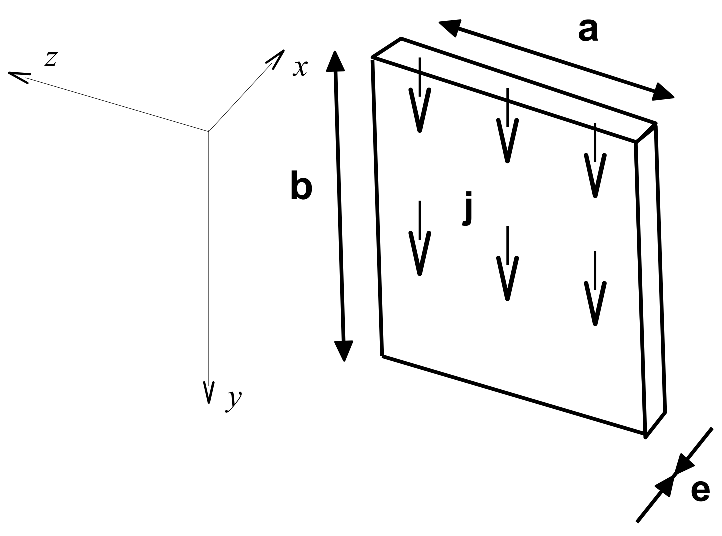
DNS

Sujet

Impédance d'une ligne électrique

I. Préliminaires

On considère une plaque conductrice (conducteur ohmique c'est-à-dire obéissant à la loi d'Ohm : $\vec{j}=\gamma\vec{E}$), de conductivité $\gamma=\frac{1}{\rho}$, ρ désignant la résistivité, d'épaisseur e , de largeur a et de longueur b (voir *figure* 1)



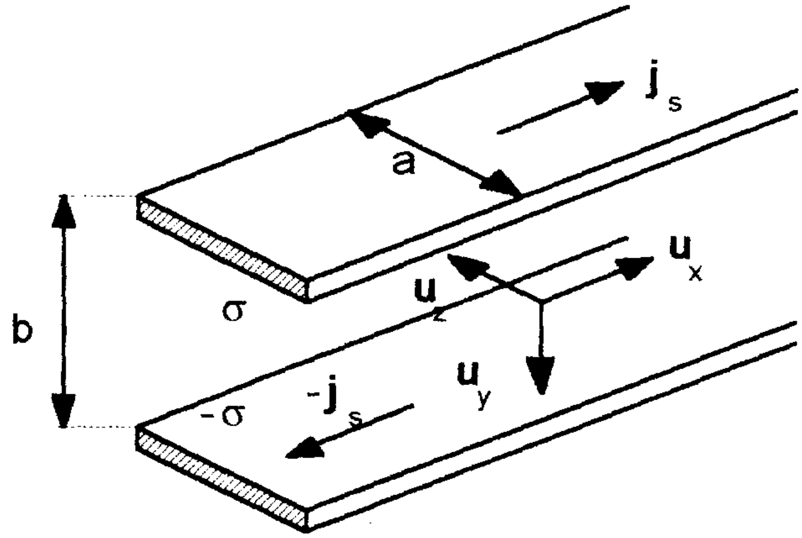
La plaque est traversée par un courant électrique permanent uniforme de densité volumique $\vec{j}=j\,\vec{u}_y$.

1. Déterminer l'intensité I comptée positivement dans le sens de l'axe y .
2. Déterminer la tension U (en convention récepteur par rapport au I précédent).
3. En déduire la loi d'Ohm sous la forme globale: $U=RI$ et donner l'expression de la résistance

R de la plaque en fonction de a , b , e et ρ .

II. Champ électromagnétique dans une ligne électrique à rubans

Une ligne électrique est constituée de deux rubans conducteurs parfaits, de faible épaisseur, de largeur a , distants de b , l'espace entre les rubans étant vide (cf. *figure* 2). Les rubans sont parcourus par des courants de densités surfaciques $\vec{j}_S = j_S(x,t)\ \vec{u}_x$ et $-\vec{j}_S$, et présentent sur leurs faces en regard des densités surfaciques de charges $\sigma(x,t)$ et $-\sigma(x,t)$.



On étudie les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniquement dans l'espace situé entre les rubans et on suppose que ces champs en un point ne dépendant que de l'abscisse x du point considéré et de l'instant t (on néglige donc tout effet de bord).

4. Retrouver à partir des relations de continuité pour les champs à une interface entre deux milieux, les expressions des relations de continuité à la surface d'un conducteur parfait.

5. Exprimer, en fonction des constantes électromagnétiques du vide ε_0 et μ_0 et des densités $\vec{j}_S$ et σ , les champs $\vec{E}(x,t)$ et $\vec{B}(x,t)$ dans l'espace vide entre les rubans.

On considère dans la suite une onde de courant dans la ligne, d'intensité de la forme $\underline{i}(x,t) = I_0 \exp j(\omega t - k x)$ en notation complexe, où k est une constante positive et I_0 une constante réelle.

6. À partir des équations de Maxwell, exprimer deux relations liant $\underline{\sigma}(x,t)$ et $\underline{i}(x,t)$. En déduire la vitesse de phase v_φ de l'onde et vérifier que la structure du champ électromagnétique est celle d'une onde plane progressive dans le vide.

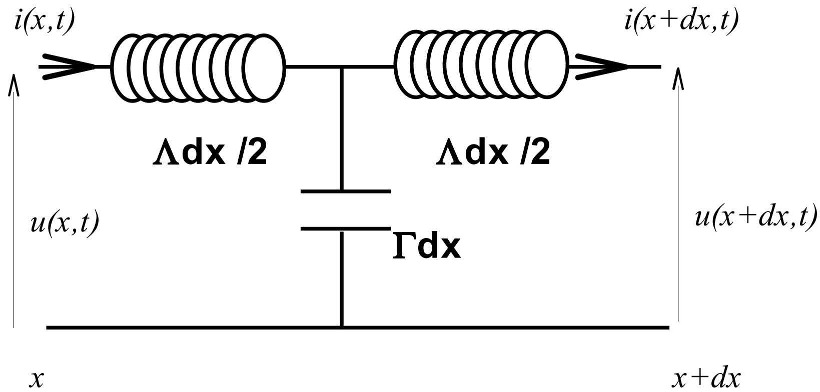
7. Le champ $\vec{E}$ est donné, en régime variable, par la formule $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. On veut déterminer la différence de potentiel ou tension $u(x,t)$ entre les rubans. Justifier que $\vec{A}$ (vrai vecteur) est selon $\vec{u}_x$. En déduire que, en convention récepteur pour la ligne, $u = E\, b$.

III. Modélisation par une ligne à constantes réparties

8. Déterminer l'énergie magnétique $d\,U_B = 1/2\ dL\ i^2$ d'une tranche d'épaisseur dx de la ligne. En déduire le coefficient d'inductance propre linéique Λ de la ligne en fonction des grandeurs connues μ_0 , a , b .

9. Déterminer l'énergie $d\,U_E = 1/2\ \dfrac{dQ^2}{dC}$ (dQ charge élémentaire du condensateur élémentaire de longueur dx) associée au champ électrique $\vec{E}$ de la même tranche d'épaisseur dx . En déduire la capacité linéique Γ de la ligne en fonction des grandeurs connues ε_0 , a , b .

Une ligne bifilaire non résistive quelconque peut être modélisée de la façon représentée par le schéma (voir *figure* 3).



10. Établir l'équation de propagation relative au courant i et en déduire la vitesse de propagation en fonction de Λ et Γ .

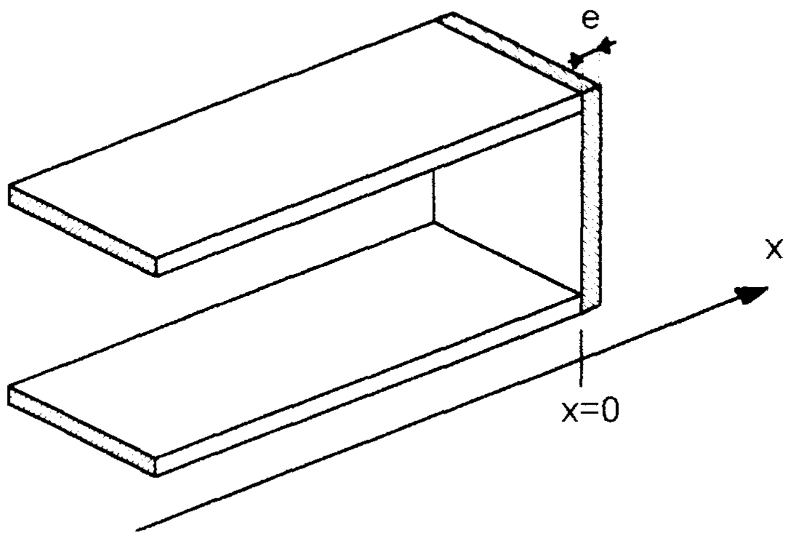
11. Montrer que le résultat pour la vitesse de phase est en accord avec le résultat obtenu plus haut pour la ligne à rubans.

12. On définit l'impédance $\underline{Z}(x,t)$ en (x,t) d'une ligne bifilaire par $\underline{Z}(x,t) = \dfrac{\underline{u}(x,t)}{\underline{i}(x,t)}$. Montrer que dans le cas de la ligne infinie vers les x positifs, cette impédance appelée impédance caractéristique est une constante. Quelle est la nature (réelle, complexe, imaginaire) de cette impédance caractéristique. Montrer qu'elle s'exprime en fonction du rapport entre Λ et Γ .

13. On place à l'extrémité d'une ligne finie son impédance caractéristique. Cette impédance placée à l'extrémité de la ligne aura la propriété de ne pas réfléchir l'onde incidente. Commenter.

IV. Réalisation de l'impédance caractéristique

On désire fermer la ligne étudiée sur son impédance Z_C en introduisant, entre les rubans, à l'abscisse $x=0$, une plaque conductrice de résistivité ρ , d'épaisseur e , de largeur a et de longueur b (cf. *figure* 4).



On supposera dans cette question que l'épaisseur e est suffisamment faible pour qu'on puisse admettre que le courant traversant la plaque soit réparti de manière uniforme.

14.Montrer que la résistance R_C d'un carré de la plaque, de côté quelconque, s'exprime en fonction des seules constantes ε_0 et μ_0 du vide. On appellera impédance adaptée au vide cette grandeur R_C dont on donnera la valeur numérique.

15.On veut réaliser cette plaque avec:

- du cuivre de résistivité $\rho=1{,}7.10^{-8}\,\Omega.m$

- du carbone de résistivité $\rho=3{,}5.10^{-3}\,\Omega.m$

Quel devrait être, dans chaque cas, l'épaisseur e de la plaque? Commenter.

16.Déterminer le vecteur de Poynting associé à l'onde électromagnétique entre les rubans. Quelle est la puissance moyenne transportée par l'onde ? Que se passe-t-il quand l'onde arrive en $x=0$, la ligne étant fermée par la plaque d'impédance Z_C ?

Réponses

1)
$$I = \iint_{\substack{\text{section}\\ ae}} \vec{j}\,\vec{dS} \qquad \text{avec } \vec{j} = j\,\vec{u_y}, \quad \vec{dS} = dS\,\vec{u_y}$$

$$= \iint_{\substack{\text{section}\\ ae}} j\,dS$$

$$\boxed{I = j\,a\,e}$$

---

2)
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V \quad \text{donc :}$$

$$dV = -\vec{E}\,\vec{dl}$$

$$= -\rho\,\vec{j}\,\vec{dl}$$

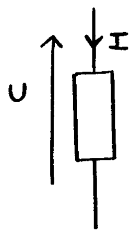
$$\text{avec } \vec{j} = j\,\vec{u_y}, \quad \vec{dl} = dx\,\vec{u_x} + dy\,\vec{u_y} + dz\,\vec{u_z}$$

$$= -\rho\,j\,dy$$

On intègre entre les deux faces d'entrée et de sortie

$$\int_{V(y=0)}^{V(y=b)} dV = -\rho j \int_{y=0}^{y=b} dy$$

$$V_{(y=b)} - V_{(y=0)} = -\rho j b$$



avec $U = V_{(y=0)} - V_{(y=b)}$

$$\boxed{U = \rho\,j\,b}$$

---

3) Finalement

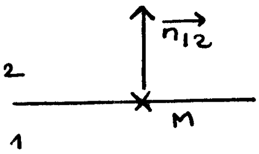
$\frac{U}{I}$ ne dépend que du matériau et de ses dimensions

$$\boxed{\frac{U}{I} = \rho\,\frac{b}{ae} = R}$$

on retrouve l'expression connue $\left(R = \frac{1}{\gamma}\frac{\ell}{S}\right)$

---

4)



Pour les champs en M, au voisinage de la surface de séparation

$$\overrightarrow{E_2}(M,t) - \overrightarrow{E_1}(M,t) = \frac{\sigma(M,t)}{\varepsilon_0}\,\overrightarrow{n_{12}}$$
$$\overrightarrow{B_2}(M,t) - \overrightarrow{B_1}(M,t) = \mu_0\,\overrightarrow{j_S}(M,t) \wedge \overrightarrow{n_{12}}$$

Si (1) est le métal parfait, en ne tenant compte que de l'onde, (champs nuls) et en notant $\overrightarrow{n_{ext}}$ la normale vers l'extérieur du métal :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(M,t) &= \frac{\sigma(M,t)}{\varepsilon_0}\,\overrightarrow{n_{ext}}\\ \vec{B}(M,t) &= \mu_0\,\overrightarrow{j_S}(M,t) \wedge \overrightarrow{n_{ext}}\end{aligned}}$$

---

5) En considérant le ruban supérieur :

avec
$$\sigma(M,t) = \sigma(x,t)$$
$$\overrightarrow{j_S}(M,t) = j_S(x,t)\,\overrightarrow{u_x}$$
$$\overrightarrow{n_{ext}} = +\,\overrightarrow{u_y}$$

et en tenant compte que les champs obtenus au voisinage du ruban sont valables dans le plan x $\forall y$ et z entre les deux rubans, on obtient :

$$\boxed{\vec{E}(x,t) = \frac{\sigma(x,t)}{\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_y}}$$
$$\vec{B}(x,t) = \mu_0\,j_S(x,t)\,\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y}$$
$$\boxed{\vec{B}(x,t) = \mu_0\,j_S(x,t)\,\overrightarrow{u_z}}$$

remarque :

On pouvait utiliser le ruban inférieur
avec $\sigma \rightarrow -\sigma$ $\quad \overrightarrow{j_S} \rightarrow -\overrightarrow{j_S}$ $\quad \overrightarrow{n_{ext}} \rightarrow -\overrightarrow{n_{ext}}$
on retrouvait bien les mêmes résultats.

---

6) → Toutes les grandeurs seront en $\exp j(\omega t - kx)$ d'où

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow j\omega\\ \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow -jk\end{aligned}}$$

→ On écrit l'équation de <u>Maxwell - Faraday</u>

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ (\vec{u_x},\vec{u_y},\vec{u_z}) \end{array}\left|\begin{array}{c} -jk \\ 0 \\ 0 \end{array}\right|\begin{array}{c} 0 \\ \frac{\underline{\sigma}}{\varepsilon_0} \\ 0 \end{array} = -j\omega\,\mu_0\,\underline{j_s}\,\vec{u_z}$$

$$-jk\,\frac{\underline{\sigma}}{\varepsilon_0} = -j\omega\,\mu_0\,\underline{j_s}$$

$$\boxed{k\,\underline{\sigma} = \varepsilon_0\mu_0\omega\,\underline{j_s}}$$

On écrit l'équation de <u>Maxwell - Ampère</u> (dans le vide)

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{B}} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{B}} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

$$\left|\begin{array}{c} -jk \\ 0 \\ 0 \end{array}\right|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \mu_0\underline{j_s} \end{array} = j\omega\,\varepsilon_0\mu_0\,\frac{\underline{\sigma}}{\varepsilon_0}\,\vec{u_y}$$

$$jk\,\mu_0\,\underline{j_s} = j\omega\,\mu_0\,\underline{\sigma}$$

$$\boxed{k\,\underline{j_s} = \omega\,\underline{\sigma}}$$

→ On veut, en réalité faire intervenir l'intensité i

si le courant était volumique, on aurait

$$i = \iint \vec{j}\,dS\,(\vec{u_x})$$

Ici le courant est surfacique d'où :

$$i = \int \vec{j_s}\,dl\,(\vec{u_x})$$

$$\boxed{\underline{i} = \underline{j_s}\,a}$$

Les relations demandées sont donc :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} k\,a\,\underline{\sigma} & = & \varepsilon_0\mu_0\,\omega\,\underline{i} \\ k\,\underline{i} & = & \omega\,a\,\underline{\sigma} \end{array}}$$

→ Vitesse de phase

Les grandeurs sont en $\exp j(\omega t - kx)$ d'où la vitesse de phase est

$$v_\varphi = \frac{dx}{dt} \quad \text{avec} \quad \omega\, dt - k\, dx = 0$$

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k}}$$

Avec les deux équations précédentes, on obtient :

$$K\, a\, \underline{\sigma} = \varepsilon_0 \mu_0\, \omega\, \underline{i}$$
$$= \varepsilon_0 \mu_0\, \omega\, \frac{\omega\, a\, \underline{\sigma}}{k}$$

donc :

$$K^2 = \varepsilon_0 \mu_0\, \omega^2$$
$$= \frac{1}{c^2}\, \omega^2$$

$$\boxed{v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c}$$

→ Structure de l'onde :

Finalement :

$$\boxed{a\, \underline{\sigma} = \frac{\underline{i}}{c}}$$

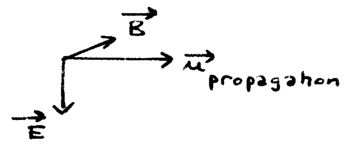
$$\underline{\vec{E}} = \frac{\underline{\sigma}}{\varepsilon_0}\, \overrightarrow{u_y}$$
$$= \frac{\underline{i}}{a\, c\, \varepsilon_0}\, \overrightarrow{u_y}$$

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \frac{I_0}{a}\, \frac{1}{\varepsilon_0 c}\, \exp j(\omega t - kx)\, \overrightarrow{u_y}}$$

$$\underline{\vec{B}} = \mu_0\, \underline{j_s}\, \overrightarrow{u_z}$$
$$= \mu_0\, \frac{\underline{i}}{a}\, \overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{I_0}{a}\, \mu_0\, \exp j(\omega t - kx)\, \overrightarrow{u_z}}$$

Il s'agit bien d'une onde plane (cf surfaces équiphases planes : $x =$ cste). Pour une onde plane progressive dans le vide, on doit vérifier :



$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{1}{c}(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{E})}$$ soit en complexes :

$$\mu_0 \frac{i}{a} \overrightarrow{u_z} \stackrel{?}{=} \frac{1}{c}(\overrightarrow{u_x} \wedge \frac{i}{a c \varepsilon_0} \overrightarrow{u_y})$$

$$\mu_0 \stackrel{?}{=} \frac{1}{c^2 \varepsilon_0}$$

La structure est bien celle d'une OPP.

---

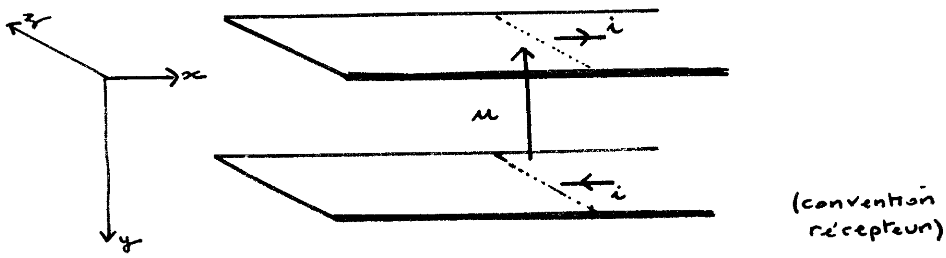
7)
$$\overrightarrow{grad}\, V = -\overrightarrow{E} - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

$$dV = -\overrightarrow{E}\, \overrightarrow{dl} - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\, \overrightarrow{dl}$$

Pour trouver la tension :

$$u_{(x,t)} = V(x, t, \text{plaque du haut}) - V(x, t, \text{plaque du bas})$$

on doit intégrer <u>à x constant</u> le dV précédent donc
$\overrightarrow{dl} = dy\, \overrightarrow{u_y} + dz\, \overrightarrow{u_z}$



- donc $\overrightarrow{E}$ étant selon $\overrightarrow{u_y}$

$$-\overrightarrow{E}\, \overrightarrow{dl} \rightarrow -E\, dy$$

- donc le potentiel vecteur ayant la direction des courants soit $\overrightarrow{A}$ selon $\overrightarrow{u_x}$ (et pas de $\overrightarrow{dl}$ selon $\overrightarrow{u_x}$)

$$-\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\, \overrightarrow{dl} \rightarrow 0$$

<u>remarque : symétries</u>

→ Puisque les effets de bords sont négligés, non seulement les plans sont infinis selon x mais peuvent aussi être considérés comme illimités selon z.

Alors :

le plan $(M, \vec{u_x}, \vec{u_y})$ est <u>un plan de symétrie</u>

(pour les charges, pour les courants)

Les "vrais" vecteurs sont tous dans ce plan $\vec{u_x}\ \vec{u_y}$ passant par M.

Les "faux" vecteurs sont tous selon $\vec{u_z}$

→ Pour démontrer que $\vec{A}$, vrai vecteur, est selon $\vec{u_x}$ (sans se contenter de $\vec{A}$ est selon $\vec{z}$), <u>il faudrait aller plus loin</u> ... (Maxwell, Relation de jauge)

finalement : plaque haut $x, y_{haut} = y_{bas} - b$

$$\int_{\text{plaque bas}}^{\text{plaque haut}} dV = -\int_{x, y_{bas}}^{x, y_{haut}} E \, dy$$

$$\boxed{u(x,t) = E(x,t) \; b}$$

---

8)

$$dU_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} d\tau$$

Puisque B ne dépend ni de y, ni de z

$$dU_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} a b \, dx \qquad \text{avec} \qquad B = \frac{\mu_0 \, i}{a}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\mu_0 \frac{b}{a} dx}_{dL = \Lambda dx} i^2$$

$$\boxed{\Lambda_{/Hm^{-1}} = \mu_0 \frac{b}{a}}$$

---

9)

$$\begin{aligned} dU_E &= \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E^2\,d\tau \\ &= \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E^2\,ab\,dx \qquad \text{avec } E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}\,ab\,dx \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{avec } dq = \sigma\,a\,dx \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{(dq)^2}{\varepsilon_0 \frac{a}{b}\,dx} \end{aligned}$$

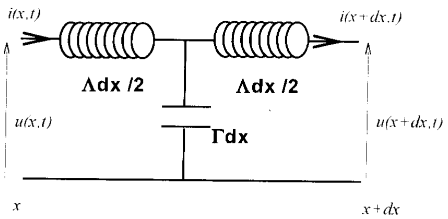
donc :

$$dC = \underbrace{\varepsilon_0\,\frac{a}{b}\,dx}_{\Gamma\,dx}$$

$$\boxed{\Gamma_{/F.m^{-1}} = \varepsilon_0\,\frac{a}{b}}$$

---

10)



bobines :

- $$u(x,t) - u(x+dx,t) = \frac{\Lambda\,dx}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}i(x,t) + \frac{\Lambda\,dx}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}i(x+\cancel{dx},t)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\,dx = \Lambda\,dx\,\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\boxed{-\frac{\partial u}{\partial x} = \Lambda\,\frac{\partial i}{\partial t}}$$

condensateur :

- $$i(x,t) - i(x+dx,t) = \Gamma\,dx\,\frac{\partial}{\partial t}u\left(x+\cancel{\frac{dx}{2}},t\right)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x}\,dx = \Gamma\,dx\,\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\boxed{-\frac{\partial i}{\partial x} = \Gamma\,\frac{\partial u}{\partial t}}$$

Pour obtenir l'équation en i,

- on dérive la première par rapport à t : $-\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$
- " la deuxième " x : $-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$

finalement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \Lambda\Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0}$$

On retrouve l'équation de propagation de d'Alembert avec une vitesse donnée par

$$\frac{1}{v^2} = \Lambda\Gamma$$

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}}$$

---

11) On reporte les expressions pour la ligne à rubans :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \frac{b}{a} \varepsilon_0 \frac{a}{b}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

on retrouve effectivement :

$$\boxed{v = c}$$

---

12) La ligne est infinie, l'onde se propage vers les x croissants (pas d'onde réfléchie)

$$\boxed{\underline{i} = I_0 \exp j(\omega t - kx)} \qquad (\omega = kc)$$

on cherche $\underline{u}$ avec par exemple :

$$-\frac{\partial \underline{i}}{\partial x} = \Gamma \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}$$

$$-(-jk\,\underline{i}) = \Gamma\, j\omega\, \underline{u}$$

$$\underline{u} = \frac{k\,\underline{i}}{\omega\,\Gamma}$$

$$= \frac{1}{c\,\Gamma}\,\underline{i}$$

$$\boxed{\underline{u} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}\ I_0 \exp j(\omega t - kx)}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

$$\boxed{\underline{Z} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_c}$$

Cette impédance est un réel, constant $\forall x, t$.
La ligne infinie est donc vue comme une résistance Z_c

---

13) → A l'extrémité, puisque on a "adapté" la ligne en la terminant par Z_c, on aura

$$\left(\frac{\underline{u}}{\underline{i}}\right)_{\text{extrémité}} = Z_c$$

comme si la ligne se poursuivait jusqu'à l'infini.

→ En tout autre point, en supposant l'absence d'onde réfléchie on aura aussi (cf une seule onde incidente)

$$\left(\frac{\underline{u}}{\underline{i}}\right) = Z_c$$

→ Tout se passerait comme pour une ligne infinie en tout point.
Ces résultats sont cohérents.

---

14) Si le courant est uniforme

$$R_{\text{plaque}} = \frac{\rho}{e}\frac{b}{a} \qquad \text{(début du problème)}$$

et

$$R_{\text{plaque}} = Z_c$$
$$= \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$
$$= \sqrt{\frac{\mu_0 \frac{b}{a}}{\varepsilon_0 \frac{a}{b}}}$$

$$\boxed{R_{\text{plaque}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\ \frac{b}{a}}$$

En comparant les deux expressions, la matière dont est faite cette plaque doit être telle que :

$$\frac{\rho}{e} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

Enfin, un carré de cette plaque a pour résistance

$$R_C = \frac{\rho}{e}$$

$$\boxed{R_C = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}$$

(impédance adaptée au vide)

A.N.

$$\approx \sqrt{\frac{4\pi\ 10^{-7}}{1/36\pi\ 10^{9}}}$$

$$= \sqrt{4 \times 36\ \pi^2\ 10^2}$$

$$= 12 \times \pi \times 10$$

$$\boxed{R_C = 377\ \Omega}$$

---

15) A.N. $e = \rho / R_C$

cuivre

$$= 1{,}7\ 10^{-8} / 377$$

$$\boxed{e_{\text{cuivre}} = 4{,}5\ 10^{-11}\ m}$$

(irréalisable < rayon d'un atome)

carbone

$$e = 3{,}5\ 10^{-3} / 377$$

$$\boxed{e_{\text{carbone}} = 9{,}3\ \mu m}$$

(réalisable par dépôt de graphite pulvérisé sur un support isolant)

---

16)

$$\vec{E} = \frac{I_0}{a\varepsilon_0 c} \cos(\omega t - kx)\ \overrightarrow{u_y}$$

$$\vec{B} = \frac{I_0}{a} \mu_0 \cos(\omega t - kx)\ \overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = \frac{I_0^2}{a^2 \varepsilon_0 c} \cos^2(\omega t - kx)\ \overrightarrow{u_x}}$$

$$\langle \overrightarrow{\Pi} \rangle = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\ \frac{I_0^2}{2}\ \frac{1}{a^2}\ \overrightarrow{u_x}$$

La puissance moyenne transportée par l'onde est :

$$\langle P \rangle = \langle \overrightarrow{\Pi} \rangle\ a b\ \overrightarrow{u_x}$$

$$\boxed{\langle P \rangle = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\ \frac{b}{a}\ \frac{I_0^2}{2}}$$

quand l'onde arrive en $x=0$, la ligne étant fermée sur Z_c, il n'y a pas d'onde réfléchie. L'énergie ne pouvant continuer à progresser (ce qui serait le cas d'une ligne infinie) elle doit donc être absorbée. Le courant passe dans la plaque et donne lieu à de l'effet Joule.

$$P_{Joule} = R\ I_{eff}^2$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{b}{a}\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Effectivement, on trouve :

$$\boxed{P_{Joule} = \langle P \rangle}$$