DS Sciences Physiques MathSpé

calculatrice: autorisée

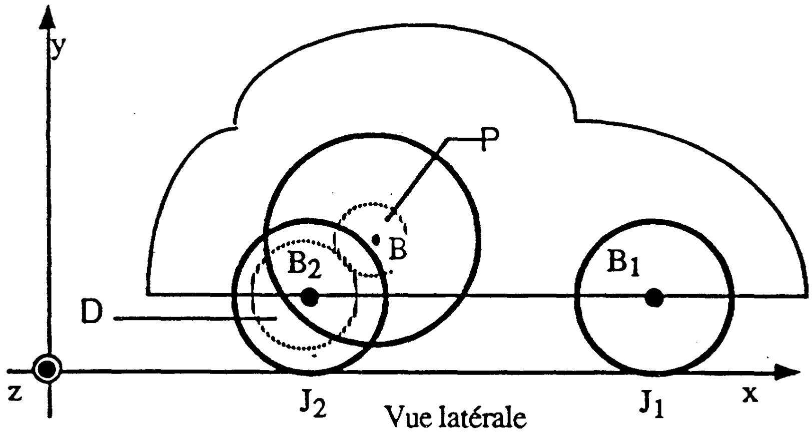
durée: 4 heures

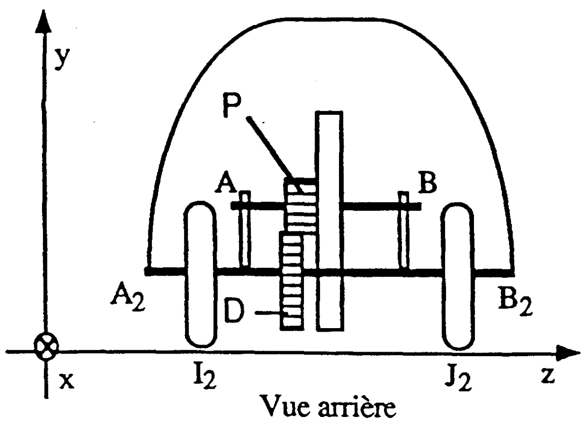
Sujet

Jouets

I. Voiture avec volant d'inertie réservoir d'énergie cinétique

Un jouet ayant la forme d'une petite voiture est constitué d'une "caisse" de masse m, de centre d'inertie G_c, solidaire de deux axes $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$ de direction $\vec{u}_z$. Sur chacun de ces deux axes, pouvant tourner sans frottement, sont fixées deux roues de rayon r. Les roues sont en contact avec le sol respectivement en I_1 et J_1 pour le train avant, I_2 et J_2 pour le train arrière. Par ailleurs l'axe arrière $A_2 B_2$ est solidaire d'une roue dentée D comportant $2n$ dents, entraînée par un pignon P comportant n dents lui même solidaire de l'axe AB d'un disque homogène de masse M de rayon R et de centre d'inertie C.





Dans tout le problème:

Le repère $Oxyz$, noté $\mathcal{R}$, est Galiléen et $\vec{g} = -g\vec{u}_y$ désigne l'accélération de la pesanteur.

On néglige la masse des roues et des engrenages.

Le plan médiateur longitudinal du véhicule est un plan de symétrie et le véhicule se déplace suivant l'axe horizontal Ox , ce qui permet d'écrire les actions de contact du sol sur les roues: en I_1 $\vec{R}_1 = T_1 \vec{u}_x + N_1 \vec{u}_y$ (idem en J_1) et en I_2 $\vec{R}_2 = T_2 \vec{u}_x + N_2 \vec{u}_y$ (idem en J_2).

Les seuls frottements pris en compte sont ceux de l'axe AB sur ses paliers qui se réduisent à un couple de moment $\vec{\Gamma} = -\Gamma \vec{u}_z$ constant, appliqué au disque et bien sur, les frottements des roues sur le sol.

Les caractéristiques géométriques sont définies par les vecteurs:

$\overrightarrow{CI_1} = 3a\,\vec{u}_x - b\,\vec{u}_y - c\,\vec{u}_z$;

$\overrightarrow{CJ_1} = 3a\,\vec{u}_x - b\,\vec{u}_y + c\,\vec{u}_z$;

$\overrightarrow{CI_2} = -a\,\vec{u}_x - b\,\vec{u}_y - c\,\vec{u}_z$;

$\overrightarrow{CJ_2} = -a\,\vec{u}_x - b\,\vec{u}_y + c\,\vec{u}_z$

et $\overrightarrow{CG_c} = \dfrac{a}{2}\vec{u}_x$

avec b choisi tel que $r \times b = R^2$.

Les applications numériques seront calculées, quand elle sont demandées, avec les valeurs suivantes:

$m = 10\,g$; $M = 30\,g$; $r = 10\,mm$; $R = 15\,mm$; $g = 9{,}81\,m\,s^{-2}$.

A. Préliminaire

1. Le disque, d'épaisseur négligeable, tourne autour de son axe AB fixe dans $\mathcal{R}$. Montrer que le moment cinétique, dans $\mathcal{R}$, du disque au point C s'écrit $\vec{\sigma}_{disque}(C) = J\,\vec{\omega}_{disque}$ où J désigne le moment d'inertie du disque par rapport à son axe AB et $\vec{\omega}_{disque} = \omega_{disque}\vec{u}_z$ le vecteur rotation du disque dans $\mathcal{R}$. On donne: $J = 1/2\,M\,R^2$. Faire l'application numérique pour J .

B. Phase 1

Le jouet, tenu à la main, est posé sur le sol à l'instant $t=0$ et poussé, vers l'avant, d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré lui faisant parcourir la distance $d=50$ cm en un temps $t_1 = 2\,s$. Pendant la phase 1 le roulement des roues sur le sol se fait sans glissement.

A l'instant $t = t_1$ le jouet est instantanément relevé. A partir de $t = t_1$ le jouet est maintenu immobile au dessus du sol.

On posera $\vec{\omega}_{roue} = \omega_{roue}\vec{u}_z$.

2. Déterminer la vitesse linéaire v_1 du jouet juste avant qu'on le relève. Réponse littérale puis application numérique.

3. Déterminer à l'instant t_1 , le jouet étant relevé, l'expression du vecteur rotation $\vec{\omega}_{roue}$ d'une roue arrière autour de son axe en fonction de r , d et t_1 . Faire l'application numérique.

4. Déterminer $\vec{\omega}_{disque}$ en t_1 . Faire l'application numérique.

5. Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}$ du jouet dans $\mathcal{R}$ en t_1 , le jouet étant relevé. Formule littérale et application numérique (préciser l'unité). Le résultat dépend-il du point de calcul. Justifier la réponse avec soin.

6. Déterminer l'énergie cinétique E_{cin} du jouet dans $\mathcal{R}$ en t_1 ,le jouet étant relevé. Formule littérale et application numérique.

C. Phase 2

Le jouet est maintenu immobile au dessus du sol. Le disque s'immobilise. à l'instant t_2 tel que $t_2-t_1=6\,s$.

7. Énoncer le théorème de la puissance cinétique.

8. Appliquer le théorème de la puissance cinétique au jouet au cours de cette deuxième phase. Quel est le théorème ici retrouvé. En déduire l'expression de Γ en fonction de ω_{disque} , J , t_1 , t_2 . Faire l'application numérique.

D. Phase 3

On réitère la phase 1 et à l'issue de la phase 1, c'est à dire à l'instant t_1 ,le jouet n'est plus soulevé mais lâché et se déplace donc alors librement sur le sol en ligne droite.

1) Distance parcourue

9. Dans l'hypothèse où les roues roulent sans glisser, en utilisant le théorème de la puissance cinétique, déterminer l'équation différentielle satisfaite par l'abscisse x du centre d'inertie du véhicule. En déduire que le jouet prend une accélération constante $\ddot{x}$ ($\ddot{x}<0$) que l'on exprimera en fonction de J , r , M , m et Γ . Faire l'application numérique.

10. Déterminer, en fonction de $\ddot{x}$ et de la vitesse v_1 du jouet à l'instant t_1 , la distance L parcourue par le jouet pendant cette phase 3. Faire l'application numérique.

2) Étude non énergétique

On se propose de retrouver le résultat de l'étude énergétique pour $\ddot{x}$, dans le cas du non glissement, par une autre méthode.

11. Soit G le centre de masse du jouet. Déterminer l'expression de $\overrightarrow{CG}$.

12. Écrire le théorème du centre de masse au jouet dans le référentiel $\mathcal{R}$.

13. Écrire le théorème du moment cinétique au jouet dans le référentiel barycentrique associé au jouet en G .

14. Écrire le théorème du moment cinétique, dans son référentiel barycentrique, en projection sur son axe, au système constitué du train avant et des deux roues avant. Que peut-on en déduire concernant la valeur de T_1 .

15. En plus des actions déjà décrites précédemment, on suppose au niveau du contact entre le pignon P et la roue dentée D que la roue dentée exerce sur le pignon (et l'axe du disque) un couple de moment $\vec{\Gamma}_{D\rightarrow P}=\Gamma_{D\rightarrow P}\,\vec{u}_z$. De même le pignon exerce sur la roue dentée (et l'axe des roues arrières) le couple $\vec{\Gamma}_{P\rightarrow D}=\Gamma_{P\rightarrow D}\vec{u}_z$. On a de plus $\Gamma_{D\rightarrow P}\omega_{disque}+\Gamma_{P\rightarrow D}\omega_{roue}=0$. Commenter la signification physique de cette relation. Écrire le théorème du moment cinétique en projection

au système {train arrière $A_2 B_2$ - roues arrières - roue dentée D }. Idem pour le système {axe AB - pignon P - disque D }. En déduire, avec précision, la relation: $T_2 + \frac{\Gamma}{r} = -2\frac{J}{r^2}\ddot{x}$.

16.Résoudre pour retrouver $\ddot{x}$ dans le cas du non glissement.

3) Vérification des hypothèses

17.Exprimer, en utilisant les résultats des questions 12, 13, en fonction de m , M , g , $\ddot{x}$ et de $\beta = \frac{a}{b}$, les composantes N_1 et N_2 . On rappelle que b est choisi tel que $r \times b = R^2$.

18.Montrer que si l'hypothèse du roulement sans glissement est vérifiée à l'instant t_1 c'est-à dire au début de la phase 3, elle le sera alors pendant toute la phase 3.

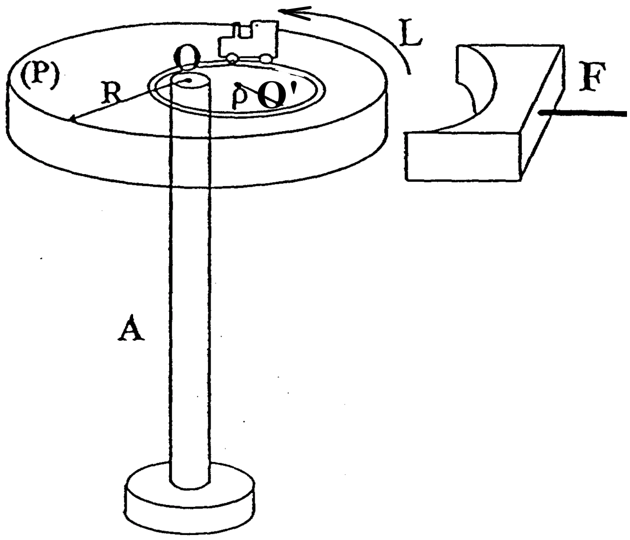
19.Soit f le coefficient de frottement (encore appelé facteur de frottement) des roues sur le sol. Monter que l'hypothèse du roulement sans glissement impose une condition sur $\ddot{x}$ que l'on précisera.

II. Train électrique

Un plateau P plan, horizontal, circulaire de centre O , de rayon R , est mobile sans frottements, autour d'un axe A vertical , passant par O (le vecteur unitaire de cet axe $\vec{u}_z$ est dirigé vers le haut). On désigne par I le moment d'inertie de P par rapport à l'axe A . La vecteur vitesse angulaire éventuel du plateau autour de son axe sera désigné par $\vec{\Omega}=\Omega\,\vec{u}_z$.

Sur le plateau P , on dispose une voie ferrée miniature circulaire, C , de centre O' et de rayon ρ . C peut être placée de différentes manières sur P , mais une fois qu'est adoptée une certaine disposition de C sur le plateau, C est rigidement maintenue sur celui-ci.

La distance éventuelle entre O et O' est notée a .



Sur C peuvent se mouvoir, dans le sens giratoire indiqué sur la figure, soit une, soit un ensemble de n petites locomotives électriques de masse m qui assurent un recouvrement considéré sans lacune de la voie ferrée miniature C ; on pourra supposer qu'elles fonctionnement sur piles incorporées et que la mise en marche et l'arrêt de leur moteur sont assurés par télécommande, ce qui exclut toute action mécanique perturbatrice telle que celles qui pourraient résulter de la présence de fils d'alimentation ou de commande. Lorsque leurs moteurs fonctionnent les locomotives ont une vitesse constante sur C . Cette vitesse linéaire d'une locomotive par rapport au rail qui la guide, constante dès que la locomotive est en marche, est notée $v=\|\vec{v}\|$.

On néglige donc, pour simplifier, la durée de la phase transitoire pour les locomotives, tant lors de la mise en mouvement des locomotives que lors de leur arrêt.

On supposera, dans la suite, qu'est toujours valable l'inégalité: $I \gg n\,m\,R^2$.

Pour chaque question, on envisage en général

a)une étude qualitative

b)puis un calcul rigoureux sans utiliser l'approximation précédente $I \gg n\,m\,R^2$

c)puis une réponse tenant compte du calcul approché.

A. Préliminaire

1. On considère un système qui peut tourner autour d'un axe A vertical fixe. Ce système est soumis uniquement aux poids des différentes parties du système (ici: le plateau, les locomotives) et aux actions correspondant à la liaison avec l' axe. Montrer qu'en 1'absence de frottement sur l'axe du système (la liaison est parfaite), le moment cinétique du système par rapport à 1'axe est conservé. On commencera par démontrer le théorème du moment cinétique en un point fixe pour un système puis le théorème du moment cinétique en projection sur un axe fixe.

B. Voie centrée sur le plateau.

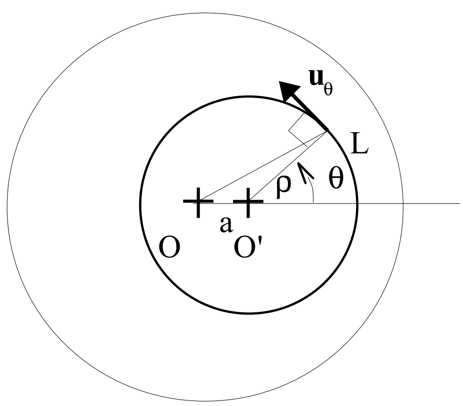
Le centre O' de la voie C est confondu avec le centre O du plateau P. Une seule locomotive L est placée sur C. Initialement, P est immobile par rapport au repère du laboratoire $\mathcal{R}$ (supposé galiléen), et L est immobile par rapport à C. La locomotive est assimilée à un point matériel de masse m.

2. On met L en marche sur C .On admet que la vitesse de la locomotive vaut instantanément v ; montrer que le plateau tourne autour de son axe. Déterminer Ω en fonction de m, I, ρ et v. On considérera le système: plateau+rail et locomotive.
3. Un frein F, agissant de l'extérieur bloque P, L continuant de tourner sur C. On relâche F. Qu'observe-t-on?
4. On arrête alors le moteur de L. Qu'observe-t-on? Exprimer le résultat en fonction des grandeurs de l'énoncé.
5. Dans le cas de cette dernière expérience, étudier la conservation de l'énergie et commenter le résultat (calcul sans approximation puis résultat avec approximation).
6. On dispose sur C une file de n locomotives identiques qui assurent un recouvrement sans lacune de la voie (on modélise par une distribution de masse continue et homogène sur la circonférence C). On reprend l'ensemble des expériences de la première partie. Quel est le changement dans le comportement du système?

C. Voie excentrée sur le plateau

C est excentrée par rapport à P, mais O reste à l'intérieur de C.

7. Une seule locomotive L est placée sur C. Elle est initialement immobile par rapport à la voie, et le plateau P est lui-même immobile par rapport au repère terrestre. Au départ O, O' et L sont alignés dans cet ordre. On lance alors L sur C.



Qu'observe-t-on? Prévoir qualitativement puis déterminer l'expression de Ω en fonction du temps et des données.

8. C est couverte continûment par n locomotives, on reprend l'expérience précédente. Le comportement du système est-il qualitativement modifié? Déterminer l'expression de Ω .

D. Voie très excentrée

C est encore plus excentrée par rapport à P , si bien que O passe à l'extérieur de C .

9. On reprend l'expérience de la $question\,7$. Qu'observe-t-on? Préciser les points intéressants sur C .

10. On reprend l'expérience de la $question\,8$. Qu'observe-t-on?

E. Frottements

11. On revient aux conditions de la $question\,2$, mais de légers frottements agissent maintenant sur l'axe A du plateau P . Partant de l'immobilité de la locomotive et du plateau, on lance la locomotive; quand un régime de croisière a été atteint, on arrête le moteur de la locomotive. Qu'observe-t-on?

Diagramme liquide-vapeur eau-éthanol

En vue d'étudier la séparation eau-éthanol par distillation fractionnée, le diagramme binaire isobare liquide-vapeur est représenté (voir *Figure*) sous une pression $P°=1\,bar$, avec en abscisse la fraction molaire en éthanol, $x_{éthanol}$, et en ordonnée la température, θ , exprimée en degré Celsius.

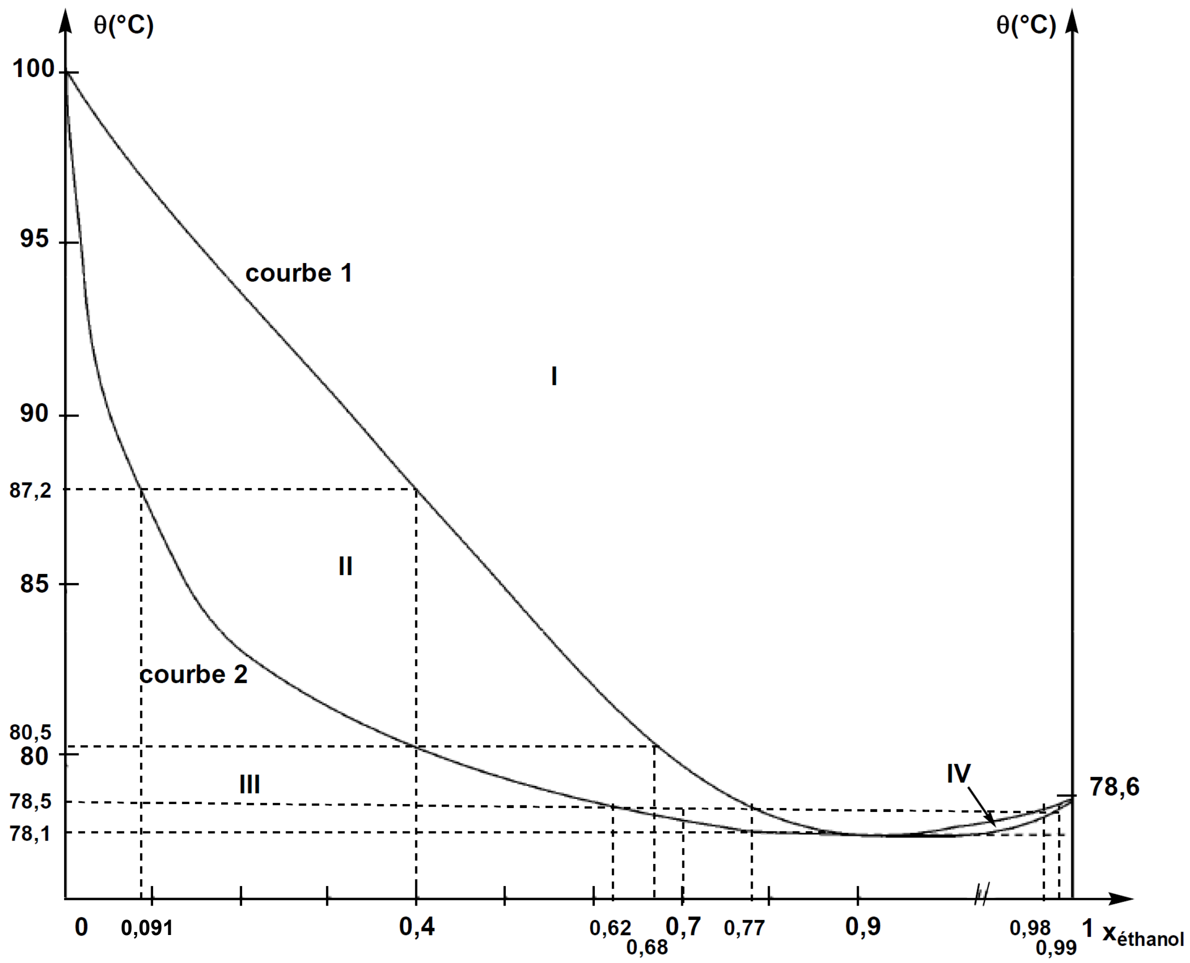


Figure **: diagramme binaire eau-éthanol**

I. Construction du diagramme binaire

1. D'après l'allure du diagramme binaire, indiquer si la miscibilité est nulle, partielle ou totale.
2. Le mélange liquide eau-éthanol peut-il être considéré comme idéal ? Justifier.
3. Nommer les courbes (1) et (2). Pour chacune de ces deux courbes, indiquer s'il s'agit d'une relation entre la température et la fraction molaire en éthanol liquide ou celle en éthanol vapeur.
4. Indiquer le nombre et la nature des phases en présence dans les domaines I à IV.
5. Un point remarquable apparaît sur le diagramme binaire liquide-vapeur eau-éthanol pour une

fraction molaire en éthanol, $x_{éthanol}=0,9$. Nommer ce point. Quelle est la propriété physique remarquable du mélange correspondant ?

6. Représenter l'allure des courbes d'analyse thermique isobare de refroidissement pour des fractions molaires en éthanol respectivement de 0 ; $0,4$; $0,9$? Justifier votre réponse par un calcul de variance, au cours du changement d'état, pour cette dernière courbe d'analyse thermique.

II. Exploitation du diagramme binaire à l'étude de la séparation eau-éthanol

7. Pour un mélange de fraction molaire en éthanol, $x_{éthanol}=0,4$, donner la température d'ébullition commençante et celle d'ébullition finissante. Déterminer la composition de la première bulle de vapeur ainsi que celle de la dernière goutte de liquide.

8. Un mélange liquide eau-éthanol est constitué de $7,0\,moles$ d'éthanol et de $3,0\,moles$ d'eau. Ce mélange est porté à $78,5\,°C$. Indiquer la nature et la composition en fraction molaire des phases en équilibre à cette température. Calculer les quantités de matière exprimées en mole d'eau et d'éthanol dans chacune des phases.

9. Lors de la distillation fractionnée, sous $1\,bar$, d'un mélange eau-éthanol, préciser la nature du distillat et celle du résidu de distillation en fonction de la composition initiale du mélange à distiller.

Électronique

I. Modulation d'amplitude

Le montage de la $Figure\,1$ représente schématiquement un modulateur d'amplitude. Il comprend un multiplieur, qui délivre une tension de sortie $v_{s1}=k\times u_1\times u_2$ (k étant une constante) et un sommateur qui délivre en sortie une tension v_s , égale à la somme des tensions d'entrée.

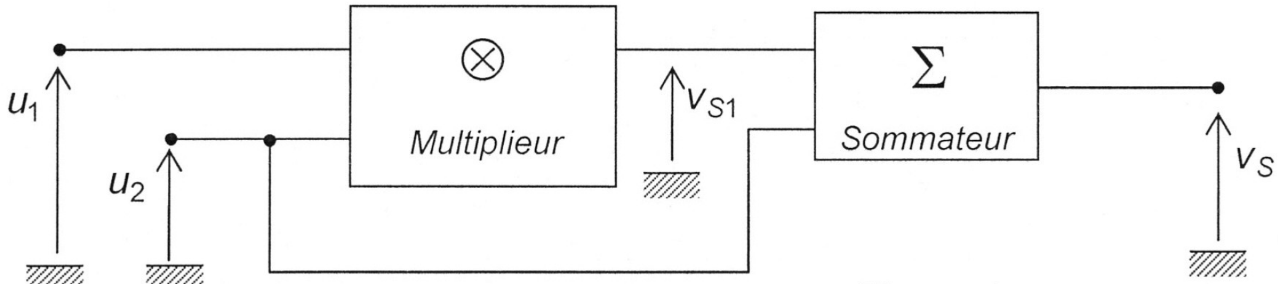


Figure 1

Les tensions sont sinusoïdales : $u_1(t)=U_m\cos(\omega_m t)$ et $u_2(t)=U_0\cos(\omega_p t)$, avec $\omega_p \gg \omega_m$. $u_1(t)$ est appelé « signal modulant » et $u_2(t)$ « signal de porteuse ».

1. Montrer que la tension de sortie $v_S(t)$ peut s'écrire sous la forme: $v_S(t)=U_0\ \cos(\omega_p t)\times[1+m\cos(\omega_m t)]$, et déterminer m en fonction de k et U_m .
2. Représenter graphiquement, de façon schématique, la tension $v_S(t)$ en supposant que $m<1$. Indiquer quelques valeurs particulières intéressantes en ordonnée sur ce graphe.

II. Modulation de phase-Méthode d'Armstrong

Pour certaines applications, il est souhaitable de moduler la phase du signal de porteuse, pour obtenir une tension de la forme $v_p(t)=U_0\ \cos[\omega_p t+m\cos(\omega_m t)]$. Une approche imaginée par l'inventeur E. Armstrong en 1933, permet très simplement d'obtenir un signal de ce type (pour les faibles modulations) en modifiant légèrement le montage de la $Figure\,1$. Dans toute la suite, le taux de modulation m vérifie $m\ll 1$.

3. Montrer que le signal de porteuse modulé en phase peut s'écrire :

   $v_p(t)\approx U_0\cos(\omega_p t)+f(t)\sin(\omega_p t)$ où $f(t)$ sera exprimée en fonction de m , U_0 , ω_m et t .

Pour obtenir la tension $v_p(t)$, un opérateur « Dp » est introduit dans le montage, comme indiqué sur la $Figure\,2$. Les tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont inchangées par rapport au début du problème.

4. Quelle doit être la tension $u'_2(t)$ en sortie de l'opérateur « Dp » pour obtenir $v_s(t)=v_p(t)$, le taux de modulation m restant inchangé par rapport à sa valeur de la première question? Quelle transformation l'opérateur « Dp » doit-il réaliser sur la tension $u_2(t)$?

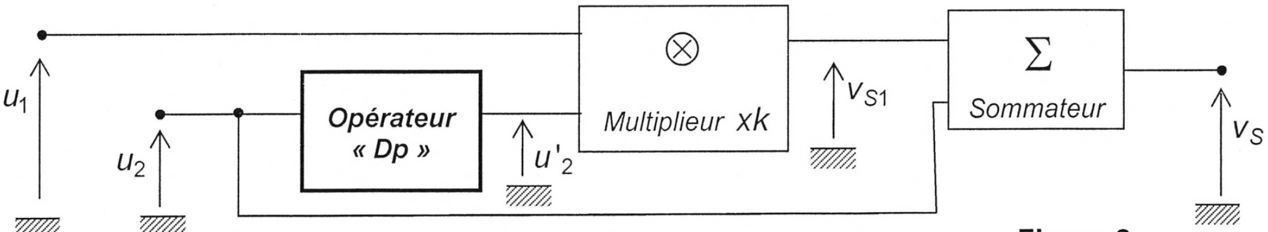


Figure 2

III. Réalisation de l'opérateur « Dp »

Le montage étudié pour réaliser l'opérateur « *Dp* » est représenté sur le schéma de la *Figure* 3 .

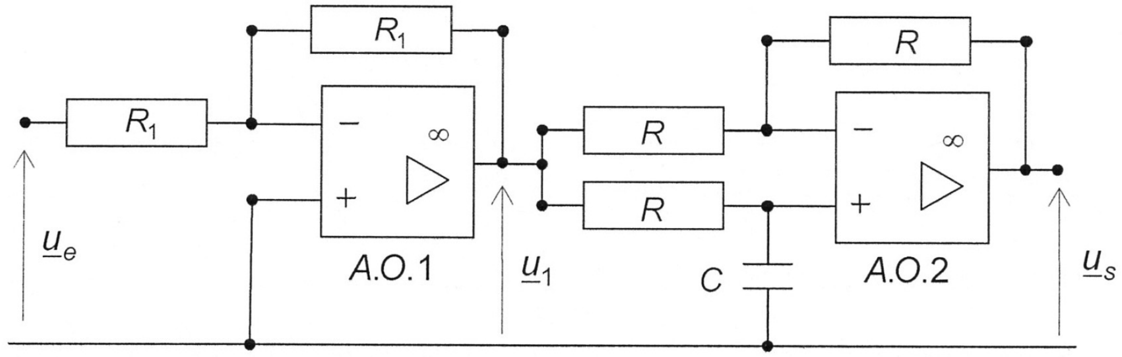


Figure 3

Les amplificateurs opérationnels sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire. Les tensions sont sinusoïdales de pulsation ω . Les grandeurs soulignées indiquées sur la *Figure* 3 désignent les représentations complexes de ces tensions.

5. Exprimer la tension $\underline{u}_1$ en fonction de la tension $\underline{u}_e$. Préciser le rôle de l'ensemble formé par l'amplificateur opérationnel *A.O.1* et les deux résistances identiques de valeur R_1 .

6. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}_2(j\omega)=\underline{u}_s/\underline{u}_1$, en fonction de R , C et ω . En déduire la fonction de transfert globale du montage $\underline{H}(j\omega)=\underline{u}_s/\underline{u}_e$.

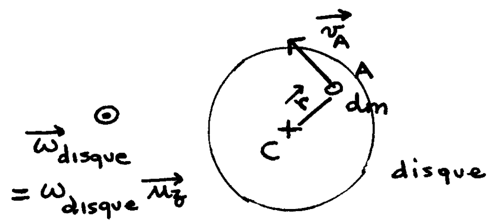
7. Montrer que le seul effet de cet opérateur est d'introduire un déphasage φ_D entre la sortie $u_s(t)$ et l'entrée $u_e(t)$. Exprimer φ_D en fonction de R , C et ω .

8. Comment doit-on choisir le produit RC , en fonction de ω_p , pour que l'opérateur de la *Figure* 2 délivre effectivement le signal modulé en phase $v_p(t)$?

Réponses

Voiture avec volant d'inertie

1) Moment cinétique du disque en C



si A désigne un point du disque $(\vec{r} = \overrightarrow{CA})$

$$\overrightarrow{\sigma}_{disque}(C) = \iint_{disque} \overrightarrow{CA} \wedge dm\, \overrightarrow{v_A}$$

$$= \iint_{disque} \vec{r} \wedge dm\, (\overrightarrow{\omega}_{disque} \wedge \vec{r})$$

$$= \iint_{disque} dm \left[\overrightarrow{\omega}_{disque} (\vec{r}\,\vec{r}) - \vec{r} \underbrace{(\vec{r}\,\overrightarrow{\omega}_{disque})}_{nul} \right]$$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}_{disque}(C) = \underbrace{\left[\iint_{disque} dm\ r^2 \right]}_{J} \overrightarrow{\omega}_{disque}}$$

A.N. $\quad J = \frac{1}{2} M R^2$

$$= \frac{1}{2}\ 30\ 10^{-3}\ (15\ 10^{-3})^2$$

$$\boxed{J = 3{,}38\ 10^{-6}\ kg.m^2}$$

---

2) Mouvement rectiligne uniformément accéléré

$$x = \frac{1}{2} \ddot{x}\ t^2$$

$$v = \ddot{x}\ t$$

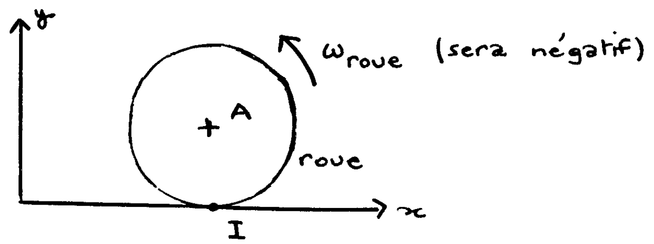
donc : $\quad x = \frac{1}{2} v\, t$

$$\boxed{v_1 = \frac{2d}{t_1}}$$

A.N. $\quad = \dfrac{2 \times 0{,}50}{2}$

$$\boxed{v_1 = 0{,}50 \ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

3) Pendant la phase 1 les roues roulent sans glisser.



Condition de non glissement

$$\overrightarrow{v}_{\substack{gliss\\ roue/sol}} = \overrightarrow{v}_{I \in Roue} - \underbrace{\overrightarrow{v}_{I \in Sol}}_{nul}$$

$$= \overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{\omega}_{roue}$$

$$= v \, \overrightarrow{u_x} + r \, \overrightarrow{u_y} \wedge \omega_{roue} \, \overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{v}_{gliss} = (v + r\,\omega_{roue}) \, \overrightarrow{u_x}}$$

qui doit être nul

$$\boxed{\omega_{roue} = -\frac{v}{r}}$$

donc à l'instant t_1

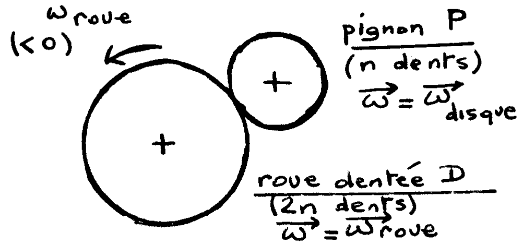
$$\omega_{1\,roue} = -\frac{v_1}{r}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\omega}_{1\,roue} = -\frac{2\,d}{r\,t_1} \, \overrightarrow{u_z}}$$

A.N.
$$= -\frac{2 \,.\, 0{,}5}{0{,}01 \,.\, 2} \, \overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\omega}_{1\,roue} = -50 \, \overrightarrow{u_z} \quad \mathrm{rad\,s^{-1}}}$$

4)



En considérant le nombre de dents des engrenages, on voit que lorsque la roue dentée fait un tour, le pignon fait deux tours (en sens inverse)

donc :

$$\boxed{\omega_{disque} = -2\ \omega_{roue}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\omega_1}_{disque} = -2\ \overrightarrow{\omega_1}_{roue}}$$

A.N
$$\boxed{\overrightarrow{\omega_1}_{disque} = 100\ \overrightarrow{u_z}}$$
rad.s-1

---

5) En t_1, la voiture étant tenue à la main,

- la caisse, immobile dans $\mathcal{R}$, n'a pas de moment cinétique
- les roues, dont la masse est négligée, n'ont pas de moment cinétique
- le moment cinétique du disque est

$$\overrightarrow{\sigma}_{disque}(C) = J\ \overrightarrow{\omega_1}_{disque}$$

(en un autre point, avec la formule de transport du moment,

$$\overrightarrow{\sigma}(C') = \overrightarrow{\sigma}(C) + \overrightarrow{C'C} \wedge \underbrace{\overrightarrow{P}_{disque}}_{M\ \underbrace{\overrightarrow{v}(G)_{disque}}_{nul}}\ )$$

le moment cinétique du jouet est indépendant du point dans $\mathcal{R}$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}_{jouet\,(t_1)/\mathcal{R}} = J\ \omega_{1\,disque}\ \overrightarrow{u_z}}$$

(remarque : on peut aussi dire que $\overrightarrow{\sigma}$ est indépendant du point, puisque le centre de masse étant fixe dans $\mathcal{R}$, ici

$\mathcal{R}$ correspond au référentiel barycentrique)

A.N. $\overrightarrow{\sigma}_{\substack{\text{Jouet}/\mathcal{R} \\ (t_1)}} = 3{,}38\ 10^{-6} \times 100\ \overrightarrow{u_z}$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}_{\substack{\text{Jouet}/\mathcal{R} \\ (t_1)}} = 0{,}338\ 10^{-3}\ \overrightarrow{u_z} \quad / \mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}}$$

---

6) Seul, le disque possède de l'énergie cinétique en t_1

$$\boxed{E_{\substack{\text{cin jouet}/\mathcal{R} \\ (t_1)}} = \frac{1}{2} J\, \omega_{1\,\text{disque}}^{2}}$$

(cf système en rotation autour d'un axe fixe)

A.N. $= \frac{1}{2}\ 3{,}38\ 10^{-6} \times 100^2$

$$\boxed{E_{\substack{\text{cin jouet}/\mathcal{R} \\ (t_1)}} = 16{,}9\ 10^{-3}\ \mathrm{J}}$$

---

7) Le théorème de la puissance cinétique est :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \text{Puissance (toutes les forces intérieures et extérieures)}}$$

---

8) On applique le théorème de la puissance cinétique au jouet (ou finalement au disque)

$$\frac{dE_{\text{cin jouet}/\mathcal{R}}}{dt} = P_{\substack{\text{frottements} \\ \text{axe AB}}}$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{\Gamma}}_{-\Gamma\overrightarrow{u_z}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{\omega}_{\text{disque}}}_{\omega_{\text{disque}}\overrightarrow{u_z}}$$

$$\boxed{\frac{dE_{\text{cin jouet}/\mathcal{R}}}{dt} = -\Gamma\ \omega_{\text{disque}}}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J \omega^2_{disque}\right)}_{J\,\omega_{disque}\frac{d\omega_{disque}}{dt}} = -\Gamma' \omega_{disque}$$

On obtient :

$$\boxed{(-\Gamma') = J \frac{d}{dt}(\omega_{disque})}$$

On vient donc de retrouver <u>le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe</u> AB appliqué au disque en rotation

$$\mathcal{M}_{AB} = J_{AB} \frac{d\omega_{AB}}{dt}$$

Le mouvement de freinage du disque est uniformément varié

$$\frac{d\omega_{disque}}{dt} = -\frac{\Gamma'}{J} = cste$$

$$\int_{\omega_{1\,disque}}^{0} d\omega_{disque} = -\frac{\Gamma'}{J}\int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$-\omega_{1\,disque} = -\frac{\Gamma'}{J}(t_2-t_1)$$

$$\boxed{\Gamma' = \frac{J\ \omega_{1\,disque}}{t_2-t_1}}$$

(remarque : le mouvement étant uniformément varié, ceci revient à remplacer $\dot{\omega}$ par $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$)

A.N. $\Gamma' = \dfrac{3{,}38\ 10^{-6} \times 100}{6}$

$$\boxed{\Gamma' = 56{,}3\ 10^{-6}\ N.m}$$

---

9)

$$\frac{dE_{cin\ jouet/\mathcal{R}}}{dt} = -\Gamma'\omega_{disque} + \text{Puissance actions de contact du sol sur les roues}$$

avec

$$E_{cin,\,jouet} = E_{cin\ disque} + E_{cin\ caisse}$$

$$\underset{\text{Théorème de Koenig}}{\downarrow}\quad \frac{1}{2} J \omega_{disque}^2 + \frac{1}{2} M v^2 \qquad \underset{\text{translation}}{\downarrow}\quad \frac{1}{2} m v^2$$

$$\boxed{E_{cin,\,jouet/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}(M+m)\,v^2 + \frac{1}{2} J \omega_{disque}^2}$$

de plus : $\omega_{disque} = -2\,\omega_{roue}$

et puisque on suppose le non glissement

$$\omega_{roue} = -\frac{v}{r}$$

finalement : $\omega_{disque} = \dfrac{2v}{r}$

$$\boxed{E_{cin,\,jouet/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\left(M+m+4\frac{J}{r^2}\right) v^2}$$

le théorème de la puissance cinétique donne (puisque les actions de contact du sol sur les roues ne travaillent pas – elles s'appliquent à des points de vitesse nulle car non glissement)

$$\left(M+m+4\frac{J}{r^2}\right) v\,\ddot{x} = -\Gamma\,\omega_{disque}$$

$$= -\Gamma\,\frac{2v}{r}$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{2\,\Gamma}{r\left(M+m+4\frac{J}{r^2}\right)}}$$

A.N.

$$= -\frac{2\ \ 56{,}3\ 10^{-6}}{0{,}01\left(0{,}03+0{,}01+4\,.\,\frac{3{,}38\ 10^{-6}}{(10^{-2})^2}\right)}$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\,64{,}3\ 10^{-3}\ \mathrm{m\,s^{-2}}}$$

10) Pour un mouvement d'accélération constante, on a la relation indépendante du temps :

$$v^2 - v_0^2 = 2\,\ddot{x}\,(x - x_0)$$

Ici

$$0 - v_1^2 = 2\,\ddot{x}\,L$$

$$\boxed{L = -\frac{v_1^2}{2\ddot{x}}}$$

A.N.

$$= -\frac{(0,5)^2}{2 \times -64,3\ 10^{-3}}$$

$$\boxed{L = 1,94 \text{ m}}$$

Remarque :

démonstration de la formule utilisée dans le cas particulier (origine des t au départ)

$$x = \frac{1}{2}\ddot{x}\,t^2 + v_1 t + x_0$$

$$v = \ddot{x}\,t + v_1$$

A la fin, on a $t = t_f$ et $v = v_f = 0$

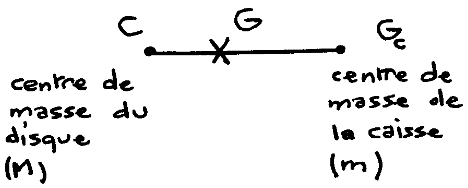
donc $t_f = -\frac{v_1}{\ddot{x}}$

on reporte

$$x_f - x_0 = \frac{1}{2}\ddot{x}\left(-\frac{v_1}{\ddot{x}}\right)^2 + v_1\left(-\frac{v_1}{\ddot{x}}\right)$$

$$L = -\frac{v_1^2}{2\ddot{x}}$$

11)



Le centre de masse G du jouet est donné par :

$$(m+M)\,\overrightarrow{OG} = M\,\overrightarrow{OC} + m\,\overrightarrow{OG_c}$$

avec origine en C :

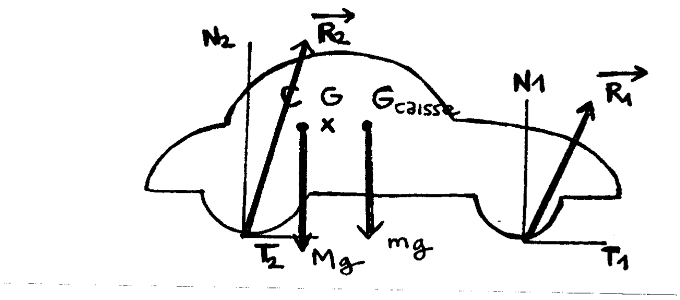
$$(m+M)\,\overrightarrow{CG} = \vec{0} + m\,\overrightarrow{CG_c}$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{m}{m+M}\,\overrightarrow{CG_c}$$

$$\boxed{\overrightarrow{CG} = \frac{m}{m+M}\,\frac{a}{2}\,\overrightarrow{u_x}}$$

---

12) Théorème de la résultante cinétique au jouet dans $\mathcal{R}$



$$\Sigma\,\overrightarrow{F}_{ext} = (m+M)\,\overrightarrow{a_G}$$

$$(M+m)\,\vec{g} + 2\overrightarrow{R_1} + 2\overrightarrow{R_2} = (m+M)\,\overrightarrow{a_G}$$

$$\boxed{/x \qquad 2T_1 + 2T_2 = (m+M)\,\ddot{x} \qquad (1)}$$

$$\boxed{/y \quad -(M+m)g + 2N_1 + 2N_2 = 0 \qquad (2)}$$

---

13) Théorème du moment cinétique au jouet, dans le référentiel barycentrique associé au jouet, en G

$$\Sigma\,\overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext}(G) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma}^*_{jouet}$$

a) $\overrightarrow{\sigma}^*_{jouet}$

Le référentiel $(G\ \overrightarrow{u_x}\ \overrightarrow{u_y}\ \overrightarrow{u_z})$ est le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ du jouet total.

Mais puisque C (centre de masse du disque) y est fixe, c'est aussi le référentiel barycentrique du disque.

Même constatation pour la caisse et les roues.

Finalement :

$$\vec{\sigma}^*_{jouet} = \underbrace{\vec{\sigma}^*_{disque}}_{J\,\vec{\omega}_{disque}} + \underbrace{\vec{\sigma}^*_{caisse}}_{\text{nul car pas de rotation de la caisse dans son référentiel barycentrique}} + \underbrace{\vec{\sigma}^*_{\substack{\text{roues avant}\\ \text{roues arrière}}}}_{\text{nul car la masse des roues est négligée}}$$

b) $\vec{\mathcal{M}}_{ext}(G)$

- le moment du poids $(m+M)\vec{g}$ est nul en G
- reste à exprimer

$$\underbrace{\vec{GI_1}}_{\vec{GC}+\vec{CI_1}} \wedge \vec{R_1} + \underbrace{\vec{GJ_1}}_{\vec{GC}+\vec{CJ_1}} \wedge \vec{R_1} + \vec{GI_2} \wedge \vec{R_2} + \vec{GJ_2} \wedge \vec{R_2}$$

$$= 2\,\vec{GC} \wedge (\vec{R_1}+\vec{R_2}) + (\vec{CI_1}+\vec{CJ_1}) \wedge \vec{R_1} + (\vec{CI_2}+\vec{CJ_2}) \wedge \vec{R_2}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{m}{m+M}a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} T_1+T_2 \\ N_1+N_2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 6a \\ -2b \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} T_1 \\ N_1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2a \\ -2b \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} T_2 \\ N_2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

finalement on obtient selon $\vec{u_z}$:

$$\boxed{(3) \quad -\frac{m}{m+M}\,a\,(N_1+N_2) + 6a\,N_1 + 2b\,T_1 - 2a\,N_2 + 2b\,T_2 = J\frac{d\omega}{dt}_{disque}}$$

- on tient compte de (2)
- on tient compte du non glissement : $\omega_{disque} = -2\,\omega_{roue}$

$$= 2\,\frac{v}{r}$$

$$\boxed{(3') \quad -\frac{a}{2}\,mg + 6\,aN_1 + 2bT_1 - 2aN_2 + 2bT_2 = \frac{2J}{r}\ddot{x}}$$

<u>remarque</u> : il était plus rapide de faire, en utilisant le transport du moment :

$$\vec{\mathcal{M}}_{ext}(G) = \vec{\mathcal{M}}_{ext}(C) + \underbrace{\vec{GC} \wedge \Sigma\vec{F}_{ext}}_{\text{nul car } \vec{GC} \text{ et } \Sigma\vec{F}_{ext} \text{ selon } \vec{u_x}}$$

14) Théorème du moment cinétique, dans son référentiel barycentrique, en projection, au système : {train avant – roues avant}
Puisque l'inertie du système est négligée $\vec{\sigma}$ est nul.

$$\mathcal{M}_{ext}/_{axe\ A_1B_1} = \frac{d\sigma_{avant}}{dt}/_{axe\ A_1B_1}$$

$$2\,r\,T_1 = 0$$

$$\boxed{(4) \qquad T_1 = 0}$$

---

15) → En l'absence de frottements au niveau du contact pignon-roue dentée, la puissance totale au niveau de la transmission est nulle (la puissance fournie par A = la puissance reçue par B). Donc

$$\Gamma_{D\to P}\,\omega_{disque} + \Gamma_{P\to D}\,\omega_{roue} = 0$$

$$\Gamma_{D\to P}\,\omega_{disque/roue} = 0$$

→ Théorème du moment cinétique en projection pour le système {train arrière – roues arrières – roue dentée}

$$\boxed{2\,rT_2 + \Gamma_{P\to D} = 0}$$

→ Idem pour le système {pignon – disque – axe AB}

$$\boxed{-\Gamma + \Gamma_{D\to P} = J\,\frac{d\omega_{disque}}{dt}}$$

On élimine $\Gamma_{D\to P}$ puisque

$$\Gamma_{D\to P}\,\omega_{disque} + \Gamma_{P\to D}\,\underbrace{\omega_{roue}}_{-\frac{1}{2}\omega_{disque}} = 0$$

donc :

$$\boxed{\Gamma_{P\to D} = 2\,\Gamma_{D\to P}}$$

finalement :

$$\boxed{-\Gamma - rT_2 = J\,\frac{d\omega_{disque}}{dt}}$$

En tenant compte du non glissement :

$$-\Gamma' \quad - r\,T_2 \quad = \frac{2J\ddot{x}}{r}$$

$$\boxed{(5) \qquad \frac{\Gamma'}{r} + T_2 = -2\frac{J}{r^2}\ddot{x}}$$

---

16) On cherche $\ddot{x}$

(1) $\qquad 2T_1 + 2T_2 = (m+M)\,\ddot{x}$

(4) $\qquad T_1 \qquad \boxed{T_1 = 0}$

donc $\qquad \boxed{T_2 = \frac{(m+M)}{2}\ddot{x}}$

On reporte dans (5)

$$\frac{\Gamma'}{r} + \frac{m+M}{2}\ddot{x} = -2\frac{J}{r^2}\ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{-2\Gamma'/r}{m+M+4J/r^2}}$$

ce qui correspond bien à la réponse précédente.

---

17)

$$\boxed{(2) \qquad N_1 + N_2 = \frac{(M+m)}{2}g}$$

(3') $\qquad 6N_1 - 2N_2 = \frac{mg}{2} - 2\frac{b}{a}\underbrace{(T_1+T_2)}_{\frac{(m+M)}{2}\ddot{x}} + \frac{2J}{ar}\ddot{x}$

avec $\frac{a}{b} = \beta$

$\frac{2J}{ar} = \frac{MR^2}{ar} = \frac{Mb}{a}$ car $rb = R^2$

$$6N_1 - 2N_2 = \frac{mg}{2} - \frac{(m+M)}{\beta}\ddot{x} + \frac{M}{\beta}\ddot{x}$$

$$\boxed{(3'') \qquad 3N_1 - N_2 = \frac{m}{2}\left(\frac{g}{2} - \frac{\ddot{x}}{\beta}\right)}$$

En utilisant (2) et (3''), on trouve :

$$\boxed{\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}\left(\left(M+\frac{3m}{2}\right)g - m\frac{\ddot{x}}{\beta}\right) \\ N_2 &= \frac{1}{8}\left(\left(3M+\frac{5m}{2}\right)g + m\frac{\ddot{x}}{\beta}\right)\end{aligned}}$$

---

18) $\ddot{x}$ est constant donc N_1, N_2, T_1, T_2 qui dépendent de $\ddot{x}$ sont des constantes.

Si les conditions de roulement sans glissement sont vérifiées au départ, elles restent vraies ensuite.

---

19) Conditions traduisant le contact :

$N_1 \geq 0$ évident ($N_1 = \frac{1}{8}\left(\left(M+\frac{3m}{2}\right)g + \frac{m}{\beta}|\ddot{x}|\right)$)

$N_2 \geq 0$ avec $N_2 = \frac{1}{8}\left(\left(3M+\frac{5m}{2}\right)g - \frac{m}{\beta}|\ddot{x}|\right)$

ce qui suppose

$$|\ddot{x}| \leq \beta g \left(\frac{3M}{m} + \frac{5}{2}\right)$$

Conditions traduisant le non glissement

$\left|\frac{T_1}{N_1}\right| \leq f$ évident ($T_1 = 0$)

$\left|\frac{T_2}{N_2}\right| \leq f$ soit

$$\frac{m+M}{2}|\ddot{x}| \leq f \, \frac{1}{8}\left(\left(3M+\frac{5m}{2}\right)g - \frac{m}{\beta}|\ddot{x}|\right)$$

ou

$$\boxed{|\ddot{x}| \leq \frac{\beta g\left(\frac{3M}{m}+\frac{5}{2}\right)}{1+\frac{4\beta}{f}\left(1+\frac{M}{m}\right)}}$$

(Cette deuxième condition est plus restrictive que la première)

Ce jouet utilise comme "réservoir d'énergie" un disque lancé possédant de l'énergie cinétique. Ce principe est utilisable sur des véhicules (ex : autobus électrique). Aux arrêts, un moteur électrique relance un disque qui emmagasine de l'énergie (= volant d'inertie). Le bus roule ensuite en utilisant cette énergie.

Train électrique

1) Théorème du moment cinétique

→ En un point fixe O, dans un référentiel galiléen,

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(O) = \sum \vec{\mathcal{M}}_{ext}(O)$$

Démonstration (en utilisant une notation discrète)

$$\vec{\sigma}(O) = \sum \vec{OA_i} \wedge m_i \vec{v_i}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(O) = \sum \underbrace{\frac{d\vec{OA_i}}{dt}}_{\vec{v_i} \text{ si O est fixe}} \wedge m_i \vec{v_i} + \sum \vec{OA_i} \wedge \underbrace{m_i \vec{a_i}}_{\vec{F_i}}$$

$$= 0 + \sum \vec{\mathcal{M}}(O)$$

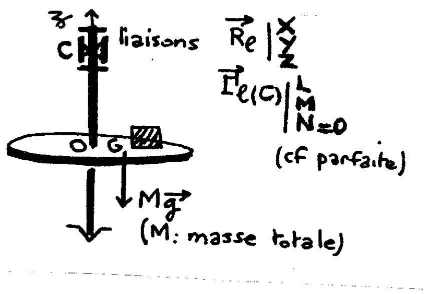
Les moments intérieurs s'annulent deux à deux

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{ext}(O)}$$

→ En projection selon l'axe fixe A, on aura (on multiplie par $\vec{u_z}$)

$$\vec{u_z}\,\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{u_z}\,\sum \vec{\mathcal{M}}_{ext}(O)$$

$$\boxed{\frac{d\sigma_{\text{axe fixe A}}}{dt} = \sum \mathcal{M}_{ext\,/\text{axe fixe A}}}$$



Ici
- le moment du poids est nul selon l'axe (cf le poids est parallèle à l'axe)
- la liaison de l'axe est parfaite. Donc aucun frottement ne perturbe la rotation autour de l'axe.

$\mathcal{M}_{liaison/axe} = 0$

$$\frac{d\sigma_{/axe}}{dt} = 0$$

$$\boxed{\sigma_{Oz} = \text{constante}}$$

En quelque sorte, "rien" ne vient ni favoriser, ni empêcher la rotation autour de Oz d'où σ_{Oz} est constant.

---

2) a) en $t=0^-$ pour le système plateau + loco, tout étant immobile

$$\sigma_{Oz}(\text{plateau + Loco}) = 0$$

en $t>0$ le moment cinétique du système est conservé

$$\sigma_{Oz}(\text{Loco})_{/\text{plateau}} > 0$$

$$\sigma_{Oz}(\text{plateau + loco}) = \text{constante} = 0$$

donc

$$\boxed{\sigma_{Oz}(\text{plateau}) < 0}$$

Le plateau tourne autour de son axe, en sens inverse par rapport à la loco

b) le calcul

$t>0$ $\qquad \sigma_{Oz}(P+L)_{/\mathcal{R}} = \sigma_{Oz}(P)_{/\mathcal{R}} + \sigma_{Oz}(L)_{/\mathcal{R}} = 0$

avec

$$\sigma_{Oz}(P)_{/\mathcal{R}} = I\,\Omega$$

$$\sigma_{Oz}(L)_{/\mathcal{R}} = m\rho^2\,(\omega_{loco/\mathcal{R}})$$

$$= m\rho^2\,(\omega_{loco/plateau} + \Omega)$$

$$= m\rho^2\,\frac{v}{\rho} + m\rho^2\Omega$$

finalement

$$(I + m\rho^2)\,\Omega + m\rho v = 0$$

$$\boxed{\Omega = -\frac{m\rho v}{I + m\rho^2}}$$

c)

$$\boxed{\Omega \approx -\frac{m\rho v}{I}}$$

---

3) a) en $t=0^-$ la loco tourne, le plateau est immobile

$$\sigma_{Oz}\ (P+L) = \sigma_{Oz}\ (L)$$

en $t=0^+$ | le frein qui exerce $\mathcal{M}_{\text{Frein}/Oz}(t)$ a été débloqué. On a donc, pour le système total

$$\frac{d\sigma_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{\text{Frein}}$$

$$\sigma_{Oz}(t=0^+) - \sigma_{Oz}(t=0^-) = \underbrace{\int_{t=0^-}^{t=0^+} \mathcal{M}_{\text{Frein}}(t)\ dt}_{\text{nul à la limite } \Delta t = (t_{0+} - t_{0-}) \to 0}$$

Il y a continuité de $\sigma_{Oz}(P+L)$ entre $t=0^-$ et $t=0^+$

en $t>0$ les moments extérieurs selon Oz sont nuls et il y a, à nouveau, conservation de $\sigma_{Oz}(P+L)$
Puisque la loco tourne toujours comme en $t=0^-$, c'est donc que la table ne tourne pas comme en $t=0^-$

$$\boxed{\sigma_{Oz}\ (\text{plateau}) = 0}$$

b) le calcul

$t=0^-$ $\quad \sigma_{Oz}(L+P) = \sigma_{Oz}(L)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad = m\rho v$

$t>0$ $\quad \sigma_{Oz}(L+P) = m\rho v + (I + m\rho^2)\Omega$
doit être égal à $m\rho v$ donc :

$$\boxed{\Omega = 0}$$

---

4) a) en $t=0^-$ la loco tourne

$$\sigma_{Oz}\ (P+L) = \sigma_{Oz}\ (L)$$

en $t>0$ la loco est arrêtée par rapport aux rails.
le plateau supportant la loco doit

tourner (dans le même sens) pour assurer la conservation de σ_{Oz}.

$$\boxed{\Omega\ (\text{plateau})_{/\mathcal{R}} \quad > 0}$$

b) le calcul :

$t = 0^-$ $\quad \sigma_{Oz}\,(L+P) = m \rho v$

$t > 0$ $\quad \sigma_{Oz}\,(L+P) = (I + m\rho^2)\,\Omega$

Conservation de $\sigma_{Oz}(L+P)$

$$\boxed{\Omega = \frac{m\rho v}{I + m\rho^2}}$$

c)

$$\boxed{\Omega \approx \frac{m\rho v}{I}}$$

---

5) Il n'y a pas a priori conservation de l'énergie dans ces expériences : les piles apportent de l'énergie aux locomotives (forces motrices intérieures), le système de freinage des locomotives consomme de l'énergie (forces résistantes intérieures).

Exemple : expérience 4

$$E_{c\,\text{initiale}\ t=0^-} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\begin{aligned}
E_{c\,\text{finale}\ t>0} &= E_{c\,\text{plateau}/\mathcal{R}} + E_{c\,\text{loco}/\mathcal{R}} \\
&= \frac{1}{2}(I + m\rho^2)\,\Omega^2 \\
&= \frac{1}{2}(I + m\rho^2)\,\frac{m^2\rho^2 v^2}{(I+m\rho^2)^2} \\
&= \frac{1}{2} m v^2 \,\frac{m\rho^2}{I + m\rho^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_c &= E_{c\,\text{finale}} - E_{c\,\text{initiale}} \\
&= \frac{1}{2} m v^2 \left(\frac{m\rho^2}{I + m\rho^2} - 1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta E_C = -\frac{1}{2} m v^2 \frac{I}{I + m\rho^2}}$$

$$\boxed{\Delta E_C \approx -\frac{1}{2} m v^2}$$

(cf Ω est très petit et l'énergie cinétique finale est quasi nulle)

---

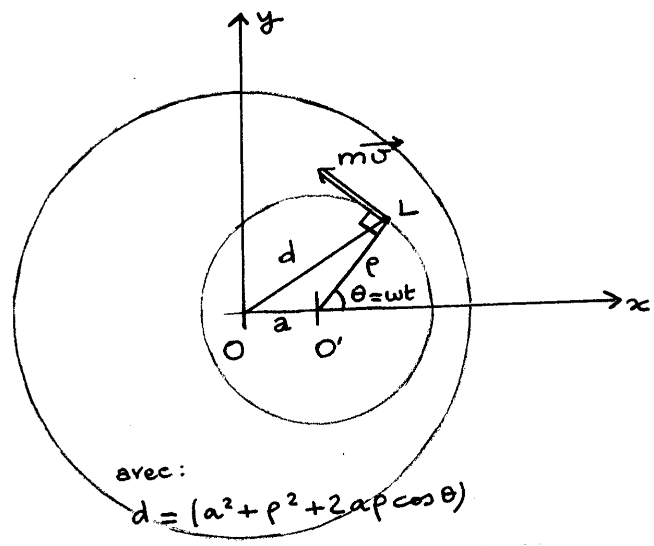
6) Si il y a n locomotives sur la voie, il faut dans les résultats numériques remplacer m par nm.
Les résultats sont qualitativement les mêmes. Les vitesses de rotation de la table sont seulement n fois plus grandes.

---

7) a) au départ $\sigma_{Oz}(L+P) = 0$

- quand la loco tourne $\sigma_{Oz}(L) > 0$ donc $\sigma_{Oz}(P)$ doit être négatif pour assurer la nullité de $\sigma_{Oz}(L+P)$. Le plateau tourne donc en sens contraire de L / $\mathcal{R}$.
- $\sigma_{Oz}(L)$ n'est pas constant or $\sigma_{Oz}(P) = -\sigma_{Oz}(L)$. Le plateau tourne plus vite si la loco est éloignée de O et inversement.

b)



avec :
$d = (a^2 + \rho^2 + 2a\rho\cos\theta)$
$\omega = \frac{v}{\rho}$

$$\rightarrow \quad \underset{(L)/R}{\sigma_{Oz}} = \overrightarrow{u_z} \left(\underset{\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'L}}{\overrightarrow{OL}} \wedge m \overrightarrow{v}_{loco/R} \right)$$

$$\overrightarrow{v}_{loco/R} = \underset{v\,\overrightarrow{u_\theta}}{\overrightarrow{v}_{\substack{relative \\ loco/plateau}}} + \underset{\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OL}}{\overrightarrow{v}_{\substack{entraînement \\ L \in plateau/R}}}$$

$$= \overrightarrow{u_z} \left((\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'L}) \wedge m v \overrightarrow{u_\theta} \right) + \overrightarrow{u_z} \underbrace{\left(\overrightarrow{OL} \wedge m (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OL}) \right)}_{m \Omega d^2 \overrightarrow{u_z}}$$

$$\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z} \begin{vmatrix} a + \rho \cos\theta \\ \rho \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -m v \sin\theta \\ m v \cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{(L)/R}{\sigma_{Oz}} = m v a \cos\theta + m v \rho + m \Omega d^2$$

$$\rightarrow \quad \underset{(P)}{\sigma_{Oz}} = I \Omega$$

$\rightarrow$ conservation de $\sigma_{Oz}(L+P)$ nul au départ

$$m v a \cos\theta + m v \rho + m \Omega d^2 + I \Omega = 0$$

$$\Omega = -\frac{m v (\rho + a \cos\theta)}{I + m d^2}$$

$$\boxed{\Omega_{(t)} = -\frac{m v \left(\rho + a \cos\left(\frac{v}{\rho} t\right)\right)}{I + m \left(a^2 + \rho^2 + 2 a \rho \cos\left(\frac{v}{\rho} t\right)\right)}}$$

c) $$\boxed{\Omega_{(t)} \approx -\frac{m v}{I} \left(\rho + a \cos\left(\frac{v}{\rho} t\right)\right)}$$

---

8) a) $\sigma_{Oz}(L)_{/plateau}$ est ici une constante.

<u>Le plateau tourne donc en sens contraire, mais à vitesse constante</u> pour assurer $\sigma_{Oz}(L+P) = 0$

b) $\rightarrow$ On considère les n locomotives comme un cerceau de masse nm, de centre O', tournant à la vitesse de rotation $\omega = \frac{v}{\rho}$ par rapport au plateau

Par rapport à $\mathcal{R}$, le cerceau tourne à la vitesse $(\omega + \Omega)$.

Théorème de König

$$\vec{\sigma}(O)_{\text{locomotives}/\mathcal{R}} = \vec{\sigma}^* + \overrightarrow{OO'} \wedge nm\,\vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}$$

$$= nm\rho^2(\omega+\Omega)\,\vec{u_z} + nma^2\Omega\,\vec{u_z}$$

$$\sigma_{Oz\,(n\,\text{Loco})} = nm\rho v + nm(\rho^2+a^2)\Omega$$

$\longrightarrow$ $$\sigma_{Oz\,(P)} = I\Omega$$

$\longrightarrow$ finalement :

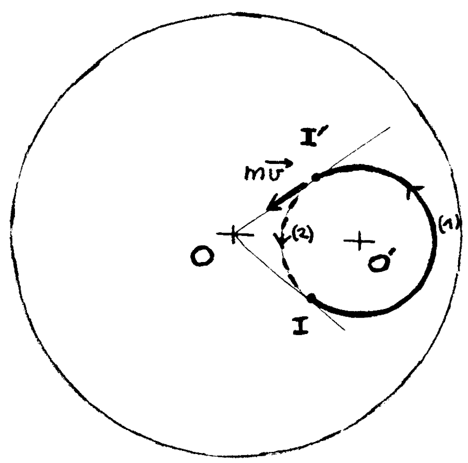
$$nm\rho v + \left(nm(\rho^2+a^2) + I\right)\Omega = 0$$

$$\boxed{\Omega = -\frac{nm\rho v}{I + nm(\rho^2+a^2)}}$$

c) $$\boxed{\Omega \approx -\frac{nm\rho v}{I}}$$

---

g)



$\rightarrow$ quand la loco est entre I et I' (contour (1))
alors $\sigma(L)_{/\text{plateau}} > 0$ donc $\sigma(P) < 0$

Sur le contour (2) , $\sigma(L)_{/plateau} < 0$ donc $\sigma(P) > 0$

En I et I', $\sigma(L)_{/plateau} = 0$ donc $\sigma(P) = 0$

Le plateau oscille

---

10) $\longrightarrow$ $\sigma_{Oz}(L)/plateau$ est à nouveau une constante

Le plateau tourne, à vitesse constante, avec $\Omega < 0$

Le plateau tourne avec $\Omega < 0$ constant

---

11) En présence de frottements, lors du lancement de la loco, le plateau tourne en sens contraire et finit par s'arrêter à cause de frottements.

Lors de l'arrêt de la loco, le plateau se met à tourner dans le même sens et finit par s'arrêter à cause des frottements.

Diagramme liquide - vapeur eau - éthanol

1) On reconnait ici un diagramme avec azéotrope.

La miscibilité est donc totale

Si la miscibilité était nulle, on obtiendrait le diagramme avec hétéroazéotrope.
(le cas avec miscibilité partielle n'est pas au programme)

---

2)

Le mélange n'est pas idéal

puisqu'il s'agit d'un cas avec azéotrope.

---

3)

(1)	courbe de rosée	$T = T(x_{vapeur})$
(2)	courbe d'ébullition	$T = T(x_{liquide})$

---

4)

I	1 phase	(vapeur)
II	2 phases	(liquide + vapeur)
III	1 phase	(liquide)
IV	2 phases	(liquide + vapeur)

---

5)

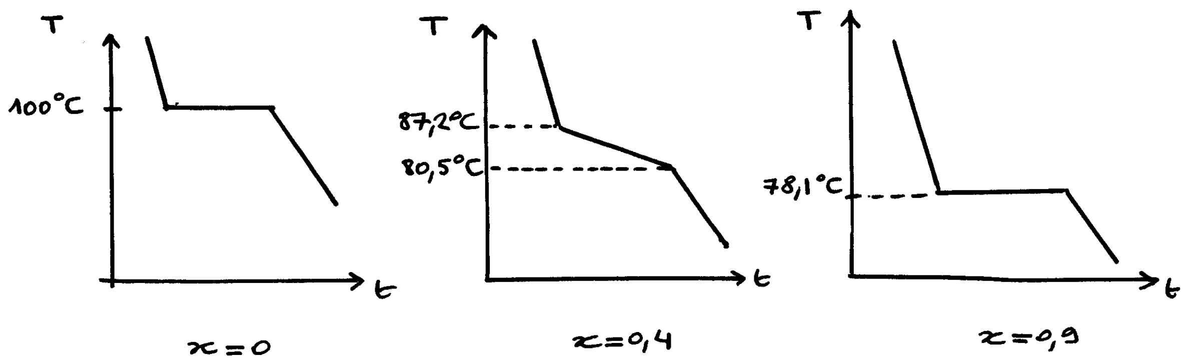
$$x_{ethanol} = 0{,}9$$

Ce point correspond à l'azéotrope

A la pression P du diagramme, l'ébullition de l'azéotrope se fait à température constante.

---

6) Courbes d'analyse thermique



On étudie la variance pendant la liquéfaction pour $x = 0,9$

- 6 paramètres intensifs : P, T,
  $x_{L\,\text{ethanol}}$, $x_{L\,\text{eau}}$
  $x_{V\,\text{ethanol}}$, $x_{V\,\text{eau}}$

- 4 relations :
  - une traduisant l'équilibre ethanol(liq) $\rightleftharpoons$ ethanol(g)
  - " " " eau (liq) $\rightleftharpoons$ eau (g)
  - $x_{L\,\text{ethanol}} + x_{L\,\text{eau}} = 1$
  - $x_{V\,\text{ethanol}} + x_{V\,\text{eau}} = 1$

La variance générale vaut donc $6 - 4 = 2$

La pression étant connue, la variance résiduelle est $2 - 1 = 1$

On a une relation supplémentaire ici

$$\boxed{x_{L\,\text{ethanol}} = x_{V\,\text{ethanol}}}$$

La variance résiduelle vaut donc : 0

La température ne varie donc pas.

---

7) $x_{\text{ethanol}} = 0,4$

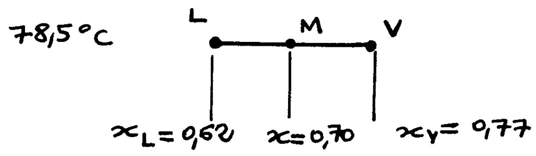
$$\boxed{\begin{array}{l} T_{eb} \text{ commençante} = 80,5\,°C \\ T_{eb} \text{ finissante} = 87,2\,°C \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{première bulle} & x_{V\,\text{ethanol}} = 0,68 \\ \text{dernière goutte} & x_{L\,\text{ethanol}} = 0,091 \end{array}}$$

8)

$$x_{\substack{\text{éthanol}\\ \text{mélange départ}}} = \frac{7{,}0}{7{,}0 + 3{,}0}$$

$$= 0{,}70$$



$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{phase liquide} & x^L_{\text{éthanol}} = 0{,}62 \\ \text{phase vapeur} & x^V_{\text{éthanol}} = 0{,}77 \end{array}}$$

$$\frac{n_L}{n} = \frac{MV}{LV}$$

$$\frac{n_L}{10} = \frac{0{,}77 - 0{,}70}{0{,}77 - 0{,}62}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} n = 10 \text{ moles} \\ n_L = 4{,}67 \text{ moles} \\ n_V = 5{,}33 \text{ moles} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{phase liquide} \\ n^L_{\text{éthanol}} = x_L \; n_L = 2{,}89 \text{ moles} \\ n^L_{\text{eau}} = 1{,}77 \text{ moles} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{phase vapeur} \\ n^V_{\text{éthanol}} = x_V \; n_V = 4{,}11 \text{ moles} \\ n^V_{\text{eau}} = 1{,}23 \text{ moles} \end{array}}$$

9) - <u>fuseau de gauche</u> $x_{ethanol} < 0,9$

le + volatil : azéotrope se trouve dans le distillat
le - volatil : eau se trouve dans le résidu

- <u>fuseau de droite</u> $x_{ethanol} > 0,9$

le + volatil : azéotrope se trouve dans le distillat
le - volatil : éthanol se trouve dans le résidu

Electronique

1)

$$v_{s_1} = k\, u_1\, u_2$$

$$v_s = v_{s_1} + u_2$$

$$= u_2 (1 + k\, u_1)$$

$$v_s = U_0 \cos(\omega_p t) \; [1 + \underbrace{k U_m}_{m} \cos(\omega_m t)]$$

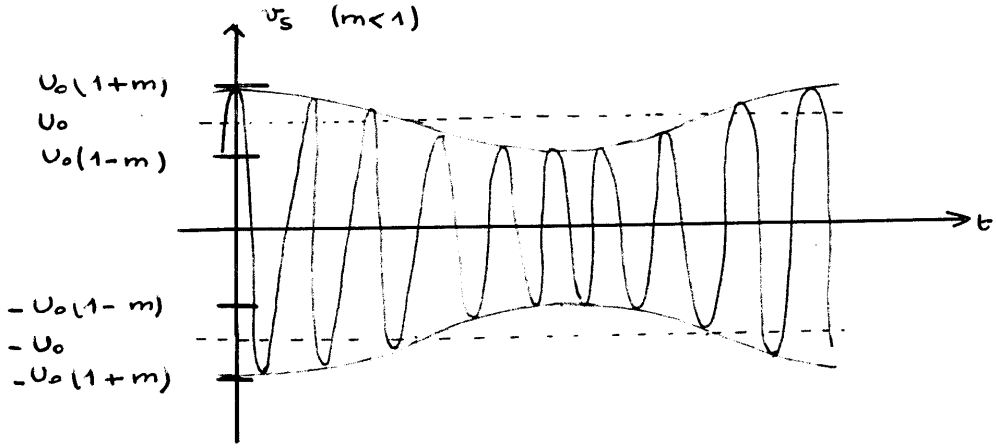
donc $\boxed{m = k\, U_m}$

2)

$\omega_p \gg \omega_m$ et $\cos(\omega_p t)$ varie plus vite que $\cos(\omega_m t)$

donc ($m<1$)

- $U_0 [1 + m \cos(\omega_m t)]$ est l'enveloppe de la courbe (pour $\cos(\omega_p t) = +1$)
- $-U_0 [1 + m \cos(\omega_m t)]$ est l'enveloppe inférieure (pour $\cos(\omega_p t) = -1$)



3)

$$v_p(t) = U_0 \cos[\omega_p t + m \cos(\omega_m t)]$$

Le terme $|m \cos(\omega_m t)|$ est donc beaucoup plus petit que 1.

On fait un D.L. .

cf $\cos(\theta + \varepsilon) = \cos(\theta) - \varepsilon \sin\theta$

au premier ordre en ε

$$\boxed{v_p(t) \approx U_0 \left(\cos(\omega_p t) - m \cos(\omega_m t) \sin(\omega_p t) \right)}$$

ce qui correspond à la réponse proposée avec

$$\boxed{f(t) = -m\,U_0 \cos(\omega_m t)}$$

remarque : on pouvait aussi arriver à la réponse en développant le cos.

$$v_p(t) = U_0 \cos\left[\omega_p t + m\cos(\omega_m t)\right]$$

$$= U_0\Big(\cos(\omega_p t)\,\cos(\overbrace{m\cos(\omega_m t)}^{\varepsilon}) - \sin(\omega_p t)\,\sin(\underbrace{m\cos(\omega_m t)}_{\varepsilon})\Big)$$

on fait ensuite, au 1er ordre en ε

$$\cos\varepsilon = 1$$
$$\sin\varepsilon = \varepsilon$$

---

4) On avait avant l'introduction de D_p : $v_S = k\,u_1 u_2 + u_2$

$$v_S = U_0\,\underbrace{k U_m}_{m}\,\cos(\omega_m t)\,\boxed{\cos(\omega_p t)} + U_0\cos(\omega_p t)$$

On doit avoir après l'introduction de D_p : $v_S = k\,u_1 u'_2 + u_2$

$$v_S = U_0\,\underbrace{k U_m}_{m}\,\cos(\omega_m t)\,\boxed{(-\sin(\omega_p t))} + U_0\cos(\omega_p t)$$

L'opérateur D_p reçoit $u_2 = U_0\cos(\omega_p t)$

et doit en faire $u'_2 = U_0\,(-\sin(\omega_p t))$

C'est un opérateur déphasage.

Il doit déphaser u_2 de $+\frac{\pi}{2}$

$$\cos\left(\omega_p t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\omega_p t)$$

D_p créé un déphasage avance de $\frac{\pi}{2}$ pour la tension u'_2 par rapport à u_2

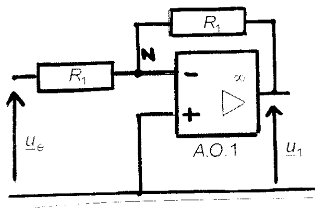
---

5) • Le montage AO1 est le montage connu de l'amplificateur inverseur. (cf entrée du signal sur le moins de l'A.O.).
De plus, les deux résistances sont égales, donc le gain vaut 1

AO1 : montage inverseur

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_e} = -1$$

• démonstration :



au noeud N, on utilisant le th de Millman

$$\underline{v}_- = \frac{\underline{u}_e \frac{1}{R_1} + \underline{u}_1 \frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1}}$$

on se trouve en régime linéaire donc $\underline{\varepsilon} = \underline{v}_+ - \underline{v}_- = 0$

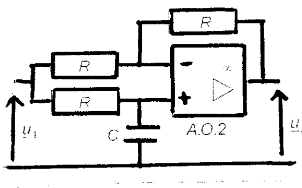
or $\underline{v}_+ = 0$ donc $\underline{v}_- = 0$

On obtient donc :

$$\underline{u}_1 = -\underline{u}_e$$

---

6)



• En utilisant la formule des diviseurs de tension par exemple :

$$\underline{v}_+ = \underline{u}_1 \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R}$$

$$= \underline{u}_1 \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

• en utilisant le théorème de Millman

$$\underline{v_-} = \frac{\underline{u_1}\frac{1}{R} + \underline{u_S}\frac{1}{R}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}}$$

$$= \frac{\underline{u_1} + \underline{u_S}}{2}$$

• l'A.O. est en régime linéaire donc $\underline{\varepsilon} = \underline{v_+} - \underline{v_-} = 0$

$$\frac{\underline{u_1}}{1+jRC\omega} = \frac{\underline{u_1}+\underline{u_S}}{2}$$

$$\boxed{\underline{H_2}(j\omega) = \frac{\underline{u_S}}{\underline{u_1}} = \frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}}$$

---

puis pour le montage complet :

$$\underline{H} = \underline{H_1}\ \underline{H_2}$$

$$\boxed{\underline{H} = -\frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}}$$

---

7)

On écrit les complexes (comme assez souvent) en notation exponentielle.

$$1+jRC\omega = \sqrt{1+R^2C^2\omega^2}\ \exp j\varphi$$

avec $\varphi = \arg(1+jRC\omega)$

$$\boxed{\varphi = \arctan(RC\omega)}$$

$$1-jRC\omega = \sqrt{1+R^2C^2\omega^2}\ \exp -j\varphi$$

$$\boxed{\underline{H} = -\exp(-2j\varphi) = \exp j(\pi-2\varphi)}$$

→ puisque $|\underline{H}|=1$ la tension $\underline{u_S}$ a la même amplitude que la tension $\underline{u_e}$. L'opérateur n'apporte qu'un déphasage.

→ $$\frac{\underline{u_S}}{\underline{u_e}} = -\exp(-2j\varphi)$$

$$\underline{u_S} = \underline{u_e}\exp j(\pi-2\varphi)$$

$$\boxed{\text{La tension de sortie est en avance de } \varphi_D = \pi - 2\varphi = \pi - 2\arctan(RC\omega)}$$

---

8) Il faut, pour $\omega = \omega_P$

$$\varphi_D = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{RC\omega_P = 1}$$
