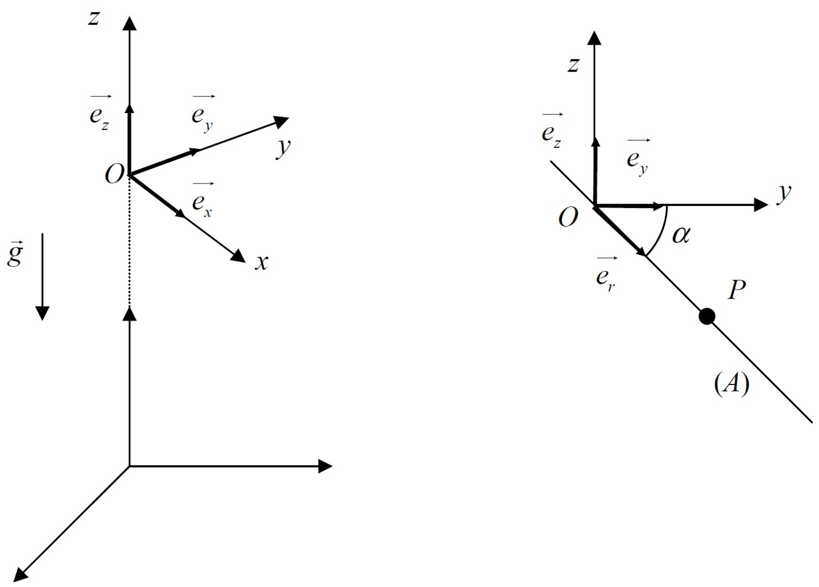
DNS

Sujet

Centrifugeuse

Une centrifugeuse est un appareil destiné à séparer la phase solide d'une suspension liquide-solide. Cette séparation a pour origine la différence des masses volumiques du liquide et des particules solides en suspension dans le fluide. La partie essentielle de cet appareil est constituée d'un rotor lequel est entraîné en rotation à vitesse élevée, autour de son axe de symétrie, supposé ici vertical. Ce rotor supporte une série de tubes à essais identiques dans lesquels se situe la suspension à traiter.

Soit $\mathscr{R}$ un repère lié au laboratoire et considéré comme galiléen. Soit $\mathscr{R}'$ un repère mobile (relativement à $\mathscr{R}$) d'axes Ox , Oy , Oz , les vecteurs unitaires associés s'écrivant $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$. Les axes verticaux des deux repères coïncident, $\mathscr{R}'$ est animé, relativement à $\mathscr{R}$ d'un mouvement de rotation uniforme autour de la verticale. Le vecteur vitesse rotation de $\mathscr{R}'$ relativement à $\mathscr{R}$ est noté $\vec{\Omega}=\Omega\,\vec{u}_z$.



Soit (A) une droite, fixe relativement à $\mathscr{R}'$, située dans le plan yOz . Cette droite est orientée par le vecteur unitaire $\vec{u}_r$, l'angle situé entre les directions de $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_y$ est noté α .

On considère un point P se déplaçant sur la droite (A) , la position de P étant repérée par $r=r(t)$ tel que $\vec{OP}=r\vec{u}_r$. On notera $\vec{g}=-g\vec{u}_z$ le vecteur accélération due à la pesanteur.

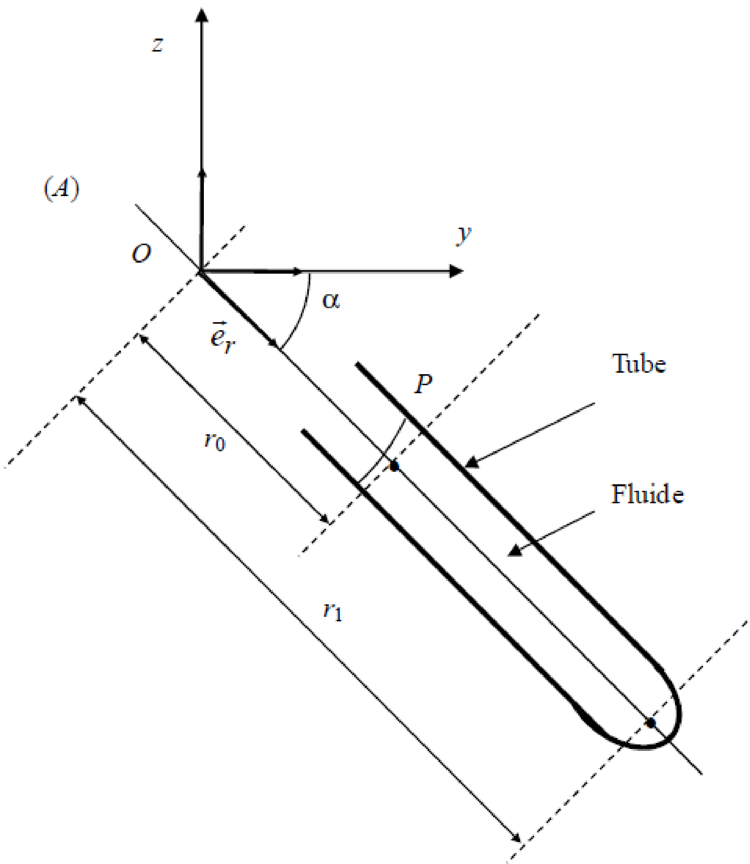
I. Cinématique

1. Déterminer les composantes suivant $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$ des vecteurs $\vec{v}_r$ (vitesse relative de P par rapport à $\mathscr{R}'$), $\vec{v}_e$ (vitesse d'entraînement de P relativement à $\mathscr{R}$), $\vec{a}_r$ (accélération relative), $\vec{a}_e$ (accélération d'entraînement), $\vec{a}_c$ (accélération de Coriolis de P relativement à $\mathscr{R}$).

2. En déduire les expressions de l'accélération de de P par rapport à $\mathscr{R}$ et de la composante de cette accélération selon le vecteur unitaire $\vec{u}_r$. Cette expression sera fournie en fonction de r , $\frac{d^2r}{dt^2}$, Ω et α .

II. Écriture du principe fondamental

On considère maintenant une particule solide de masse volumique ρ_s et de volume V , cette particule se situe au sein d'un fluide de masse volumique ρ . Le fluide est contenu dans un tube cylindrique fixé sur le rotor de la centrifugeuse. Le repère $\mathscr{R}'$ est supposé lié au rotor et le centre de masse de particule sera le point P , défini précédemment.



On considère dans la suite que le mouvement de P ne s'effectue que selon l'axe longitudinal du tube, axe coïncidant avec la droite (A) définie précédemment. La particule est soumise aux trois forces qui sont respectivement : son poids, la poussée d'Archimède $\vec{F}^A$ et une force $\vec{F}^r$ opposée au mouvement due à la viscosité du fluide.

La poussée d'Archimède s'écrit : $\vec{F}^A = -V\,\overrightarrow{grad}(p)$ où p désigne la pression en un point de coordonnées x, y, z du fluide. On donne: $p = p(x, y, z) = \frac{1}{2}\rho\,\Omega^2(x^2+y^2) - \rho\,g\,z + C^{te}$. Ce fluide est à l'équilibre relativement à $\mathscr{R}'$, équilibre supposé non perturbé par le mouvement de la particule.

La force $\vec{F}^r$ est exprimée sous la forme $\vec{F}^r = -k\,\vec{v}_r$ où $\vec{v}_r$ désigne la vitesse de P relativement à $\mathscr{R}'$ (k : constante positive).

3. Donner les expressions des trois forces indiquées précédemment suivant $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$ et en déduire la projection de chacune de ces forces selon $\vec{u}_r$.
4. Établir l'équation différentielle du mouvement de la particule selon la droite (A) , équation faisant intervenir ρ_s , ρ , Ω , α , g , k/V , r , $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d^2r}{dt^2}$.

III. Résolution

On pose $r_e = -\frac{g\sin\alpha}{\Omega^2\cos^2\alpha}$ et $\beta = \sqrt{1-\frac{\rho}{\rho_s}}\ \Omega\cos\alpha$ (puisque $\rho < \rho_s$)

5. Dans un premier temps, on cherche une solution simplifiée, en négligeant la force de viscosité. Résoudre l'équation différentielle. On suppose que, en $t=0$, la particule se situe en $r=r_0$ sans vitesse initiale. On écrira la solution en fonction de r_0 , r_e , β et t .
6. Le temps mis par la particule pour passer de la position $r=r_0$ (haut du tube) sans vitesse relative initiale à la position r_1 (fond du tube) étant noté τ , exprimer τ en fonction de Ω , r_0 , r_1 , r_e .

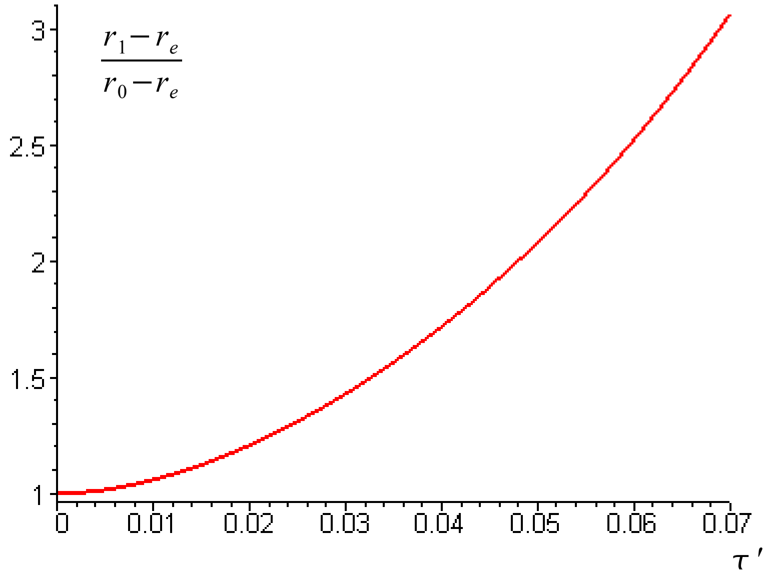
   Application numérique:

   $$\alpha = 45°\ ,\quad g = 10\,m\,s^{-2}\ ,\quad \Omega = 5\,000\ \textit{tours.min}^{-1}\ ,\quad r_0 = 10\,cm\ ,\quad r_1 = 20\,cm\ ,\quad \frac{\rho}{\rho_s} = \frac{1}{1{,}01}$$

   Calculer r_e et τ .
7. Existe-t-il une position d'équilibre relatif pour la particule dans le référentiel tournant ?
8. On cherche la solution exacte en tenant compte cette fois de la force de viscosité. On posera : $\lambda = \frac{k}{2\rho_s V}$ et $\beta' = \sqrt{\beta^2+\lambda^2}$. Déterminer les expressions des deux racines de l'équation caractéristique en fonction de λ et β' . Quels sont les signes de ces deux racines ?
9. Déterminer l'expression de $r(t)$ en fonction de r_0 , r_e , β' , λ et t .
10. Établir l'expression du rapport $\frac{r_1-r_e}{r_0-r_e}$ en fonction de λ , β' et τ' , où τ' est le temps

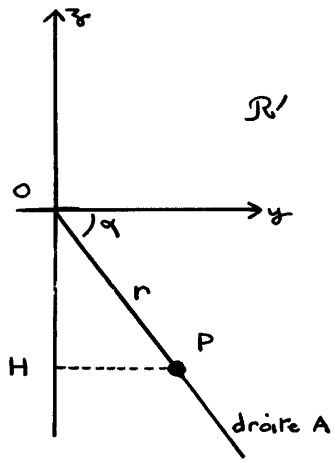
mis pour passer de r_0 à r_1 .

11.À partir du graphe représentant les variations du rapport $\dfrac{r_1 - r_e}{r_0 - r_e}$ en fonction de τ' , donner la valeur de τ' (ce graphe est tracé pour $\lambda = 25\,s^{-1}$ et les valeurs numériques précédemment données).



Réponses

1) → Le mouvement relatif correspond au mouvement de P par rapport au référentiel tournant $\mathcal{R}'$



C'est le mouvement rectiligne de P selon la droite Δ

$$\overrightarrow{OP} = r\,\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{v_r} = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{a_r} = \left(\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \ddot{r}\,\overrightarrow{u_r}$$

On demande d'écrire le résultat dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$

$$\overrightarrow{u_r} = \cos\alpha\,\overrightarrow{u_y} - \sin\alpha\,\overrightarrow{u_z}$$

Finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{v_r} = \dot{r}\,(\cos\alpha\,\overrightarrow{u_y} - \sin\alpha\,\overrightarrow{u_z})}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a_r} = \ddot{r}\,(\cos\alpha\,\overrightarrow{u_y} - \sin\alpha\,\overrightarrow{u_z})}$$

→ Le mouvement d'entrainement correspond au mouvement du point coïncidant : $(P \in \mathcal{R}')$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire.

C'est le mouvement circulaire de $(P \in \mathcal{R}')$ qui décrit le cercle de centre H (voir figure) et de rayon $HP = r\cos\alpha$

C'est donc aussi le mouvement d'un point du solide $\mathcal{R}'$

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OP}_{\in\mathcal{R}'}}{dt}$$

ou $$\left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{r=cste}$$

ou $\cancel{\overrightarrow{v}(O)}_{\text{nul}} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP}$

ou $\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{HP}$ ... etc

$$\boxed{\overrightarrow{v_e} = -\Omega\, r \cos\alpha\ \overrightarrow{u_x}}$$

Ce mouvement circulaire est uniforme donc l'accélération est centripète.

$$\overrightarrow{a_e} = -\Omega^2\ \overrightarrow{HP}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a_e} = -\Omega^2\ r \cos\alpha\ \overrightarrow{u_y}}$$

(une démonstration possible puisque l'on se trouve ici en cinématique du solide avec $\|\overrightarrow{HP}\|$ = constante :

$$\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{HP}$$

$$\overrightarrow{a_e} = \cancel{\frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}} \wedge \overrightarrow{HP} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \underbrace{\frac{d\overrightarrow{HP}}{dt}}_{\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{HP}}$$

$$= \overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{HP})$$

$$= \overrightarrow{\Omega}\, \underbrace{(\overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{\Omega})}_{\text{nul}} - \overrightarrow{HP}\, \overrightarrow{\Omega}^2 \quad)$$

→ L'accélération de Coriolis est :

$$\overrightarrow{a_C} = 2\ \overrightarrow{\omega}_{\text{entrainement}} \wedge \overrightarrow{v}_{\text{relative}}$$

$$= 2\ \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$$

$$= 2\ \Omega\ \overrightarrow{u_z} \wedge \dot{r}\,(\cos\alpha\ \overrightarrow{u_y} - \sin\alpha\ \overrightarrow{u_z})$$

$$\boxed{\overrightarrow{a_C} = -2\Omega\,\dot{r}\cos\alpha\ \overrightarrow{u_x}}$$

---

3) L'accélération absolue $\overrightarrow{a}/\mathcal{R}$ est donc

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_C}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{a} = &(-2\Omega\,\dot{r}\cos\alpha)\ \overrightarrow{u_x} \\ &+(\ddot{r}\cos\alpha - \Omega^2 r\cos\alpha)\ \overrightarrow{u_y} \\ &+(-\ddot{r}\sin\alpha)\ \overrightarrow{u_z}\end{aligned}}$$

et sa projection selon $\overrightarrow{u_r}$ est

$$a_r = \overrightarrow{a} \cdot \underbrace{\overrightarrow{u_r}}_{(\cos\alpha\ \overrightarrow{u_y} - \sin\alpha\ \overrightarrow{u_z})}$$

$$a_r = (\ddot{r} - \Omega^2 r)\cos^2\alpha + \ddot{r}\sin^2\alpha$$

$$\boxed{a_r = \ddot{r} - \Omega^2 r \cos^2\alpha}$$

---

3) <u>force poids :</u>

$$m\vec{g} = -\rho_s V g \,\vec{u_z}$$

dont la composante selon $\vec{u_r}$ est

$$m g_r = -\rho_s V g \,\vec{u_z}.\vec{u_r}$$

$$\boxed{m g_r = \rho_s V g \sin\alpha}$$

<u>poussée d'Archimède :</u>

$$\vec{F_A} = -V \,\overrightarrow{\text{grad}}\, p$$

avec $p = \frac{1}{2}\rho\Omega^2(x^2+y^2) - \rho g z + Cte$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, p = \rho\Omega^2 x \,\vec{u_x} + \rho\Omega^2 y \,\vec{u_y} - \rho g \,\vec{u_z}$$

$$\vec{F_A} = -\rho V \Omega^2 x \,\vec{u_x} - \rho V \Omega^2 y \,\vec{u_y} + \rho V g \,\vec{u_z}$$

dont la composantes selon $\vec{u_r}$ est

$$F_{A_r} = -\rho V \Omega^2 \underbrace{y}_{r\cos\alpha} \underbrace{\vec{u_y}\,\vec{u_r}}_{\cos\alpha} + \rho V g \underbrace{\vec{u_z}\,\vec{u_r}}_{-\sin\alpha}$$

$$\boxed{F_{A_r} = -\rho V\,(\Omega^2 r \cos^2\alpha + g \sin\alpha)}$$

<u>force de viscosité :</u>

$$\vec{F_r} = -k\,\vec{v_r} = -k\,\dot{r}\,\vec{u_r}$$

dont la composante selon $\vec{u_r}$ est

$$\boxed{F_r = -k\,\dot{r}}$$

---

4) Le principe fondamental appliqué à la particule dans le référentiel galiléen du laboratoire donne :

$$m\vec{g} + \vec{F_A} + \vec{F_r} = \underset{\rho_s V}{\underset{\downarrow}{m}}\,\vec{a}$$

ce qui en projection selon $\vec{u_r}$ donne :

$$m g_r \quad + \quad F_{A_r} \quad + F_r \quad = \rho_s V a_r$$

$$\rho_s V g \sin\alpha \quad - \rho V(\Omega^2 r \cos^2\alpha + g\sin\alpha) - k\dot{r} \quad = \rho_s V(\ddot{r} - \Omega^2 r \cos^2\alpha)$$

$$(\rho_s - \rho) V g \sin\alpha \quad + (\rho_s - \rho) V \Omega^2 r \cos^2\alpha \quad - k\dot{r} = \rho_s V \ddot{r}$$

$$\left(1 - \frac{\rho}{\rho_s}\right) g \sin\alpha \quad + \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s}\right) \Omega^2 r \cos^2\alpha \quad - \frac{k}{\rho_s V}\dot{r} = \ddot{r}$$

finalement :

$$\boxed{\ddot{r} + \frac{k}{\rho_s V}\dot{r} - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s}\right)\Omega^2 \cos^2\alpha \; r = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s}\right) g \sin\alpha}$$

---

5) L'équa diff s'écrit dans le cas simplifié

$$\ddot{r} \quad - \quad \beta^2 \; r \quad = - \quad \beta^2 \; r_e$$

dont la solution est :

$$r = A e^{\beta t} + B e^{-\beta t} + r_e$$

$$\text{C.I.} \quad \begin{cases} r_0 = A + B + r_e \\ 0 = A\beta - B\beta \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad A = B = \frac{r_0 - r_e}{2}$$

$$r = \frac{r_0 - r_e}{2}\left(e^{\beta t} + e^{-\beta t}\right) + r_e$$

$$\boxed{r - r_e = (r_0 - r_e) \; \mathrm{ch}(\beta t)}$$

---

6) A l'instant τ , $r = r_1$

$$r_1 - r_e = (r_0 - r_e) \; \mathrm{ch}\, \beta\tau$$

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\beta} \; \mathrm{argch}\left(\frac{r_1 - r_e}{r_0 - r_e}\right)}$$

A.N.

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_s}} \; \Omega \cos\alpha$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{1{,}01}} \quad \frac{5000 \times 2\pi}{60} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\beta = 36{,}8 \; s^{-1}}$$

cf $e^{\beta t}$ donc βt est sans dimension
et $[\beta] = T^{-1}$

$$r_e = -\frac{g \sin\alpha}{\Omega^2 \cos^2\alpha}$$

$$= -\frac{10 \frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{5000 \times 2\pi}{60}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$\boxed{r_e = -51{,}6 \ 10^{-6} \text{m}}$$

avec $r_1 = 20$ cm

$r_0 = 10$ cm

($r_e = 0{,}00516$ cm)

donc $r_e \ll r_1$

$r_e \ll r_0$

$$\tau = \frac{1}{\beta} \operatorname{argch}\left(\frac{r_1 - r_e}{r_0 - r_e}\right)$$

$$\simeq \frac{1}{\beta} \operatorname{argch}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)$$

$$\simeq \frac{1}{36{,}8} \operatorname{argch}\left(\frac{20}{10}\right)$$

$$\boxed{\tau = 0{,}0357 \text{ s}}$$

---

7) La position d'équilibre dans le référentiel tournant (le point P étant supposé bouger selon la droite, axe du tube) correspond à $\ddot{r} = 0$

(le repos correspond à $\dot{r} = 0$)

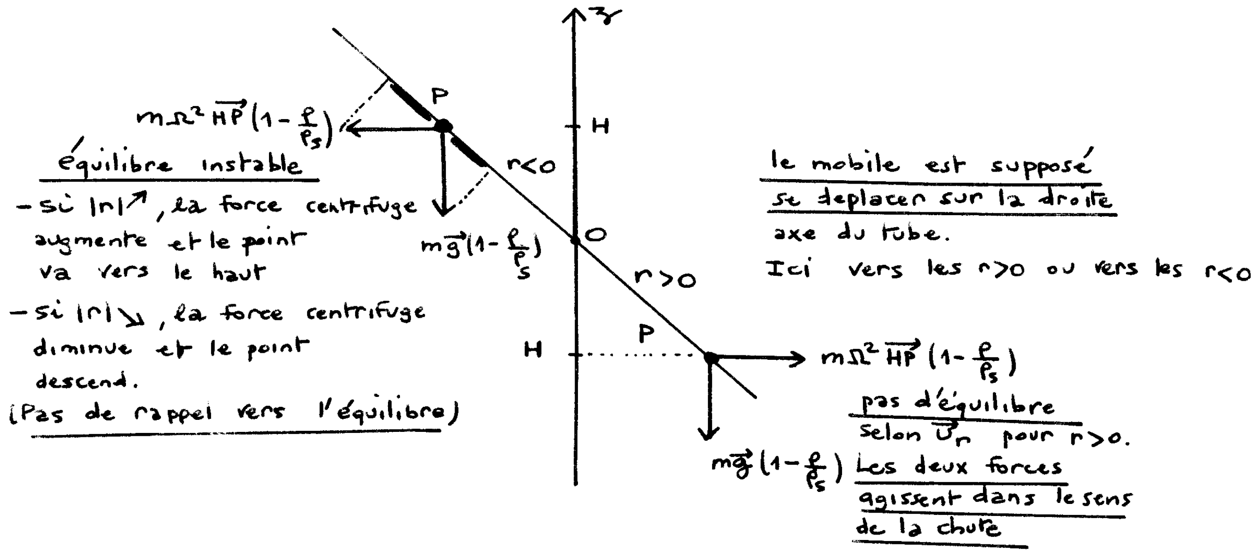
donc cf 5) avec $\ddot{r} = 0$ (et $\dot{r} = 0$),

la position d'équilibre serait la solution particulière de l'équa diff, soit

$$\boxed{r_{eq} = r_e}$$

mais :

- on trouve $r_{eq} < 0$ alors que $0 < r$
- la valeur obtenue correspondrait à une équilibre instable et si le mobile part de $r = 0$, sous l'action du poids, il n'ira jamais vers cette position d'équilibre.



---

8) L'équa diff devient :

$$\ddot{r} + \frac{K}{\rho_s V}\dot{r} - \beta^2 r = -\beta^2 r_e$$

$$\boxed{\ddot{r} + 2\lambda\,\dot{r} - \beta^2(r-r_e) = 0}$$

on cherche des solutions de la forme $(r-r_e)$ en $\exp(\gamma t)$ d'où l'équation caractéristique

$$\gamma^2 + 2\lambda\,\gamma - \beta^2 = 0$$

$$\gamma = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2+\beta^2}$$
$$= -\lambda \pm \beta'$$

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma_1 &= -\lambda + \beta' &> 0\\ \gamma_2 &= -\lambda - \beta' &< 0\end{aligned}}$$

---

9) $\longrightarrow$ $(r-r_e) = A\,e^{\gamma_1 t} + B\,e^{\gamma_2 t}$

$$(r-r_e) = e^{-\lambda t}\left(A\,e^{\beta' t} + B\,e^{-\beta' t}\right)$$

$\longrightarrow$ $\dfrac{d(r-r_e)}{dt} = -\lambda\,(r-r_e) + e^{-\lambda t}\,\beta'\left(A\,e^{\beta' t} - B\,e^{-\beta' t}\right)$

on écrit les conditions initiales :

$$(r-r_e)_{t=0} = (r_0 - r_e) = A + B$$

$$\left.\frac{d(r-r_e)}{dt}\right|_{t=0} = 0 = -\lambda\,(r_0-r_e) + \beta'\,(A-B)$$

$$\begin{aligned} A + B &= r_0 - r_e \\ A - B &= \frac{\lambda}{\beta'}(r_0 - r_e) \\ \hline A &= \frac{1}{2}(r_0 - r_e)\left(1 + \frac{\lambda}{\beta'}\right) \\ B &= \frac{1}{2}(r_0 - r_e)\left(1 - \frac{\lambda}{\beta'}\right) \end{aligned}$$

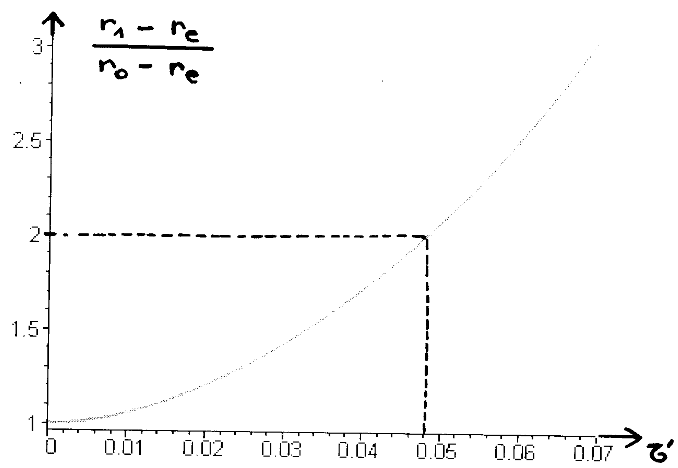
finalement :

$$(r - r_e) = e^{-\lambda t}\ \frac{1}{2}(r_0 - r_e)\left(\left(1+\frac{\lambda}{\beta'}\right)e^{\beta' t} + \left(1-\frac{\lambda}{\beta'}\right)e^{-\beta' t}\right)$$

$$\boxed{(r - r_e) = (r_0 - r_e)\ e^{-\lambda t}\left(ch(\beta' t) + \frac{\lambda}{\beta'} sh(\beta' t)\right)}$$

10)
$$\boxed{\frac{r_1 - r_e}{r_0 - r_e} = e^{-\lambda \tau'}\left(ch(\beta' \tau') + \frac{\lambda}{\beta'} sh(\beta' \tau')\right)}$$

11)



on trouve $\boxed{\tau' = 0{,}048\ s}$ (au lieu de 0,036 s quand on néglige la force de viscosité)