DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Inductance

Une méthode de détection des véhicules (utilisée pour l'ouverture de barrières automatiques ou le déclenchement de feux tricolores) utilise un capteur $(figure\,1)$.

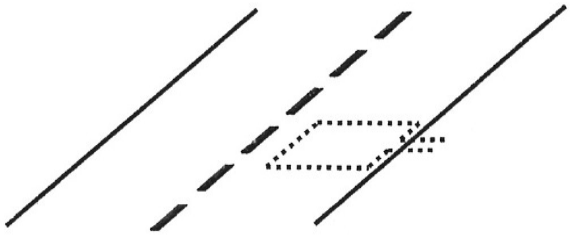


Figure 1

Le capteur est une boucle conductrice implantée dans la chaussée, formée de spires rectangulaires dont la taille est de l'ordre du mètre. Cette boucle fait partie d'un circuit électronique oscillant dont la fréquence est fonction de son inductance. En présence d'un véhicule, l'environnement électromagnétique de la boucle est perturbé à cause des courants de Foucault induits dans les parties métalliques du véhicule. L'inductance du circuit est alors modifiée et la détection de la variation de fréquence des oscillations permet d'en déduire la présence du véhicule.

I. Inductance de la boucle

La boucle est composée de n spires rectangulaires identiques, de largeur $D=2{,}0\,m$ (en travers de la voie) et de longueur $G=1{,}0\,m$, bobinées en série $(figure\,2)$. Celles-ci sont réalisées avec un fil de cuivre de section $s=1{,}5\,mm^2$.

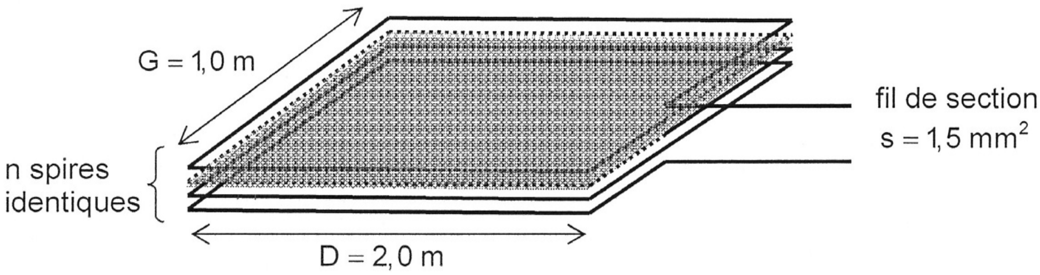


Figure 2

1. Donner la relation entre l'inductance L d'un circuit, l'intensité I qui le traverse et le flux propre Φ à travers sa surface.

A. Champ magnétique créé par un fil infini

On considère un fil infini d'axe Oz (de vecteur unitaire $\vec{u}_z$) et de rayon e parcouru par un courant d'intensité $I>0$ dans le sens z croissant $(figure\,3)$. Le vecteur densité de courant, noté $\vec{j}$ est supposé uniforme dans une section du fil. En coordonnées cylindriques, tout point M est repéré par ses coordonnées (r,φ,z) dans la base orthonormée $(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$.

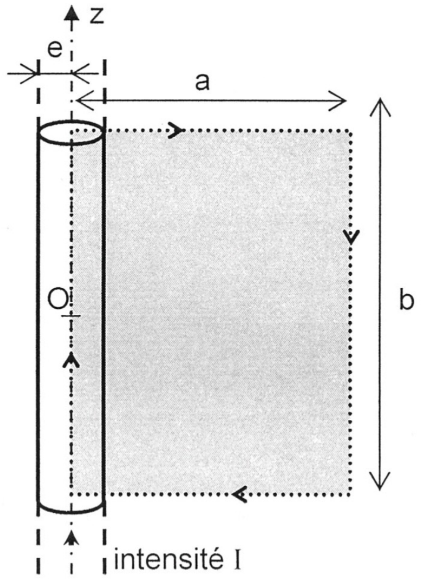


Figure 3

2. Exprimer $\vec{j}$ en fonction de I , e et $\vec{u}_z$.

3. Établir, par des arguments de symétrie, la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en un point quelconque M de l'espace. De quelle(s) coordonnée(s) la norme de $\vec{B}(M)$ dépend-elle? En déduire la forme générale de $\vec{B}(M)$.

4. Déterminer l' expression de $\vec{B}(M)$ en un point M situé à l'extérieur du fil ($r>e$) en fonction de I et r .

5. Déterminer l' expression de $\vec{B}(M)$ en un point M situé à l'intérieur du fil ($r<e$) en fonction de I , e et r .

6. Représenter l'allure de $\|\vec{B}(M)\|$ en fonction de r , en précisant littéralement les coordonnées du (des) point(s) particulier(s).

B. Inductance d'une spire

7. Exprimer, en fonction de μ_0 , I , a , b et e , le flux Φ_f du champ magnétique créé par le fil précédent à travers la surface orientée grise définie sur la *figure* 3 .

Pour calculer l'inductance propre d'une spire, les effets de bords sont négligés. Dans un souci de simplification, le flux produit par chaque côté de la spire sera assimilé au flux Φ_f , calculé à la question précédente.

8. Déduire des réponses précédentes, l'expression de l'inductance L_1 d'une spire en fonction de μ_0 , D , G et e (considérer que la perméabilité magnétique du bitume vaut μ_0).

9. Calculer la valeur numérique de L_1 sachant que $\mu_0=4\pi.10^{-7}\,H.m^{-1}$.

C. Inductance de la boucle

Les spécifications techniques d'un constructeur de tels systèmes de détection précisent que l'inductance totale de la boucle doit être comprise entre 70 et $500\,\mu H$.

10. Exprimer l'inductance L d'une boucle composée de n spires en fonction de n et L_1 .

11.Calculer les valeurs minimale et maximale de n . On pourra commenter le résultat sachant que, pour des spires ayant les dimensions prises dans ce problème, le constructeur recommande d'en câbler 3 à 5 en série.

II. Détection d'un véhicule

Lorsqu'un véhicule se positionne à une distance h juste au dessus de la boucle, la face inférieure de son châssis, subissant le champ magnétique variable créé par l'enroulement est le siège de courants de Foucault sur une faible épaisseur δ $(figure\,4)$. Ces courants induits produisent à leur tour un champ magnétique induit qui va engendrer un flux à travers l'enroulement. Ce phénomène d'induction a pour effet de faire varier l'inductance de la boucle enterrée.

Sauf avis contraire, on se place dans le cas où la boucle enterrée n'est constituée que d'un seul enroulement.

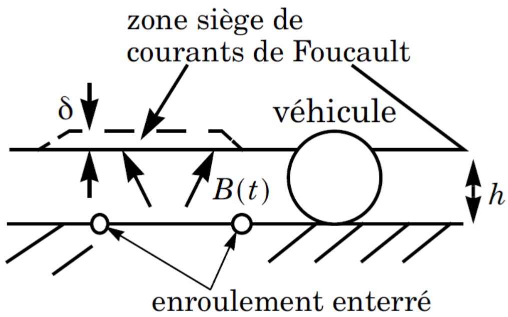


Figure 4

A. Modélisation par une inductance propre variable

Cette partie est totalement indépendante de la suite et peut donc être ignorée en cas de difficulté.

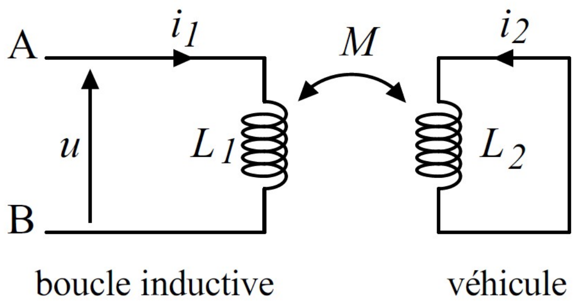


Figure 5

Le capteur est modélisé par AB formé d'une boucle de courant d'intensité variable $i_1(t)$ et d'inductance propre L_1 . Lorsqu'un véhicule se trouve à proximité de la boucle, des courants de Foucault sont induits dans la masse métallique. On modélise ce phénomène par un deuxième circuit d'inductance propre L_2 , parcouru par un courant d'intensité $i_2(t)$. On note M le coefficient d'inductance mutuelle et on négligera la résistance des circuits. Le coefficient de couplage est k avec $k=\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$.

12.Donner l'expression du flux total du champ magnétique noté Φ_1 dans la boucle en fonction de L_1 , M , i_1 , i_2 .

13.Donner l'expression du flux Φ_2 dans le véhicule.

14.Déterminer la force électromotrice induite e_1 au niveau de la boucle et en déduire la tension u notamment en fonction des dérivées des intensités.

15.En étudiant le circuit (2), trouver une relation entre ces deux dérivées.

16.Montrer qu'en présence du circuit (2), le dipôle AB est équivalent à une inductance propre L'_1 que l'on exprimera en fonction de L_1 et de k

B. Courants induits dans le châssis

Les courants induits dans le châssis produisent un champ magnétique induit noté $\vec{B}_i(M)$.

On note h la distance entre le bas de la voiture et le sol (on néglige la profondeur d'enfouissement de l'enroulement). Compte tenu de la faible valeur de l'épaisseur de peau δ par rapport à h , les courants induits dans le bas du châssis peuvent être considérés comme surfaciques et sont notés $\vec{j}_S$.

Pour simplifier l'étude analytique, on se placera ici dans le cas où $D \gg G$, c'est-à-dire que l'enroulement est assimilable à deux fils infinis supposés de plus de rayon négligeable, distants de G et parcourus par deux courants de même intensité I mais de sens opposés. Par ailleurs, on suppose que la carcasse métallique du véhicule est assimilable à un conducteur parfait et occupe tout le demi-espace $y>0$. La nappe de courants induits à la surface est donc dans le plan $y=0$. La *figure* 6 synthétise la modélisation. Le sol, assimilé à du vide, n'apparaît plus.

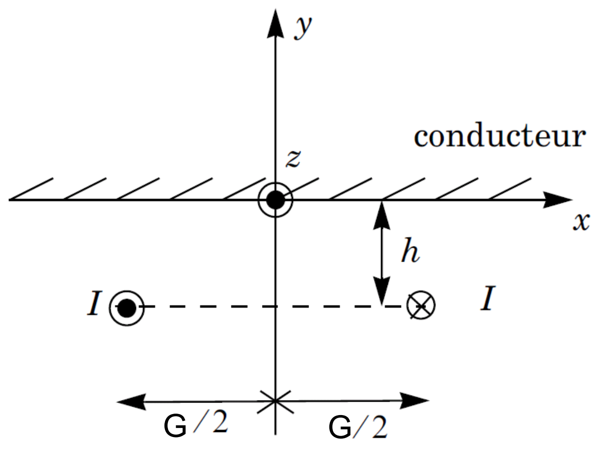


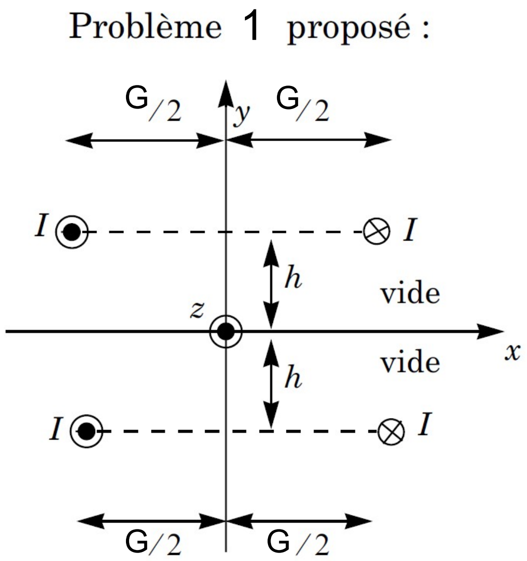
Figure 6

17.Rappeler la relation de passage pour le champ magnétique à la traversée d'une nappe de courant surfacique.

18.Que peut-on dire du champ magnétique dépendant du temps dans un conducteur parfait. Justifier. Écrire, pour le cas étudié, la relation de passage en $y=0$ reliant $\vec{j}_s$ et $\vec{B}(y=0^-)$. Que retrouve-t-on concernant la direction de $\vec{B}(y=0^-)$?

On se propose, en revenant en <u>magnétostatique</u>, de trouver un problème équivalent, c'est-à-dire une distribution de courant simple qui crée, sous le véhicule, le même champ magnétique que les courants $\vec{j}_s(x)$ induits. On peut montrer et on admettra, qu'il suffit de remplacer le conducteur occupant le demi-espace $y>0$ par deux fils infinis dont la position est symétrique par rapport au plan $y=0$ des deux fils représentant la boucle enterrée.

On envisage les deux problèmes équivalents suivants dont l'un constitue la solution cherchée.



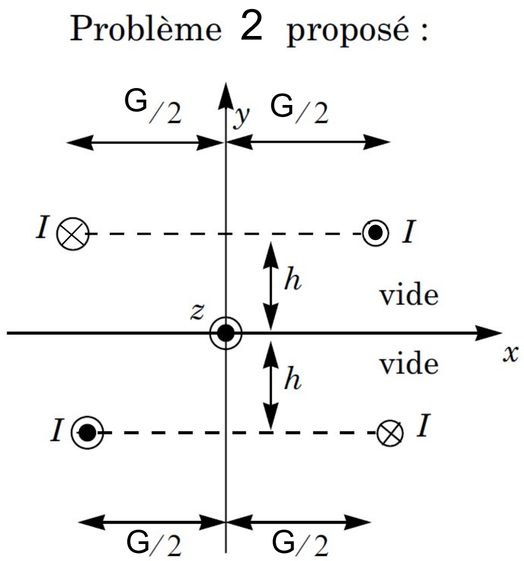


Figure 7

19.Pour l'un des problèmes, $\vec{B}(y=0^-)$ est tangentiel au plan xz et pour l'autre $\vec{B}(y=0^-)$ est normal au plan. Justifier avec soin et en déduire le problème magnétostatique équivalent recherché.

20.Déterminer $\vec{B}(y=0^-)=\vec{B}(y=0)$ grâce au problème équivalent et en déduire $\vec{j}_s(x)$.

Ce dernier résultat ne sera pas utilisé dans la suite du sujet.

C. Détermination de la variation d'inductance propre par méthode graphique.

On admet que, dans l'espace sous le châssis, le champ magnétique induit $\vec{B}_i(M)$ peut-être déterminé en considérant une spire miroir identique à la spire enterrée et symétrique, par rapport au bas du châssis, de cette spire enterrée. On admet que le champ magnétique induit doit créer dans la spire enterrée un flux de signe contraire au flux propre de la spire enterrée.

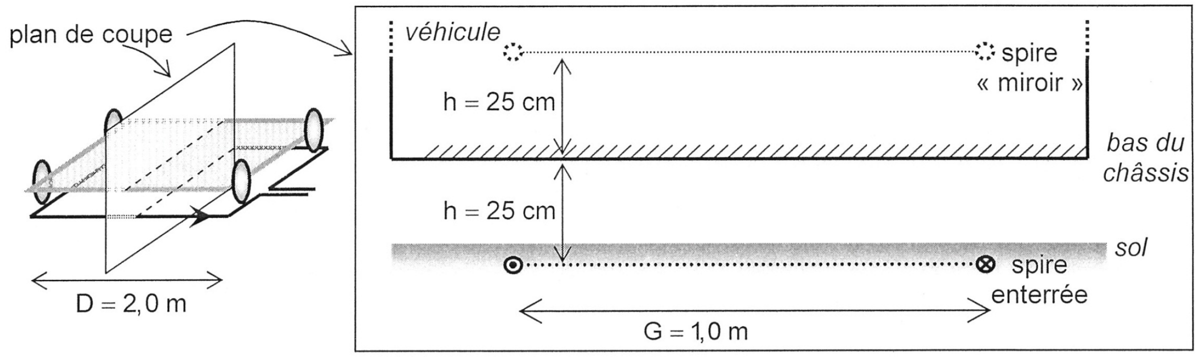


Figure 8

21.Dans quel sens faut-il orienter la spire miroir?

On se place à nouveau en magnétostatique. La carte du champ magnétique induit $\vec{B}_i(M)$ dans un plan de coupe perpendiculaire au plan de la route et au grand côté (D) de la spire est représentée sur la *figure* 9 .

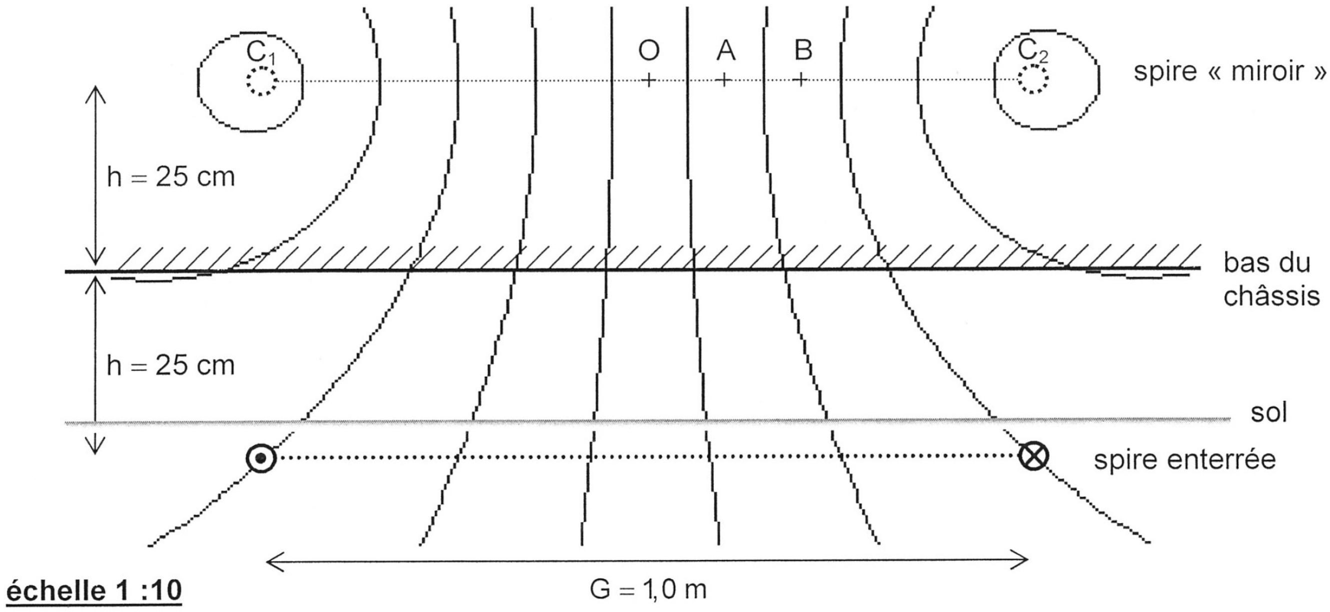


Figure 9

22.Reproduire sur la copie l'allure de ta carte de champ créé par la spire miroir et indiquer l'orientation des lignes de champ.

Afin de simplifier les calculs, la spire miroir est, à nouveau, assimilée à deux fils infinis parallèles $(D \gg G)$. Les effets de bords seront donc négligés et seules les contributions des deux côtés de longueur D seront prises en compte. Le champ magnétique qu'ils créent sera assimilé à celui de deux fils infinis parallèles espacés de G .

23.Calculer les valeurs numériques de la norme du champ magnétique que créerait la seule spire miroir $\vec{B}_{miroir}(M)$ en O , A et B , lorsque $I=1\,A$ en utilisant la *figure* 9 et son échelle pour déterminer les distances nécessaires.

24.Quelle propriété vérifie le flux du champ magnétique le long d'un tube de champ. La démontrer soigneusement à l'aide d'un schéma explicatif.

25.En déduire une estimation de la valeur numérique du flux Φ_i créé par la spire miroir à travers la spire enterrée.

D. Variation relative de l'inductance en présence de véhicule

26.En présence du véhicule, le flux dans la boucle n'est plus égal au flux propre. Il faut tenir compte de Φ_i . Montrer qu'en présence du véhicule, on peut considérer que l'inductance de la boucle varie de ΔL_1 . Exprimer ΔL_1 . Application numérique. Le véhicule fait-il augmenter ou diminuer l'inductance de la boucle.

27.Calculer la variation relative $\frac{\Delta L_1}{L_1}$ de l'inductance d'une spire. En déduire la variation relative $\frac{\Delta L}{L}$ de l'ensemble de la boucle en présence d'un véhicule. Commenter l'ordre de grandeur des résultats obtenus.

III. Circuit électrique

Afin de détecter cette variation d'inductance, la boucle inductive est branchée en parallèle avec avec un condensateur de capacité C $(figure\, 10)$. Celle-ci ne se comporte pas comme une inductance pure et présente une résistance r due à la résistivité du fil qui la constitue.

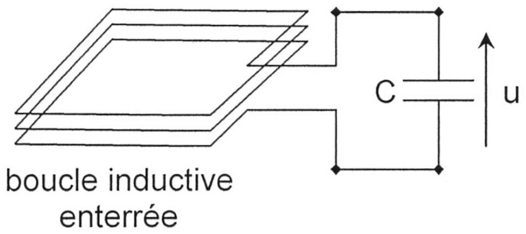


Figure 10

Données: $L=100\,\mu H$, $n=3$, $D=2{,}0\,m$, $G=1{,}0\,m$ et $s=1{,}5\,mm^2$.

28.Rappeler l'expression de la résistance d'un barreau conducteur de longueur ℓ et de section s , constitué d'un métal de conductivité σ .

29.En déduire la valeur numérique de la résistance r de la boucle ($\sigma_{cuivre}=6{,}0 \,.\, 10^7\, S.m^{-1}$).

Dans toute la suite du problème, la boucle est modélisée par une bobine idéale d'inductance L (en l'absence de véhicule) en série avec une résistance r . Le dispositif décrit sur la $figure\, 10$ peut donc être modélisé par le circuit de la $figure\, 11$.

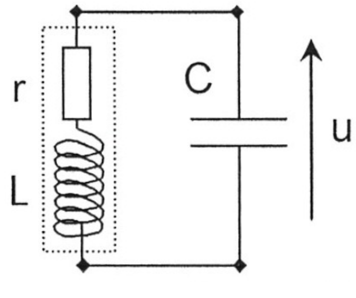


Figure 11

30.Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u .

31.En déduire le facteur de qualité Q et la fréquence propre f_0 du circuit.

32.Le facteur de qualité peut-il être amélioré en augmentant le nombre de spires n ?

Cette fréquence est ensuite mesurée par un fréquencemètre électronique qui délivre une tension proportionnelle à f_0 et permet de déterminer ses variations; un signal de commande est produit lorsque celles-ci dépassent un seuil fixé.

Le constructeur précise que la valeur de f_0 doit être comprise entre $10\,kHz$ et $90\,kHz$ et que le seuil de détection de la variation de fréquence peut être réglé entre $0{,}01\ \%$ et 2% .

33.Calculer la gamme de valeurs dans laquelle la capacité C doit être choisie.

34.Exprimer la variation relative de la fréquence d'oscillation $\dfrac{\Delta f_0}{f_0}$ en fonction de celle de l'inductance de la boucle $\dfrac{\Delta L}{L}$. Lorsqu'un véhicule se place au dessus de la boucle inductive, f_0 diminue-t-elle ou augmente-t-elle?

35.La valeur de $\dfrac{\Delta L}{L}$ calculée précédemment lors de la présence d'un véhicule donne-t-elle lieu à une variation de fréquence compatible avec les spécifications du constructeur? Commenter ce résultat.

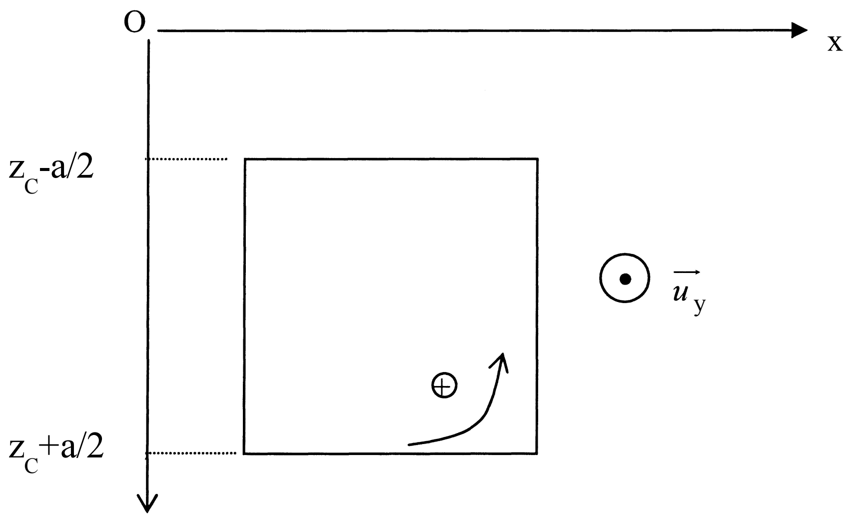
Chute d'un cadre dans un champ magnétique

I. Chute dans un champ permanent

On considère un cadre carré de côté a constitué d'un fil conducteur de résistance R, d'inductance négligeable et de masse m. Il est placé dans un plan vertical, soumis à la pesanteur ($g=9{,}8\,ms^{-2}$) et plongé dans un champ magnétique dont on ne considère, dans cette étude, que la composante perpendiculaire au plan de la figure notée $\vec{B}$, donnée par la relation:

$$\vec{B}=B(z)\vec{u}_y=(B_0-\alpha z)\vec{u}_y$$

Le cadre est mécaniquement astreint à se translater selon la direction de Oz (car les autres composantes du champ magnétique ont tendance à faire tourner le cadre); dans tout le problème, on néglige tout frottement (liaison glissière non dissipative).



Le sens positif choisi est indiqué sur la figure.

Le centre du cadre a pour cote z_C.

Au temps $t=0$, on libère le cadre dont la vitesse est nulle, le centre étant à la cote $z_C=0$.

1. Y a-t-il un phénomène d'induction au cours de la chute dans le cas $\alpha=0$? Justifier.

Dans la suite, on suppose $\alpha>0$.

2. Prévoir (si possible de deux façons différentes) le sens du courant induit dans le cadre.
3. Exprimer le flux du champ magnétique à travers le cadre. Faire le calcul littéral de l'intégrale et donner le résultat notamment en fonction de z_C, Commenter le résultat. En déduire la force électromotrice induite dans le circuit en fonction de v (la vitesse du cadre est notée $\vec{v}=v\vec{u}_z$).

4. Déterminer la force électromotrice par une deuxième méthode en exprimant $\oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \vec{dl}$.

5. Exprimer la résultante des forces de Laplace sur le cadre en fonction de l'intensité i du courant induit. Commentaire ?

On souhaite déterminer la loi horaire $z_C(t)$ régissant le mouvement du cadre.

6. Écrire l'équation mécanique du mouvement.

7. Écrire l'équation électrique du circuit.

8. En déduire l'équation différentielle satisfaite par $z_C(t)$ et faire apparaître une constante de temps τ que l'on exprimera en fonction de a , α , R et m .

9. Exprimer la vitesse v du cadre et préciser la vitesse limite v_{limite} .

10. Calculer τ et v_{limite} pour $R=0{,}010\,\Omega$; $m=0{,}010\,kg$; $\alpha=6{,}4\,T\,m^{-1}$; $a=0{,}10\,m$.

II. Chute dans un champ non permanent

A partir de l'instant $t_0=10\,s$, on fait rapidement chuter l'intensité du champ magnétique selon la loi: $B(z,t)=B_0-\alpha z-\beta(t-t_0)$ avec $\beta=0{,}30\,T\,s^{-1}$

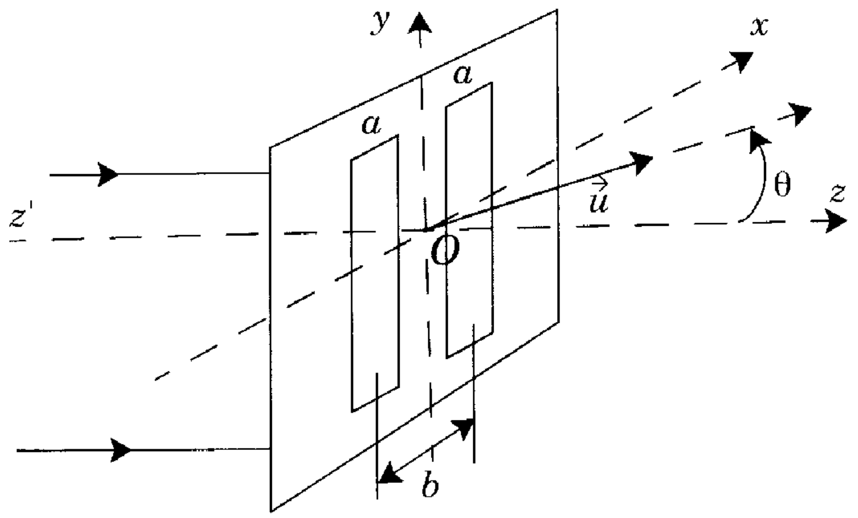
11. Déterminer v pour $t>t_0$. Application numérique.

12. Tracer l'allure de la courbe donnant v en fonction de t , pour t variant de 0 à 13s .

Diffraction

On considère une pupille diffractante, contenue dans le plan Oxy , constituée par l'association de deux fentes identiques de largeur a et distantes entre elles de b . Cette pupille est éclairée sous incidence normale par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ . On se propose d'établir l'expression de l'intensité lumineuse diffractée à l'infini dans la direction θ repérée par le vecteur unitaire $\vec{u}$ de composantes $(\sin\theta, 0, \cos\theta)$ (*figure* 1).

Uniquement pour les applications numériques, on prendra: $a=0{,}600\,\mu m$, $b=1{,}500\,\mu m$ et $\lambda=600\,nm$



On pose $j^2=-1$. En ce qui concerne les notations complexes, on travaillera en $\exp(+j\omega t)$.

I. Généralités

1. Énoncer le principe de Huygens-Fresnel permettant de calculer l'amplitude diffractée.
2. Pourquoi n'est-il pas nécessaire de préciser la hauteur h des fentes selon Oy ?
3. Exprimer le retard de phase du rayon, diffracté dans la direction θ ($\theta\in[-\pi/2, +\pi/2]$) par un point P d'une fente au cours de la propagation de P à un point M en fonction de $\vec{k}$ (vecteur d'onde du rayon diffracté dans la direction du vecteur $\vec{u}$) et de $\overrightarrow{PM}$.
4. Justifier que, si l'on considère comme référence de phase le rayon qui serait diffracté par O dans la direction $\vec{u}$, on pourra écrire, ici, pour l'amplitude complexe de la vibration lumineuse diffractée à l'infini dans la direction θ : $\underline{s}(\theta)=K\int\exp(+j\vec{k}\,\overrightarrow{OP})\,dx$ où K est une constante que l'on ne cherchera pas à expliciter.

II. Une fente diffractante

5. On ferme dans un premier temps la fente centrée en $x=-b/2$. Établir en fonction des

notations de l'énoncé, l'expression de $\underline{s}_1(\theta)$, amplitude complexe de la vibration lumineuse diffractée à l'infini dans la direction θ par la fente restée ouverte. Utiliser la fonction: sinc On rappelle: $\mathrm{sinc}(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$.

6. Montrer que $\underline{s_1}(\theta)$ se met sous la forme $\underline{s_1}(\theta)=\underline{s}_F(\theta)\exp(j\Phi/2)$ où $\underline{s}_F(\theta)$ est l'amplitude complexe diffractée dans la direction θ par une fente identique centrée en $x=0$ et Φ est une fonction de θ à expliciter. Préciser la signification physique de $\Phi/2$.
7. En déduire l'expression de l'intensité lumineuse $I(\theta)$, diffractée à l'infini dans la direction θ par la fente quand elle est seule ouverte. On pose $F_{diff}(\theta)=\dfrac{I(\theta)}{I(\theta=0)}$. Représenter $F_{diff}(\theta)$ en tenant compte des valeurs numériques fournies. Pour quelles valeurs de θ , $F_{diff}(\theta)$ est-il nul?

III. Deux fentes diffractantes

8. Donner l'expression $\underline{s_2}(\theta)$ de l'amplitude diffractée par l'autre fente, si elle seule est ouverte.
9. Donner l'expression $\underline{s}(\theta)$ de l'amplitude diffractée par les deux fentes lorsqu'elles sont ouvertes toutes les deux. Simplifier l'expression.
10. En déduire l'expression de l'intensité lumineuse $I(\theta)$, diffractée à l'infini dans la direction θ par les deux fentes, en notant $I(\theta=0)=I_0$.
11. L'expression précédente peut s'écrire sous la forme $\dfrac{I(\theta)}{I(\theta=0)}=F_{diff}(\theta)\times G_{int}(\theta)$. Écrire $G_{int}(\theta)$ en fonction de $\cos(\Phi)$ et commenter le sens physique de $G_{int}(\theta)$.
12. Tracer la courbe donnant $G_{int}(\theta)$ en fonction de θ en tenant compte des valeurs numériques proposées. Justifier le nombre de maxima observables. Déterminer l'ordre d'interférence et la valeur de θ (calcul littéral puis application numérique en degrés) pour chacun des maxima de $G_{int}(\theta)$.
13. Déduire du tracé de $F_{diff}(\theta)$ et de $G_{int}(\theta)$ le tracé de la fonction $\dfrac{I(\theta)}{I(\theta=0)}=F_{diff}(\theta)\times G_{int}(\theta)$.

Réponses

Inductance

1)

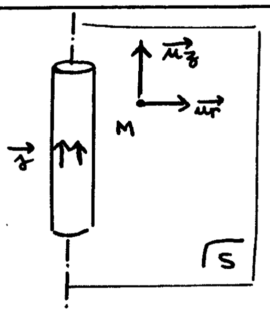
$$\boxed{\Phi = L I}$$

2)

$$I = \iint \vec{j}\,\vec{dS}$$
$$= \iint j\,\vec{u_z}\,dS\,\vec{u_z}$$
$$= \iint j\,dS$$
$$= j\,S$$
$$= j\,\pi e^2$$

$$\boxed{\vec{j} = \frac{I}{\pi e^2}\,\vec{u_z}}$$

3)



Le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est un plan de symétrie.
Le champ $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire au plan de symétrie

$$\boxed{\vec{B}(M) = B\,\vec{u_\varphi}}$$

Le problème est invariant en rotation selon φ
Le problème est invariant en translation selon z
puisque le fil est considéré comme infini

$$B = B(r, \cancel{\varphi}, \cancel{z})$$
$$\boxed{B = B(r)}$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{u_\varphi}}$$

4) C'est un problème de haute symétrie. On utilise le théorème d'Ampère.

$$\oint \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 \, I_{enlacé}$$

La courbe d'Ampère utilisée est un cercle centré sur l'axe et de rayon $r > e$

$$B \, 2\pi r = \mu_0 \, I$$

$$\boxed{\vec{B}_{(r>e)} = \frac{\mu_0 \, I}{2\pi r} \, \vec{u_\varphi}}$$

---

5) Ici le cercle est de rayon $r < e$

$$B \, 2\pi r = \mu_0 \, I_{enlacé}$$

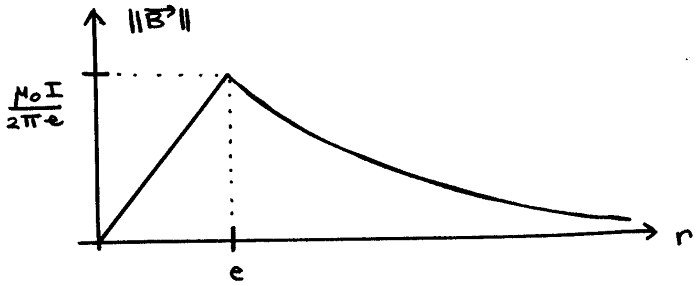
$$\left| \begin{array}{l} I = j \, \pi e^2 \\ I_{enlacé} = j \, \pi r^2 \end{array} \right.$$

$$= \mu_0 \, I \left(\frac{r}{e}\right)^2$$

$$\boxed{\vec{B}_{(r<e)} = \frac{\mu_0 \, I \, r}{2\pi \, e^2} \, \vec{u_\varphi}}$$

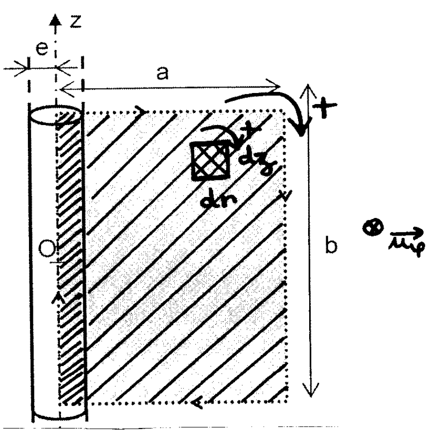
---

6) $(I > 0)$



---

7)



$$\vec{dS} = dr \; dz \; \vec{u_\varphi}$$

Le flux s'obtient en faisant la somme de deux intégrales

$$\phi_F = \int_{z=0}^{b}\int_{r=0}^{e} B(r<e)\, dr\, dz + \int_{z=0}^{b}\int_{r=e}^{a} B(r>e)\, dr\, dz$$

$$= b\left[\int_{r=0}^{e} \frac{\mu_0 I r}{2\pi e^2}\, dr + \int_{r=e}^{a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, dr\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\left(\frac{1}{e^2}\,\frac{e^2}{2} + \ln\frac{a}{e}\right)$$

$$\boxed{\phi_F = \frac{\mu_0}{2\pi}\, b\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{a}{e}\right) I}$$

---

8) On doit considérer deux segments de nature différente

- fil de longueur G : $\phi_G = \frac{\mu_0}{2\pi} G\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{D}{e}\right) I$
- fil de longueur D : $\phi_D = \frac{\mu_0}{2\pi} D\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{G}{e}\right) I$

Pour la spire, il y a deux fils de chaque sorte.

$$\phi_{total} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(2G\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{D}{e}\right) + 2D\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{G}{e}\right)\right) I$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\left(G + D + 2G\ln\frac{D}{e} + 2D\ln\frac{G}{e}\right) I$$

$$\boxed{L_1 = \frac{\mu_0}{\pi}\left(\frac{G+D}{2} + G\ln\frac{D}{e} + D\ln\frac{G}{e}\right)}$$

---

9) A.N.

$$L_1 = \frac{4\pi\, 10^{-7}}{\pi}\left(\frac{1{,}0+2{,}0}{2} + 1{,}0\ln\frac{2{,}0}{e} + 2{,}0\ln\frac{1{,}0}{e}\right)$$

avec $s = \pi e^2$

$$e = \sqrt{\frac{s}{\pi}} = \sqrt{\frac{1{,}5\ 10^{-6}}{\pi}} = 0{,}69\ 10^{-3}\ \text{m}$$

$$\boxed{L_1 = 9{,}6\ \mu\text{H}}$$

---

10) Pour n spires :

- le champ propre est multiplié par n

– le flux pour une spire est donc multiplié par n

– le flux pour les n spires est donc n^2 fois plus grand que le ϕ obtenu en 8)

$$\boxed{L = n^2 L_1}$$

---

11) La condition cherchée est :

$$L_{min} < n^2 L_1 < L_{max}$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{L_{min}}{L_1}} < n < \sqrt{\frac{L_{max}}{L_1}}}$$

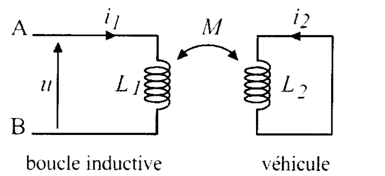
A.N. $\underbrace{\sqrt{\frac{70}{9,6}}}_{2,7} < n < \underbrace{\sqrt{\frac{500}{9,6}}}_{7,2}$

$$\boxed{3 \leq n \leq 7}$$

(compatible avec les spécifications du constructeur si on tient des approximations de notre modèle)

---

12)



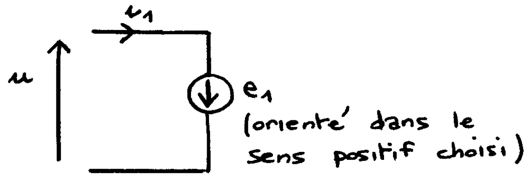
$$\boxed{\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2}$$

---

13) $$\boxed{\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1}$$

---

14)



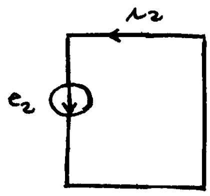
$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}$$
$$= -\left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}\right)$$

$$u = -e_1$$

$$\boxed{u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}}$$

---

15)



$$e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}$$
$$= -\left(L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}\right)$$

Cette force électromotrice est en court-circuit si on néglige la résistance du circuit 2

$$\boxed{0 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}}$$

---

16) On élimine $\frac{di_2}{dt}$ dans l'expression de u

$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \times -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

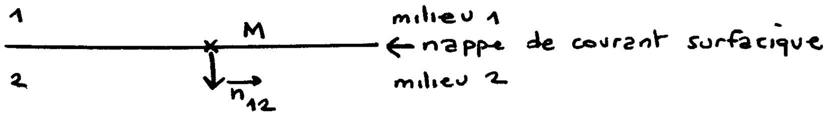
$$u = L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) \frac{di_1}{dt}$$

$$= \underbrace{L_1 (1 - k^2)}_{L'_1} \frac{di_1}{dt}$$

$$\boxed{L'_1 = L_1 (1 - k^2)}$$

---

17)



$$\boxed{\vec{B}_{M2} - \vec{B}_{M1} = \mu_0 \, \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}}$$

---

18) Dans un conducteur parfait, il ne peut y avoir de champ magnétique dépendant du temps : $\vec{B}(t) = \vec{0}$

→ on démontre d'abord que $\vec{E}$ est nul dans un conducteur parfait

- loi d'Ohm : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ avec γ infini
- puissance volumique reçue par les charges (effet Joule)

$$\frac{dP}{d\tau} = \vec{j}\,\vec{E}$$
$$= j^2/\gamma$$
$$\frac{dP}{d\tau} = \gamma E^2$$

fini infini

donc $\vec{E}$ est nul.

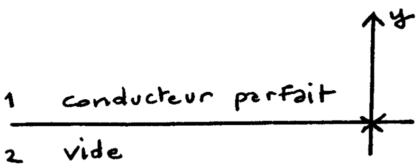
→ on utilise l'équation de Maxwell-Faraday

$$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

donc $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

Pas de $\vec{B}(t)$ dans un conducteur parfait.

Ici



$$\overrightarrow{B_{M2}} - \overrightarrow{B_{M1}} = \mu_0 \overrightarrow{J_S} \wedge \overrightarrow{n_{12}}$$

$$\overrightarrow{B}(y=0^-) = \mu_0 \overrightarrow{J_S} \wedge (-\overrightarrow{u_y})$$

$$\boxed{\overrightarrow{B}(y=0^-) = \mu_0 \overrightarrow{u_y} \wedge \overrightarrow{J_S}}$$

Le champ est donc perpendiculaire à $\overrightarrow{u_y}$

$\boxed{\overrightarrow{B}(y=0^-) \text{ est tangentiel au conducteur}}$

(cf : on sait que la composante tangentielle de $\overrightarrow{B}$ peut être discontinue)

---

19) → Dans le problème 1, le plan $y=0$ est un plan de symétrie donc le champ magnétique en un point de ce plan est perpendiculaire au plan. Ce problème ne convient pas.

→ Dans le problème 2, le plan $y=0$ est un plan d'antisymétrie donc $\overrightarrow{B}$ est dans le plan.

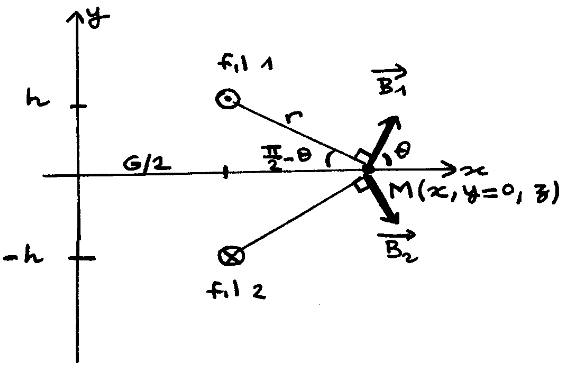
(on peut remarquer que dans ce problème, dans le vide, il n'y a pas de discontinuité et $\overrightarrow{B}(y=0^-) = \overrightarrow{B}(y=0)$

Ici $\overrightarrow{B}(y=0)$ est défini)

---

20)

→ en considérant les deux fils d'abscisse $x = G/2$



$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2}$$

$/x \quad B = B_1 \cos\theta + B_2 \cos\theta$

$$= 2\, B_1 \cos\theta$$

$$= 2\, \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$= 2\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ \frac{h}{r}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I h}{\pi\left(h^2 + (x - \frac{G}{2})^2\right)}\ \vec{u_x}$$

→ on tenant compte des deux autres fils ($G \to -G$ et $I \to -I$)

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I h}{\pi}\left(\frac{1}{h^2+(x-\frac{G}{2})^2} - \frac{1}{h^2+(x+\frac{G}{2})^2}\right)\vec{u_x}}$$

→ on détermine $\vec{J_S}$

on a vu

$$\vec{B} = \mu_0\ \vec{u_y} \wedge \vec{J_S}$$

on multiplie vectoriellement par $\vec{u_y}$

$$\vec{u_y} \wedge \vec{B} = \mu_0\ \vec{u_y} \wedge (\vec{u_y} \wedge \vec{J_S})$$

avec $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}\,(\vec{C}\,\vec{A}) - \vec{C}\,(\vec{A}\,\vec{B})$

$$\vec{u_y} \wedge (\vec{u_y} \wedge \vec{J_S}) = \vec{u_y}\,\underbrace{(\vec{J_S}\,\vec{u_y})}_{\text{nul}} - \vec{J_S}\,\underbrace{(\vec{u_y}\,\vec{u_y})}_{1}$$

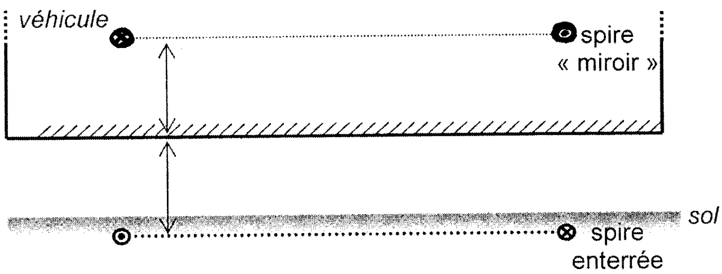
$$= -\mu_0\ \vec{J_S}$$

$$\boxed{\vec{J_S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B} \wedge \vec{u_y}\right)}$$

$$\boxed{\vec{J_S} = \frac{I h}{\pi}\left(\frac{1}{h^2+(x-\frac{G}{2})^2} - \frac{1}{h^2+(x+\frac{G}{2})^2}\right)\vec{u_y}}$$

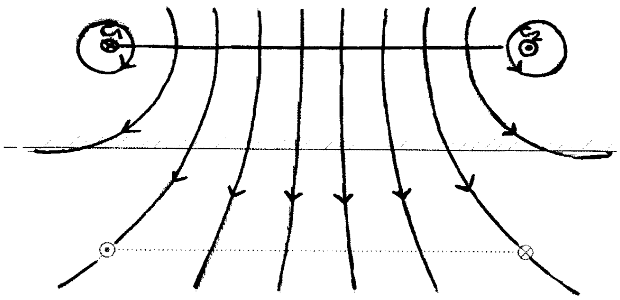
---

21)



---

22)

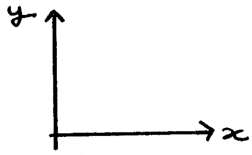


---

23) Position des points :

O sur l'axe de symétrie
A avec $OA = 10$ cm
B avec $OB = 20$ cm

en utilisant les axes déjà utilisés



$$\boxed{\overrightarrow{B}_{miroir} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{1}{G/2 - x} + \frac{1}{G/2 + x}\right](-\overrightarrow{u_y})}$$

A.N.

$$\|\overrightarrow{B}_{(O)}\| = \frac{4\pi\, 10^{-7} . 1}{2\pi}\left(\frac{1}{0{,}50 - 0} + \frac{1}{0{,}50 + 0}\right)$$

$$\|\overrightarrow{B}_{(A)}\| = \frac{4\pi\, 10^{-7} . 1}{2\pi}\left(\frac{1}{0{,}50 - 0{,}1} + \frac{1}{0{,}50 + 0{,}1}\right)$$

$$\|\overrightarrow{B}_{(B)}\| = \frac{4\pi\, 10^{-7} . 1}{2\pi}\left(\frac{1}{0{,}50 - 0{,}2} + \frac{1}{0{,}50 + 0{,}2}\right)$$

$$\|\overrightarrow{B}_{(O)\,miroir}\| = 8{,}0\ 10^{-7}\ \text{T}$$
$$\|\overrightarrow{B}_{(A)\,miroir}\| = 8{,}3\ 10^{-7}\ \text{T}$$
$$\|\overrightarrow{B}_{(B)\,miroir}\| = 9{,}5\ 10^{-7}\ \text{T}$$

---

24) $\boxed{\text{Le flux du champ magnétique est constant à travers toute section d'un tube de champ}}$

démonstration

- Equation locale de Maxwell-flux :

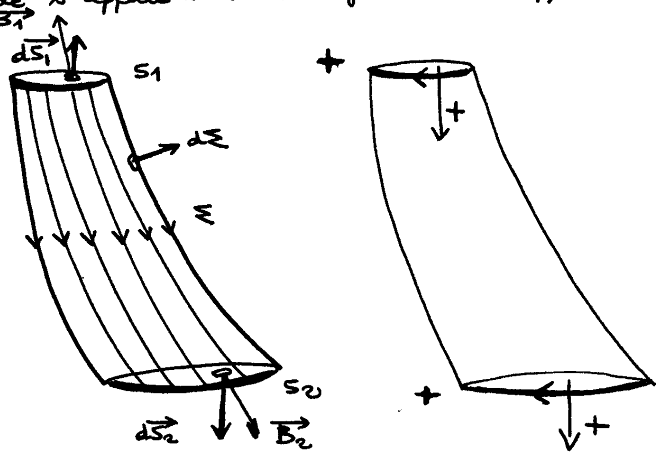
$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

donne, en utilisant le théorème d'Ostrogradski

$$\oiint \vec{B}\,\vec{dS} = 0$$

<u>Le flux de $\vec{B}$ est nul à travers une surface fermée</u>
($\vec{B}$ est à flux conservatif)

- On considère un tube de champ
(la surface latérale s'appuie sur des lignes de champ)



Pour la surface fermée : $S_1 + \Sigma + S_2$, on considère le flux (sortant) :

$$\phi = \phi_{S_1} + \phi_{S_2} + \phi_\Sigma = 0 \quad \text{(cf flux conservatif)}$$

avec
- $\phi_\Sigma = \iint_\Sigma \underbrace{\vec{B}\,\vec{d\Sigma}}_{\vec{B}\perp\vec{d\Sigma}} = 0$
- $\phi_{S_2} = \iint_{S_2} \vec{B_2}\,\vec{dS_2}$
- $\phi_{S_1} = \iint_{S_1} \vec{B_1}\,\vec{dS_1}$

donc

$$\underline{\phi_{S_1} + \phi_{S_2} = 0}$$

- On oriente S_1 différemment ($\phi_1 = -\phi_{S_1}$)
et on garde l'orientation pour S_2 ($\phi_2 = +\phi_{S_2}$)

l'égalité devient

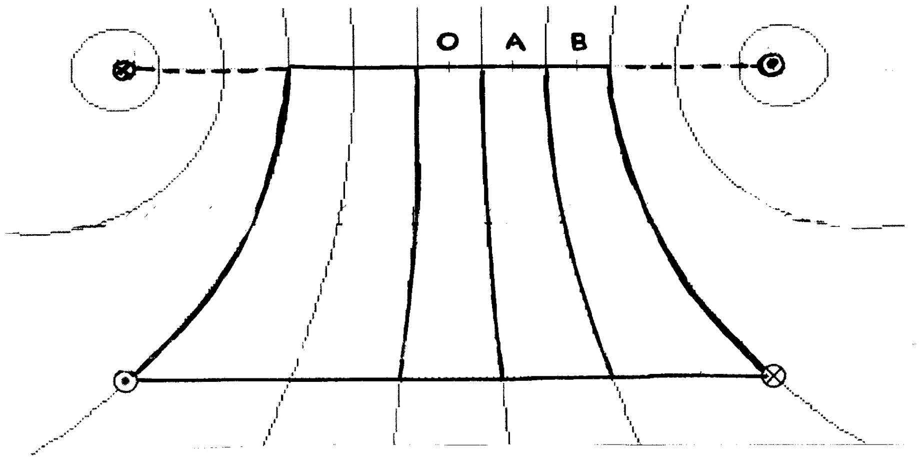
$$-\Phi_1 + \Phi_2 = 0$$

$$\underline{\Phi_1 = \Phi_2}$$

Le flux est constant à travers toute section du tube (les sections étant orientées dans le même sens)

---

25)



(remarque : ce modèle de la spire miroir va servir à calculer <u>le flux induit</u> dans la spire entourée
On va utiliser le fait que le flux dans la spire miroir peut être obtenu en utilisant la <u>conservation du flux dans un tube de champ</u>)

On décompose en <u>5 tubes de champ</u>, de largeur $\ell = 0{,}1$ m et de longueur (perpendiculaire au plan de la figure) égale à $D = 20$ m
On détermine le flux au niveau de la spire miroir puisqu'il se conserve.

$$|\Phi_i| = |\Phi_O + 2\,\Phi_A + 2\,\Phi_B|$$

$$|\Phi_i| \simeq |B_{(O)}\,\ell D + 2B_{(A)}\,\ell D + 2B_{(B)}\,\ell D|$$

$$\boxed{|\Phi_i| \simeq \ell D\,|B_{(O)} + 2B_{(A)} + 2B_{(B)}|}$$

A.N.

$$= 0{,}1 \times 2{,}0 \times (8{,}0\ 10^{-7} + 2 \times 8{,}3\ 10^{-7} + 2 \times 9{,}5\ 10^{-7})$$

$$\boxed{|\Phi_i| \simeq 8{,}7\ 10^{-7}\ \text{Wb}}$$

Le sens positif pour la spire enterrée oriente la surface vers le haut alors que $\vec{B}_{miroir}$ est vers le bas.

$$\boxed{\Phi_i = -8{,}7\ 10^{-7}\ \text{Wb}}$$

---

26) Le flux dans la spire diminue

- en l'absence de châssis

$$\Phi = L_1 I$$

- en presence de châssis

$$\Phi' = \Phi + \underbrace{\Phi_i}_{\text{négatif (proportionnel à } I)}$$

$$= (L_1 + \Delta L_1)\,I$$

donc

$$\boxed{\Delta L_1 = \frac{\Phi_i}{I} < 0}$$

A.N.

$$= -\frac{8{,}7\ 10^{-7}}{1}$$

$$\boxed{\Delta L_1 = -0{,}87\ \mu\text{H}}$$

---

27) A.N.

$$\frac{\Delta L_1}{L_1} = -\frac{0{,}87}{9{,}6}$$

$$\boxed{\frac{\Delta L_1}{L_1} = 9\ \%}$$

L et ΔL sont tous deux proportionnels à n^2

$$\boxed{\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L_1}{L_1} \simeq 10\,\%}$$

ce qui doit être facilement détectable.

---

28)
$$\boxed{r = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{s}}$$

---

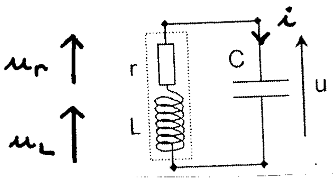
29) A.N.
$$\boxed{r = \frac{1}{\sigma}\frac{n \times 2(D+G)}{s}}$$

$$= \frac{1}{6{,}0\ 10^7}\frac{3 \times 2\ (2{,}0+1{,}0)}{1{,}5\ 10^{-6}}$$

$$\boxed{r = 0{,}20\ \Omega}$$

---

30)



$$u = u_r + u_L$$

$$= -r\,i - L\frac{di}{dt}$$

avec $i = C\dfrac{du}{dt}$

$$u = -rC\frac{du}{dt} - LC\frac{d^2u}{dt^2}$$

soit :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0}$$

---

31) Ecriture canonique :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2\,u = 0$$

On identifie :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{donc}$$

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{r}{L}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{r}$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

---

32) r est proportionnel à n

L est proportionnel à n^2

$\boxed{\text{Q est donc indépendant de } n.}$

---

33)

$$C = (4\pi^2 f_0^2 L)^{-1}$$

10 kHz : $C = (4\pi^2 (10^4)^2\ 100\ 10^{-6})^{-1} = 2{,}5\ \mu F$

90 kHz : $C = (4\pi^2 (9.10^4)^2\ 100\ 10^{-6})^{-1} = 31\ nF$

$$\boxed{31\ nF < C < 2{,}5\ \mu F}$$

---

34) Les variations étant supposées faibles, on peut utiliser le calcul différentiel

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\ln f_0 = \underbrace{\ln\left(\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{C}}\right)}_{cste} - \frac{1}{2}\ln L$$

on différencie :

$$\frac{df_0}{f_0} = -\frac{1}{2}\frac{dL}{L}$$

$$\boxed{\frac{\Delta f_0}{f_0} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta L}{L}}$$

En presence d'un vehicule : L diminue

$$\boxed{\Delta L < 0 \quad \text{donc} \quad \Delta f_0 > 0}$$

La fréquence augmente.

---

35) On a vu $\frac{\Delta L}{L} \simeq 10\%$

donc $\frac{\Delta f_0}{f_0} \simeq 5\% \quad > \quad 2\%$

On pourra régler le seuil de détection à 2% ce qui permettra de détecter les véhicules et empêchera les déclenchements intempestifs sur des parasites.

Chute d'un cadre dans un champ magnétique

1) Si $\alpha = 0$, $\vec{B}$ est uniforme ($\vec{B} = B_0 \vec{u_y}$)
Le flux de $\vec{B}$ dans le cadre est donc constant au cours de la chute.
Il n'y a pas de phénomène d'induction.

---

2) Loi de Lenz : le sens du courant induit est tel que, par ses effets, il s'oppose à la cause qui lui a donné naissance.

a) en raisonnant par les flux

- En $z_C = 0$, le flux à travers le cadre est positif.
- Puis quand le cadre tombe, B diminue donc le flux (extérieur) diminue.
- Le courant induit va créer un flux propre positif pour modérer cette diminution du flux.

$$\boxed{i > 0}$$

b) en raisonnant par les forces de Laplace

- le cadre tombe sous l'effet de la force $m\vec{g}$, et cette chute entraîne un phénomène d'induction.
- Supposons $i > 0$, la force de Laplace sur le côté horizontal en $(z_C + \frac{a}{2})$ est $\int d\vec{F} = \int i\, d\vec{l} \wedge \vec{B}$ elle est selon $\vec{u_z}$ vers le bas.
Sur le côté horizontal en $(z_C - \frac{a}{2})$, elle est selon $(-\vec{u_z})$ vers le haut. Elle est plus importante que la précédente car B est plus grand.
Donc si $i > 0$ la résultante des forces de Laplace est vers le haut.
- Les forces de Laplace, pour compenser les effets de la chute, doivent freiner, donc être vers le haut.

$$\boxed{i > 0}$$

---

3) $$\phi = \iint_{\text{cadre}} \underbrace{\vec{B}}_{B\,\vec{u_y}} \; \underbrace{\vec{dS}}_{dx\,dz\,\vec{u_y}}$$

$$= \iint_{\text{cadre}} B \; dx \; dz$$

$$= \int_{x_{\text{Gauche}}}^{x_{\text{Droit}}} dx \int_{z=z_c-a/2}^{z=z_c+a/2} (B_o - \alpha z) \; dz$$

$$= a \times \left[B_o a - \frac{\alpha}{2}\left((z_c + \frac{a}{2})^2 - (z_c - \frac{a}{2})^2 \right) \right]$$

$$\boxed{\phi = a^2 \left(B_o - \alpha z_c \right)}$$

(B étant une fonction affine de z, on pouvait s'attendre à obtenir $\phi = a^2 B(z_c)$)

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

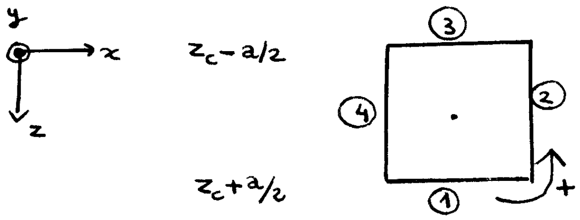
(on ne tient pas compte du flux propre)

$$e = a^2 \alpha \frac{dz_c}{dt}$$

$$\boxed{e = a^2 \alpha v}$$

---

4)



$$e = \oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \, \vec{dl}$$

$$= e_{①} + e_{②} + e_{③} + e_{④}$$

Pour calculer $e_{②}$ et $e_{④}$ on fait

$$e = \int \left(v \, \vec{u_z} \wedge \underset{(z)}{B} \, \vec{u_y} \right) dz \, \vec{u_z}$$

$$= 0$$

puisque sur ces 2 côtés $\vec{v}$ et $\vec{dl}$ sont colinéaires.

Pour calculer $e_{①}$ et $e_{③}$ on fait

$$e = \int (v\,\vec{u_z} \wedge B_{(z)}\,\vec{u_y})\,dx\,\vec{u_x}$$

$$= \int -v\,B_{(z)}\,dx$$

donc

$$e_{①} = \int_{x_{min}}^{x_{min}+a} -v\,B(z_c+\tfrac{a}{2})\,dx$$

$$= -v\,B(z_c+\tfrac{a}{2})\,a$$

$$e_{③} = \int_{x_{min}+a}^{x_{min}} -v\,B(z_c-\tfrac{a}{2})\,dx$$

$$= +v\,B(z_c-\tfrac{a}{2})\,a$$

$$e = -v\,a\left(B_{(z_c+\frac{a}{2})} - B_{(z_c-\frac{a}{2})}\right)$$

$$= -v\,a\left(B_0 - \alpha(z_c+\tfrac{a}{2}) - B_0 + \alpha(z_c-\tfrac{a}{2})\right)$$

$$\boxed{e = a^2\,\alpha\,v}$$

---

5) Forces de Laplace

$\longrightarrow$ Pour calculer $\vec{F_{②}}$ et $\vec{F_{④}}$ on fait

$$\vec{F} = \int_{\substack{\text{côté}\\\text{étudié}}} i\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$$

$$= \int_{\substack{\text{côté}\\\text{étudié}}} i\,dz\,\vec{u_z} \wedge B(z)\,\vec{u_y}$$

$$= -i\left[\int B_{(z)}\,dz\right]\vec{u_x}$$

Pour $F_{④}$ on intègre de $z_c-\frac{a}{2}$ à $z_c+\frac{a}{2}$

Pour $F_{②}$ on intègre en sens inverse

donc $\vec{F_{②}} + \vec{F_{④}} = \vec{0}$

→ Pour calculer $\overrightarrow{F_{①}}$ et $\overrightarrow{F_{③}}$ on fait :

$$\vec{F} = \int_{\substack{\text{côté}\\ \text{étudié}}} i \, \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

$$= \int_{\substack{\text{côté}\\ \text{étudié}}} i \, dx \, \vec{u_x} \wedge B(z) \, \vec{u_y}$$

$$= i \, B(z) \left[\int dx \right] \vec{u_z}$$

Pour $F_{①}$ on intègre de x_{min} à $x_{min}+a$

$$\overrightarrow{F_{①}} = i \, B_{(z_c+\frac{a}{2})} \, a \, \vec{u_z}$$

Pour $F_{③}$ on intègre de $x_{min}+a$ à x_{min}

$$\overrightarrow{F_{③}} = - i \, B_{(z_c-\frac{a}{2})} \, a \, \vec{u_z}$$

Finalement

$$\overrightarrow{F_L} = \overrightarrow{F_{①}} + \overrightarrow{F_{③}}$$

$$= i a \underbrace{\left(B(z_c+\tfrac{a}{2}) - B(z_c-\tfrac{a}{2}) \right)}_{-a\alpha} \vec{u_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F_L} = - i a^2 \alpha \, \vec{u_z}}$$

<u>remarque</u>:

On retrouve bien le <u>principe de conversion électromagnétique</u> en champ <u>permanent</u>.

$$P_{electrom} + P_{Laplace} = 0$$

$$e_{ext} \, i + \overrightarrow{F_L} \, \vec{v} = 0$$

$$(a^2 \alpha v) \, i + (-i a^2 \alpha) \, v = 0$$

---

6) Equation mécanique :

Théorème de la résultante cinétique au cadre selon $\overrightarrow{u_z}$:

$$\boxed{m g - i\, a^2 \alpha = m \frac{dv}{dt}}$$

---

7) Equation électrique :

Loi du circuit électrique

$$e = R i$$

$$\boxed{a^2 \alpha v = R i}$$

---

8) On élimine i entre les deux équations.

$$m g - \frac{\alpha^2 a^4}{R} v = m \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g}$$

avec :

$$\boxed{\tau = \frac{m.R}{\alpha^2 a^4}}$$

(l'équation différentielle, en utilisant z_c, est donc :

$$\frac{d^2 z_c}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dz_c}{dt} = g \quad)$$

---

9) Solution

$$v = A\, e^{-t/\tau} + v_{Lim}$$

avec :

$$\boxed{v_{Lim} = \tau g}$$

C.I. $\quad 0 = A + v_{Lim}$

$$\boxed{v = v_{Lim} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

---

10) A.N.

$$\tau = \frac{mR}{\alpha^2 a^4}$$

$$= \frac{0{,}01 \times 0{,}01}{(6{,}4)^2\ (0{,}1)^4}$$

$$\boxed{\tau = 0{,}024\ s}$$

$$v_{Lim} = \tau g$$

$$= 0{,}024 \times 9{,}8$$

$$\boxed{v_{Lim} = 0{,}24\ m s^{-1}}$$

---

11) Au temps $t_0 = 10\ s \gg \tau$, le cadre a donc atteint la vitesse limite précédente.

On recommence l'étude :

$$\Phi_{(t)} = a^2\ (B_0 - \alpha\ z_{C(t)} - \beta\ (t - t_0))$$

$$e = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$$

$$\boxed{e = a^2(\alpha v + \beta)}$$

$$\overrightarrow{F_L} = -i a^2 \alpha\ \overrightarrow{u_z}$$

(B dépend de t.
on n'a plus $e\ i + F_L v = 0$)

l'équation mécanique n'est pas modifiée :

$$mg - i a^2 \alpha = m \frac{dv}{dt}$$

l'équation électrique est modifiée

$$a^2(\alpha v + \beta) = R i$$

l'équation différentielle devient alors :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g - \frac{\alpha \beta a^4}{mR}}$$

La vitesse limite devient

$$v'_{Lim} = \tau g - \frac{\alpha \beta a^4}{mR}\tau$$

$$\boxed{v'_{Lim} = \tau g - \frac{\beta}{\alpha}}$$

A.N. $v'_{Lim} = v_{Lim} - \frac{\beta}{\alpha}$

$$= 0{,}24 - \frac{0{,}30}{6{,}4}$$

$$\boxed{v'_{Lim} = 0{,}19 \ ms^{-1}}$$

La solution de l'équation est donc

$$v = A\ e^{-t/\tau} + v'_{Lim}$$

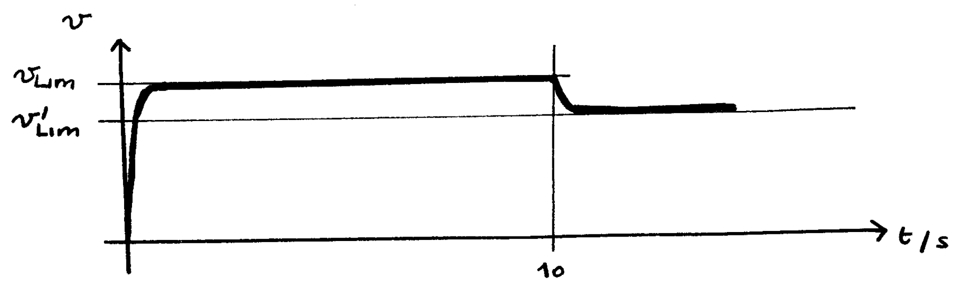
C.I. $v_{Lim} = A\ e^{-t_0/\tau} + v'_{lim}$

donc

$$A = \frac{v_{Lim} - v'_{Lim}}{e^{-t_0/\tau}}$$

$$\boxed{v = \underbrace{(v_{Lim} - v'_{Lim})}_{\frac{\beta}{\alpha} = 0{,}047} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \underbrace{v'_{Lim}}_{0{,}19}}$$

12)



Remarque

$v'_{Lim} < v_{Lim}$

B diminue avec z mais diminue aussi avec t

Si on ne regarde que cette diminution avec t,

la loi de Lenz prévoit ici aussi $i > 0$ donc $F' > 0$.

La force de Laplace vers le haut augmente, v_{Lim} diminue.

Diffraction

1) Principe de Huygens-Fresnel :

> Chaque élément de surface $dS(P)$ au voisinage des points P d'une surface (S) atteinte par une onde monochromatique cohérente se comporte comme une <u>source secondaire ponctuelle</u> émettant des ondelettes d'amplitude complexe proportionnelle à l'amplitude $a_i(P)$ de l'onde incidente en P et à la surface $dS(P)$. Les différentes sources <u>secondaires</u> sont <u>mutuellement cohérentes</u> donc les amplitudes des ondelettes <u>sphériques</u> s'additionnent au point d'observation M (<u>interférence</u>)

---

2)

$\vec{u}$ n'a pas de composantes selon y.
On étudie seulement <u>la diffraction selon x</u> donc <u>la hauteur h</u> des fentes selon Oy qui intervient pour étudier <u>la diffraction selon y</u> <u>n'intervient pas</u>.

(Au niveau du calcul, le déphasage φ qui intervient dans les formules : $\vec{k} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$ ne fera pas intervenir les ordonnées y des points puisque $k_y = 0$)

---

3)

$$\boxed{\underbrace{\varphi_{P \to M}}_{\varphi(M) - \varphi(P)} = \vec{k}\,\overrightarrow{PM}}$$

($\varphi > 0$ pour un retard)

---

4)

$$\varphi_{O \to M} = \vec{k}\,\overrightarrow{OM}$$

(même $\vec{k}$ que précédemment, M étant à l'infini)

$$\varphi_{PM/OM} = \vec{k}\,(\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{OM})$$

$$\boxed{\varphi = -\vec{k}\,\overrightarrow{OP}}$$

A l'infini, le terme en $\frac{1}{r}$ (ondes sphériques) est constant. Finalement

$$\underline{s}(\vec{u},t) = \text{cste} \iint_{\substack{\text{plan}\\ \text{diffractant}}} \exp j(\omega t - \varphi)\ \underbrace{dS}_{\to dx\,dy}$$

on peut faire passer dans la constante : $\int dy = h$.

En amplitude complexe

$$\underline{s}(\vec{u}) = K \int_{\text{axe } x} \exp(-j\varphi)\ dx$$

$$\boxed{\underline{s}(\theta) = K \int_{\text{axe } x} \exp(j\,\vec{k}\,\overrightarrow{OP})\ dx}$$

---

5) Pour la fente centrée en $x = +b/2$.

$$\underline{s}_1(\theta) = K \int_{x=\frac{b}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}+\frac{a}{2}} \exp(j\,\vec{k}\,\overrightarrow{OP})\ dx$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\begin{vmatrix}\sin\theta\\ 0\\ \cos\theta\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}x\\ y\\ 0\end{vmatrix}$$

$$= K \int_{\frac{b}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}+\frac{a}{2}} \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\, x\right) dx$$

$$= K\ \frac{\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\,\frac{b+a}{2}\right) - \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\,\frac{b-a}{2}\right)}{j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta}$$

$$= K\ \exp\left(j\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right)\ \frac{2j\sin\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}{2j\ \frac{\pi\sin\theta}{\lambda}}$$

$$\boxed{\underline{s}_1(\theta) = K\,a\ \exp\left(\frac{j\pi b\sin\theta}{\lambda}\right)\ \text{sinc}\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}$$

---

6) → Pour une fente centrée à l'origine $(b=0)$:

$$\underline{s}_F(\theta) = K\,a\ \ \text{sinc}\left(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}\right)$$

→ on pose :

$$\frac{\phi}{2} = \frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}$$

$$\boxed{\phi = \frac{2\pi b\sin\theta}{\lambda}}$$

$$\frac{\Phi}{2} = \vec{k}\ \overrightarrow{OC_1}$$

En utilisant 4) : $(-\vec{k}\ \overrightarrow{OC_1})$ est le déphasage retard du rayon milieu de la fente 1 de vecteur $\vec{k}$ et passant par C_1 par rapport au rayon de référence passant par O

Donc $\boxed{\frac{\Phi}{2} \text{ est le déphasage avance de } C_1M / OM}$

$$\underline{A}_1(\theta) = \underline{A}_F(\theta) \exp(j\,\Phi/2)$$

---

7)
$$I(\theta) = \underline{A}_1(\theta)\ \underline{A}_1^*(\theta)$$
(à une constante multiplicative près)

$$\boxed{I(\theta) = K^2 a^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}$$

$$I(\theta=0) = K^2 a^2$$

$$I(\theta) = I(\theta=0) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)$$

$$\boxed{F_{diff}(\theta) = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}$$
(éclairement relatif dû à la diffraction par une fente)

A.N. $a = \lambda = 0{,}600\,\mu m$

$$F_{diff}(\theta) = \operatorname{sinc}^2(\pi \sin\theta)$$

nul pour $(\pi \sin\theta) = m\pi$ $\quad m \in \mathbb{Z}^*$

$$\sin\theta = m$$

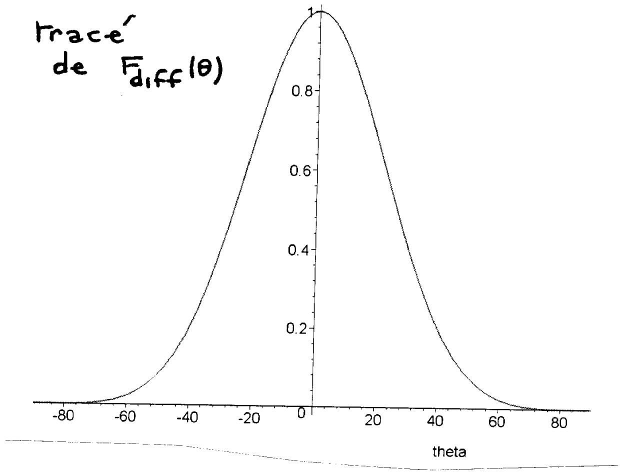
solutions possibles ici

$$\sin\theta = \pm 1$$

$$\boxed{\theta = \pm\frac{\pi}{2}}$$

On n'a donc que le lobe central de la figure de diffraction

tracé de $F_{diff}(\theta)$



8) Pour obtenir $\underline{s}_2(\theta)$ on modifie $b \to -b$ dans $\underline{s}_1(\theta)$

$$\boxed{\underline{s}_2(\theta) = \underline{s}_F(\theta) \quad \exp -j\frac{\phi}{2}}$$

9)

$$\underline{s}(\theta) = \underline{s}_1(\theta) + \underline{s}_2(\theta)$$

$$= \underline{s}_F(\theta) \left(\exp j\frac{\phi}{2} + \exp -j\frac{\phi}{2} \right)$$

$$\boxed{\underline{s}(\theta) = 2\underline{s}_F(\theta) \quad \cos\frac{\phi}{2}}$$

$$\underline{s}(\theta) = 2\,K a \quad \text{sinc}\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right) \quad \cos\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right)$$

10)

$$I(\theta) = \underline{s}(\theta)\ \underline{s}^*(\theta)$$

$$\boxed{I(\theta) = \underbrace{4\,K^2 a^2}_{I_0} \quad \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right) \quad \cos^2\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right)}$$

11)

$$\frac{I(\theta)}{\underbrace{I(\theta=0)}_{I_0}} = \underbrace{\text{sinc}^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}_{F_{diff}(\theta)} \quad \underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right)}_{G_{int}(\theta)}$$

$F_{diff}(\theta)$ éclairement relatif dû à la diffraction par une fente

$$G_{int}(\theta) = \cos^2 \frac{\phi}{2}$$

$$\boxed{G_{int}(\theta) = \frac{1+\cos\phi}{2}}$$

éclairement relatif traduisant le phénomène d'interférences entre les rayons milieux des 2 fentes de Young

avec ϕ : déphasage

et $\frac{I}{I_{MAX}} = \frac{1}{2}(1+\cos\phi)$

---

12) $a = \lambda = 0{,}600\,\mu m$

$b = 2{,}5\lambda = 1{,}500\,\mu m$

$$G_{int}(\theta) = \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi b \sin\theta}{\lambda}\right)}{2}$$

$$\boxed{G_{int} = \frac{1+\cos(2\pi p)}{2}}$$

avec $\boxed{p = \frac{b\sin\theta}{\lambda}}$ ordre d'interférence

A.N.

$$p = 2{,}5 \sin\theta$$

On a un maximum si $p \in \mathbb{Z}$

Nbre de maxima :

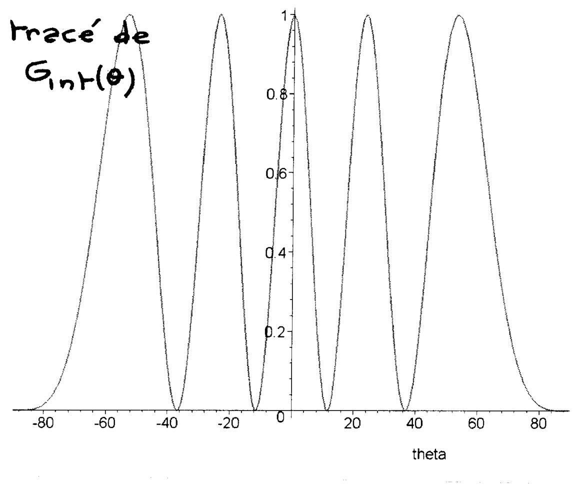
$$-1 \leqslant \frac{p}{2{,}5} = \sin\theta \leqslant +1$$

$$-2{,}5 \leqslant p \leqslant 2{,}5$$

$$\boxed{\text{5 maxima : } p = -2, -1, 0, +1, +2}$$

$p = 2$	$\sin\theta = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}8$	$\theta = 53°$
$= 1$	$= \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4$	$= 24°$
$= 0$	$= 0$	$= 0°$
$= -1$	$= -0{,}4$	$= -24°$
$= -2$	$= -0{,}8$	$= -53°$

tracé de $G_{int}(\theta)$



13) Tracé de $F(\theta) \times G(\theta)$