{x} = -a\omega}$$

→ La deuxième phase

On peut supposer que cette phase est une phase de non glissement sur 2
On peut envisager aussi une phase où le glissement sur 2 est devenu négatif (en passant par zéro en t_1 ...)

Supposons que le non glissement sur 2 persiste (voir tableau (d))

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{x} = -a\omega \\ \ddot{x} = 0 \end{array}}$$

$$T_1 + T_2 = m\ddot{x} = 0$$

$$\text{avec } T_1 = \frac{fmg}{2}\left(1 - \frac{2x}{d}\right)$$

donc $\quad T_2 = -\dfrac{fmg}{2}\left(1-\dfrac{2x}{d}\right)$

On doit vérifier la cohérence

$$|T_2| \overset{?}{\leqslant} \frac{fmg}{2}\left(1+\frac{2x}{d}\right)$$

$$\frac{fmg}{2}\underbrace{\left(1-\frac{2x}{d}\right)}_{\text{supposé positif en 4)}} \overset{?}{\leqslant} \frac{fmg}{2}\left(1+\frac{2x}{d}\right)$$

$$-x \overset{?}{\leqslant} x$$

cette phase 2 dure tant que $x \geqslant 0$ et s'achève en t_2

$$\boxed{t_2 \text{ tel que : } \begin{array}{l} x=0 \\ \dot{x}=-a\omega \end{array}}$$

→ <u>La troisième phase</u>

On peut tenter (c) ou (e)

Supposons (c) $\quad v_{gliss\,1}$ toujours <0 et $v_{gliss\,2}$ redevient >0

alors $\quad x = A\cos\omega(t-t_2) + B\sin\omega(t-t_2)$

C.I. $t=t_2$ $\quad \left| \begin{array}{l} 0 = A \\ \dot{x} = -a\omega = B\omega \end{array}\right.$

$$\boxed{x = -a\sin[\omega(t-t_2)]}$$

Cette phase va se poursuivre.

---

8) On tient compte de l'épaisseur de la planche notée e

le théorème du moment cinétique devient :

$$\overrightarrow{GI_1} \wedge \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{GI_2} \wedge \overrightarrow{R_2} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} -(\frac{d}{2}+x) \\ -\frac{e}{2} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} T_1 \\ N_1 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{d}{2}-x \\ -\frac{e}{2} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} T_2 \\ N_2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$-\left(\frac{d}{2}+x\right)N_1 + \frac{e}{2}T_1 + \left(\frac{d}{2}-x\right)N_2 + \frac{e}{2}T_2 = 0$$

soit :

$$\boxed{N_2 - N_1 = mg\,\frac{2x}{d} - \frac{me}{d}\,\ddot{x}}$$

finalement avec $N_1+N_2 = mg$, $T_1 = fN_1$, $T_2 = -fN_2$

$$T_1 = \frac{fmg}{2}\left(1-\frac{2x}{d}\right) + \frac{fme}{2d}\,\ddot{x}$$
$$T_2 = -\frac{fmg}{2}\left(1+\frac{2x}{d}\right) + \frac{fme}{2d}\,\ddot{x}$$

puis $$T_1 + T_2 = m\ddot{x}$$

$$\frac{2fg}{d}\,x + \ddot{x}\left(1-\frac{fe}{d}\right) = 0$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{2fg/d}{1-fe/d}}$$

et $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

---

9) Si les cylindres tournent, chacun, dans le sens opposé

$$v_{gliss\,1} = \dot{x} + a\omega$$
$$v_{gliss\,2} = \dot{x} - a\omega$$

Dans le cas $\dot{x} = 0$ au départ (cf cas c $-a\omega < \dot{x} < a\omega$)

$$T_1 = -\frac{fmg}{2}\left(1-\frac{2x}{d}\right)$$
$$T_2 = \frac{fmg}{2}\left(1+\frac{2x}{d}\right)$$

L'equation du mouvement est :

$$T_1 + T_2 = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} - \frac{2fmg}{d}\,x = 0$$

dont la solution fait intervenir des exponentielles.

$$x = x_0\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{2fmg}{d}}\;t\right)$$

La planche s'échappe et bascule.
