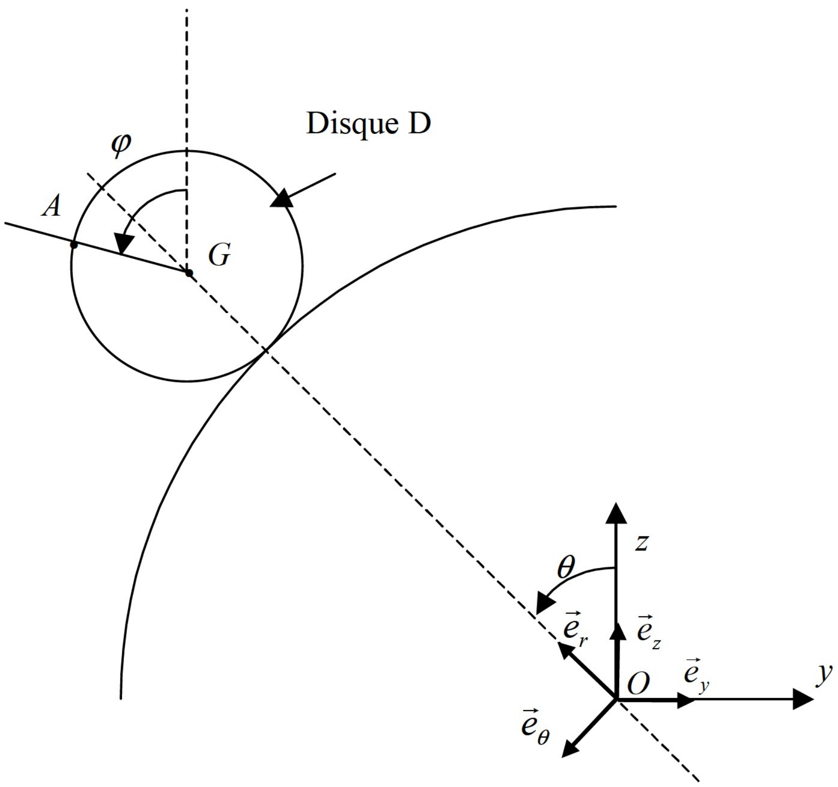
DNS

Sujet

Roue sur un profil cylindrique

Le problème étudie le mouvement plan sur plan d'un disque sur une surface cylindrique, ce mouvement s'effectuant par roulement sans glissement dans une première phase puis avec glissement dans une seconde phase. On se propose d'étudier la continuité ou la discontinuité de l'accélération angulaire lors du passage de la première phase à la seconde phase.

Un disque D homogène de masse m , de rayon r , de centre G , peut rouler dans le plan yOz , sur une surface cylindrique de rayon R , d'axe $(O,\vec{u}_x)$ (voir schéma)



On désigne par $\mathscr{R}$ un repère fixe lié au laboratoire d'axes Ox, Oy, Oz , les vecteurs unitaires associés étant notés $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ ($\vec{u}_z$ vertical ascendant). On définit aussi les vecteurs unitaires

$\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$: $\vec{u}_r$ est selon $\overrightarrow{OG}$ et $\vec{u}_\theta$ se déduit de $\vec{u}_r$ par une rotation $\dfrac{\pi}{2}$ autour de $\vec{u}_x$.

On désigne l'angle entre $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_r$ par θ . Le vecteur vitesse de rotation instantanée du disque dans $\mathscr{R}$ s'écrit $\dfrac{d\varphi}{dt}\vec{u}_x$.

Le coefficient de frottement disque/surface cylindrique est désigné par μ .

On donne: moment d'inertie du disque relativement à l'axe $(G,\vec{u}_x)$ $J=\dfrac{1}{2}m r^2$.

On note $\vec{g}=-g\,\vec{u}_z$ le vecteur accélération due à la pesanteur.

Les conditions initiales du mouvement sont les suivantes: $\theta_{t=0}=\theta_0$ et $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)_{t=0}=0$.

Pour les applications numériques, on prendra:

$r=0{,}10\,m$, $R=0{,}90\,m$, $g=10\,ms^{-2}$, $\mu=0{,}20$, $\theta_0=1\,°$.

I. Première phase

On suppose que le disque roule sans glisser sur la surface cylindrique.

1. Établir la relation de roulement sans glissement liant $\dfrac{d\theta}{dt}$ et $\dfrac{d\varphi}{dt}$.
2. Exprimer l'énergie cinétique du disque dans $\mathscr{R}$, en fonction de m , r , R et $\dfrac{d\theta}{dt}$.
3. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du disque en fonction de m , g , r , R , et θ .
4. Donner l'expression de l'énergie mécanique du disque. Après avoir justifié que cette quantité est constante au cours du mouvement, en déduire une relation donnant $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2$ en fonction de θ , θ_0 , g , r , R .
5. Établir l'expression de $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ en fonction de θ , g , r , R .
6. La réaction de la surface cylindrique sur le disque est notée $\vec{\mathcal{R}}=N\,\vec{u}_r+T\,\vec{u}_\theta$. En utilisant le théorème de la résultante dynamique, établir les expressions donnant T et N en fonction de m , g , r , R , θ , $\dfrac{d\theta}{dt}$, $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$.
7. Établir les expressions de T et N en fonction de m , g , θ_0 et θ .
8. Pour quelle valeur de θ notée θ_1 observe-t-on la fin du mouvement de roulement sans glissement ? Application numérique: calculer θ_1 en degrés.
9. Vérifier que, pour cette valeur, le disque ne s'est pas encore séparé de la surface cylindrique.

10.Déterminer les valeurs numériques de $\dot{\theta}=\dot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}=\ddot{\theta}_1$ à l'instant précédant immédiatement la fin du roulement sans glissement.

II. Deuxième phase

Suite à cette phase de roulement sans glissement, on suppose que le disque va rouler et glisser sur le cylindre. Au cours de cette seconde phase, on admettra que T est négatif.

11.Donner l'expression de T en fonction de μ et de N (supposé positif).

12.En utilisant le théorème du moment cinétique appliqué en G , donner une équation liant $\ddot{\varphi}$, T , r et J .

13.Appliquer le théorème de la résultante dynamique au disque.

14.Établir l'équation différentielle pour la variable θ .

15.Lors de la transition du roulement sans glissement au roulement avec glissement, il y a continuité de θ et $\dot{\theta}$ mais il peut y avoir discontinuité pour $\ddot{\theta}$. Déterminer l'expression littérale de $\ddot{\theta}=\ddot{\theta}_2$ en fonction de g , r , R et θ_1 à l'instant suivant immédiatement le début de la phase de roulement avec glissement. Conclure.

16.On reprend le même calcul mais on suppose cette fois que le coefficient de frottement statique (adhérence) est $\mu=0{,}20$ alors que le coefficient de frottement de glissement (dynamique) est $\mu_d=0{,}15$. La conclusion est-elle la même qu'à la question précédente?

Réponses

1) On désigne par I le point de contact disque – support cylindrique.

$$\vec{v}_{\substack{glissement\\ disque/support}} = \vec{v}(I \in disque) - \underbrace{\vec{v}(I \in support)}_{nul}$$

$$= \vec{v_G} + \vec{\omega}_{disque} \wedge \vec{GI}$$

$$= (R+r)\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{\varphi}\,\vec{u_x} \wedge (-r\,\vec{u_r})$$

$$\boxed{\vec{v}_{glissement} = \left((R+r)\dot{\theta} - r\dot{\varphi}\right)\vec{u_\theta}}$$

Condition de roulement sans glissement :

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{R+r}{r}\,\dot{\theta}}$$

---

2) On utilise le théorème de König :

$$E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2} m (R+r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m r^2 \underbrace{\dot{\varphi}^2}_{(R+r)^2\,\dot{\theta}^2}$$

$$\boxed{E_c = \frac{3}{4} m (R+r)^2 \dot{\theta}^2}$$

---

3) En prenant l'origine des énergies potentielles quand G se trouve sur l'horizontale du point O :

$$\boxed{E_p = m g (R+r) \cos\theta}$$

---

4) On a $\quad \dfrac{dE_c}{dt} = P_{poids} + P_{\vec{R}}$

ou puisque le poids est conservatif

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{\vec{R}}$$

$$= \vec{R}\,\vec{v}_{I\in Disque}$$

En l'absence de glissement, on a (cf 1) $\vec{v}_{I \in Disque} = \vec{0}$

donc $\quad E_m = \text{constante}$

Finalement

$$\boxed{\frac{3}{4} m (R+r)^2 \dot{\theta}^2 + m g (R+r) \cos\theta = E_m}$$

En portant les conditions initiales :

$$\frac{3}{4} m(R+r)^2 \dot\theta^2 + mg(R+r)\cos\theta = mg(R+r)\cos\theta_0$$

d'où

$$\boxed{\dot\theta^2 = \frac{4}{3}\frac{g}{(R+r)}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$$

---

5) On dérive l'intégrale première précédente par rapport au temps :

$$2\ddot\theta\dot\theta = \frac{4}{3}\frac{g}{R+r}\sin\theta\,\dot\theta$$

($\dot\theta = 0$ est une solution parasite qui apparaît quand on travaille par l'énergie)

$$\boxed{\ddot\theta = \frac{2}{3}\frac{g}{R+r}\sin\theta}$$

---

6) On écrit le théorème de la résultante cinétique :

$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$/\vec{u_r} \quad N - mg\cos\theta = -m(R+r)\dot\theta^2$$

$$/\vec{u_\theta} \quad T + mg\sin\theta = m(R+r)\ddot\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned} N &= mg\left(\cos\theta - (R+r)\frac{\dot\theta^2}{g}\right) \\ T &= -mg\left(\sin\theta - (R+r)\frac{\ddot\theta}{g}\right) \end{aligned}}$$

---

7) En remplaçant $\dot\theta^2$ et $\ddot\theta$ par leurs expressions en fonction de θ (cf 4) et 5))

$$\boxed{\begin{aligned} N &= mg\left(\frac{7}{3}\cos\theta - \frac{4}{3}\cos\theta_0\right) \\ T &= -mg\,\frac{1}{3}\sin\theta \end{aligned}}$$

---

8) La loi de Coulomb pour le non glissement indique :

$$\left|\frac{T}{N}\right| \leqslant \mu$$

Il faut donc (en supposant N positif)

$$\boxed{\frac{\sin\theta}{7\cos\theta - 4\cos\theta_0} \leqslant \mu}$$

<u>remarque</u>

Vérifions que cette condition était vérifiée en $t=0$

$$\frac{\sin\theta_0}{3\cos\theta_0} \overset{?}{\leqslant} \mu$$

$$\frac{1}{3}\tan\theta_0 \overset{?}{\leq} \mu$$

$$5{,}8\ 10^{-3} < 0{,}2$$

exact.

La fin du non glissement est pour θ_1 avec

$$\frac{\sin\theta_1}{7\cos\theta_1 - 4\cos\theta_0} = \mu$$

$$\frac{\sin\theta_1}{7\cos\theta_1 - 4\cos(1°)} = 0{,}2$$

Avec le solveur de la machine à calculer on trouve :

$$\boxed{\theta_1 = 26{,}7573\ ° \text{ environ } 26°\,45'}$$

---

9) on doit vérifier que $N(\theta=\theta_1) \geq 0$ (le disque n'a pas décollé)

$$N(\theta_1) = \frac{mg}{3}\left(7\cos\theta_1 - 4\cos\theta_0\right)$$

$$\boxed{N(\theta_1) = \frac{mg}{3}\ \frac{\sin\theta_1}{\mu} > 0}$$

A.N.

$$\frac{N(\theta_1)}{mg} = \frac{1}{3}\ \frac{\sin(26{,}8°)}{0{,}2}$$

$$= 0{,}750$$

---

10) A.N.

$$\dot\theta_1 = \left(\frac{4}{3}\frac{g}{(R+r)}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta_1\right)\right)^{1/2}$$

$$= \left[\frac{4}{3}\ \frac{10}{1}\left(\cos(1°) - \cos(26{,}8°)\right)\right]^{1/2}$$

$$\boxed{\dot\theta_1 = 1{,}19\ \text{rad}\,s^{-1}}$$

$$\ddot\theta_1 = \frac{2}{3}\frac{g}{R+r}\sin\theta_1$$

$$= \frac{2}{3}\ \frac{10}{1}\ \sin(26{,}8°)$$

$$\boxed{\ddot\theta_1 = 3{,}00\ \text{rad}\,s^{-2}}$$

---

11) En cas de glissement, la loi de Coulomb s'écrit

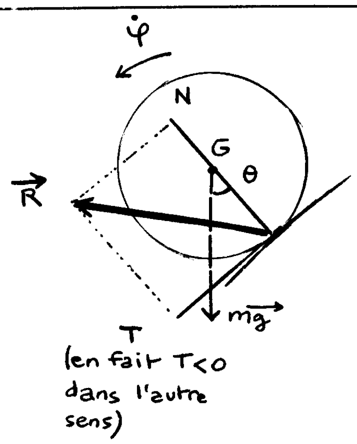
$$\left|\frac{T}{N}\right| = \mu$$

On suppose $T<0$ (ce qui revient à supposer une vitesse de glissement $v_g>0$ puisque $\vec{R}\cdot\vec{v_g} \leq 0$)

$$\boxed{T = -\mu N}$$

---

12)



Th du moment cinétique, dans le référentiel barycentrique, en projection selon Gx

$$-Tr = J\ddot{\varphi}$$

$$\boxed{T = -\frac{J}{r}\ddot{\varphi}}$$

---

13) Th de la résultante cinétique. On retrouve les équations vues en 5)

$$\boxed{\begin{aligned} N &= mg\left(\cos\theta - (R+r)\frac{\dot{\theta}^2}{g}\right) \\ T &= -mg\left(\sin\theta - (R+r)\frac{\ddot{\theta}}{g}\right) \end{aligned}}$$

---

14) Equa diff pour θ

$$\begin{aligned} T &= -mg\left(\sin\theta - (R+r)\frac{\ddot{\theta}}{g}\right) \\ -\mu N &= -mg\left(\sin\theta - (R+r)\frac{\ddot{\theta}}{g}\right) \\ -\mu\, mg\left(\cos\theta - (R+r)\frac{\dot{\theta}^2}{g}\right) &= -mg\left(\sin\theta - (R+r)\frac{\ddot{\theta}}{g}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{(\sin\theta - \mu\cos\theta) = \frac{R+r}{g}\left(\ddot{\theta} - \mu\dot{\theta}^2\right)}$$

---

15) Au début de la deuxième phase l'accélération est $\ddot{\theta}_2$ avec

$$\sin\theta_1 - \mu\cos\theta_1 = \frac{R+r}{g}\left(\ddot{\theta}_2 - \mu\dot{\theta}_1^{\,2}\right)$$
$$= \frac{R+r}{g}\left(\ddot{\theta}_2 - \mu\frac{4}{3}\frac{g}{R+r}(\cos\theta_0 - \cos\theta_1)\right)$$

ce qui après simplifications donne :

$$\boxed{\ddot{\theta}_2 = \frac{2}{3}\frac{g}{R+r}\sin\theta_1 = \ddot{\theta}_1}$$

---

15) $\mu_d < \mu$.

L'équation devient :

$$\sin\theta_1 - \mu_d\cos\theta_1 = \frac{R+r}{g}\left(\ddot{\theta}_2 - \mu_d\dot{\theta}_1^{\,2}\right)$$

ce qui après simplifications donne :

$$\boxed{\ddot{\theta}_2 = \frac{g}{R+r}\sin\theta_1\left(1 - \frac{\mu_d}{3\mu}\right)}$$

d'où une discontinuité

$$\boxed{\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1 = \frac{g}{R+r}\sin\theta_1\left(1 - \frac{\mu_d}{3\mu} - \frac{2}{3}\right)}$$

A.N. $$= \frac{10}{1}\sin(26,89)\left(1 - \frac{0,15}{3\times 0,2} - \frac{2}{3}\right)$$

$$\boxed{\Delta\ddot{\theta} = 0,38 \text{ rad s}^{-2}}$$
