DNS

Sujet

Wagonnet sur une pente

Un wagonnet destiné au transport de matière minérale comprend : une plateforme, une benne, deux essieux portant chacun deux roues. L'ensemble présente un plan de symétrie vertical (il s'agit du plan xOy qui sera défini ultérieurement et qui contient les points O_0 , O_1 , O_2 , G_0 et G , voir *schéma* 1). L'ensemble benne-plateforme-essieux sera considéré comme un solide unique, indéformable, de masse $M=60\,kg$, de centre d'inertie G_0 dont la position est précisée par les longueurs $a=0{,}5\,m$ et $b=0{,}8\,m$. Les quatre roues circulaires et identiques sont de masse $m=15\,kg$ et de rayon $r=0{,}15\,m$; elles ont pour centres d'inertie respectifs les points G_1 et G_4 (pour les roues avant) et les points G_2 et G_3 (pour les roues arrière). Ces roues reposent sur deux rails parallèles, écartés de $2e=0{,}6\,m$. Le coefficient de frottement d'une roue quelconque sur le rail est noté f ; il ne sera pas fait de distinction entre coefficients de frottement statique ou dynamique. Les points de contact roues-rail sont appelés I_1 et I_4 (pour les roues avant), I_2 et I_3 (pour les roues arrières). O_1 est le milieu du segment $I_1 I_4$, O_2 est le milieu du segment $I_2 I_3$, O_0 est le milieu du segment $O_1 O_2$. Les actions des rails sur les roues se résument à quatre forces $\vec{\mathcal{R}}_1$, $\vec{\mathcal{R}}_2$, $\vec{\mathcal{R}}_3$, $\vec{\mathcal{R}}_4$ dont les points d'application sont I_1 , I_2 , I_3 , I_4 . Pour simplifier le problème, on supposera que ces forces n'ont pas de composantes suivant la direction $\vec{u}_z$ et que, de plus, $\vec{\mathcal{R}}_1=\vec{\mathcal{R}}_4$ et $\vec{\mathcal{R}}_2=\vec{\mathcal{R}}_3$ .On posera $\vec{\mathcal{R}}_1=T_1\vec{u}_x+N_1\vec{u}_y$ et $\vec{\mathcal{R}}_2=T_2\vec{u}_x+N_2\vec{u}_y$, $[\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z]$ étant une base définie ci-après.

Soit un référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe un repère cartésien orthonormé direct $Oxyz$, de vecteurs unitaires associés $\vec{u}_x$ $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$, le plan xOy est vertical, il passe également par les points O_0 , O_1 , O_2 , l'axe Ox étant parallèle aux rails. Par symétrie le centre d'inertie G du wagonnet se situe dans le plan xOy , sa position est précisée par une abscisse X telle que $\vec{OG}=X\,\vec{u}_x+c\,\vec{u}_y$. Il est à remarquer que les points O_0 , G et G_0 sont alignés.

Pour l'accélération due à la pesanteur, on pourra prendre $g=\|\vec{g}\|=10\,m.s^{-2}$.

I. Équilibre

Dans un premier temps, on va étudier l'équilibre du wagonnet en présence d'une pente.

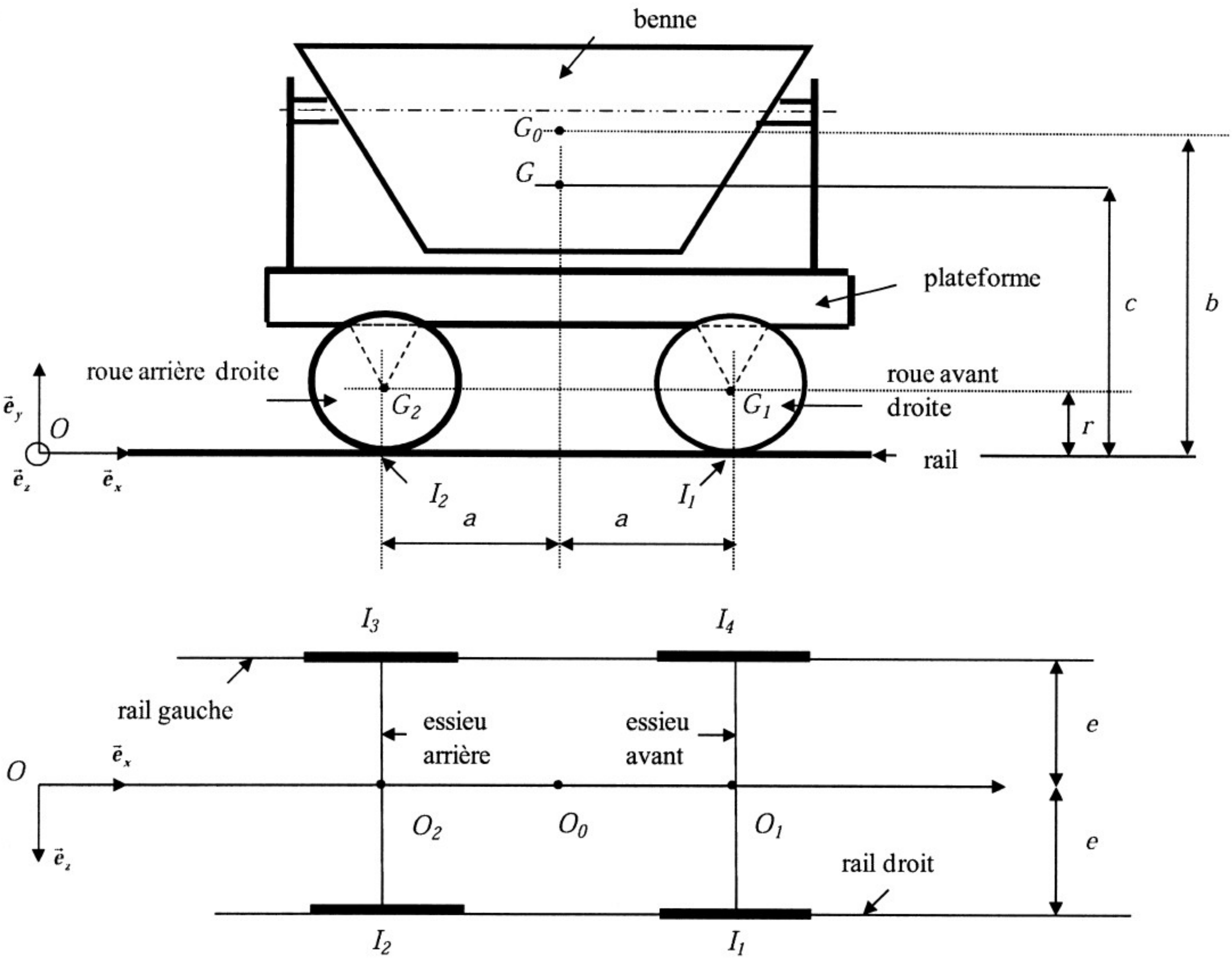


Schéma n°1

Un dispositif de freinage (non figuré) bloque les deux roues avant et laisse libre les roues arrière (dans ce cas on a donc $T_2=0$). Les rails se situent dans un plan incliné d'un angle $\alpha=5°$ par rapport à l'horizontale (voir *schéma* 2).

1. Déterminer l'expression de l'ordonnée c du centre d'inertie G en fonction de m, M, b et r.
2. En écrivant que la résultante dynamique du wagonnet est nulle, établir deux relations liant N_1, N_2, T_1, M, m, g et α.
3. Calculer la valeur numérique de T_1.
4. Le moment dynamique du wagonnet relativement au point O_2 étant nul, établir l'expression de N_1 en fonction de M, m, g, α, c et a.
5. Des questions précédentes, déduire l'expression de N_2.

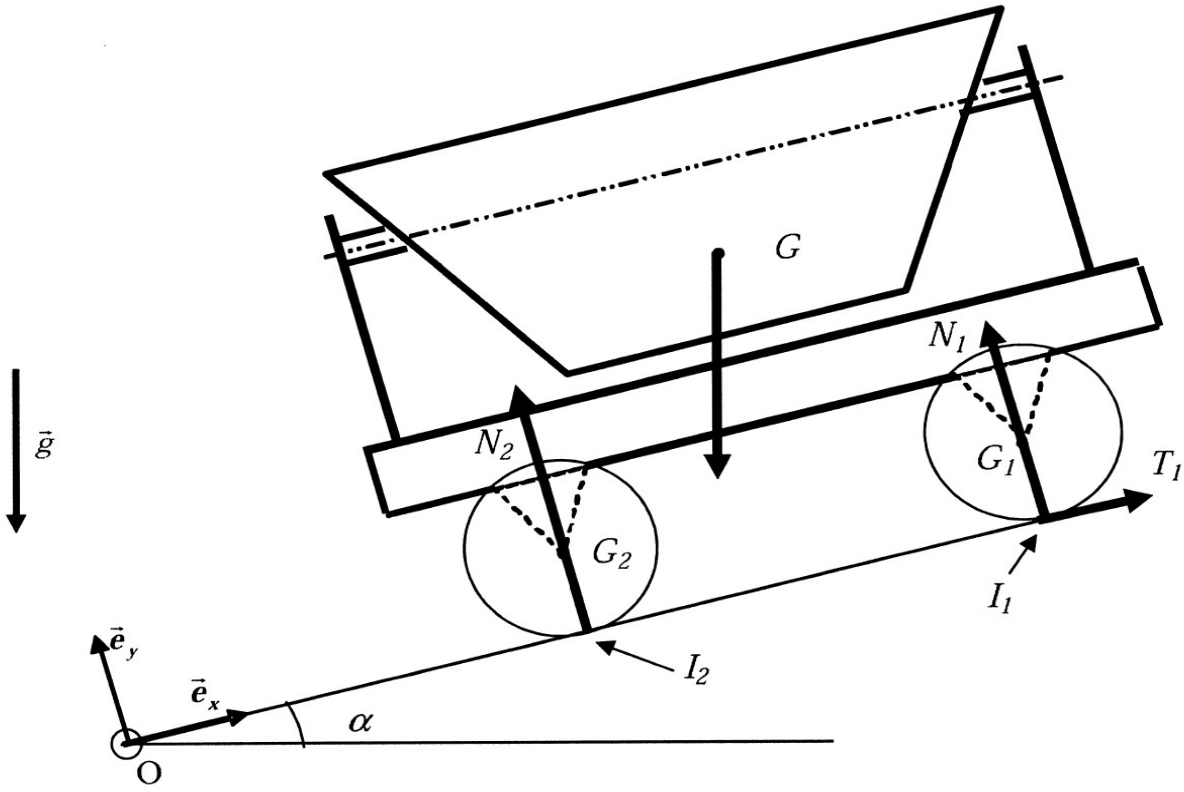


Schéma n°2

II. Mouvement

Dans un second temps, le système de freinage étant débloqué, le wagonnet se situant toujours sur une pente inclinée de l'angle α par rapport à l'horizontale, on soumet celui-ci à une force $\vec{F}=F\vec{u}_x$ située dans le plan de symétrie vertical du wagonnet xOy . Cette force est caractérisée par son intensité constante F ($F>0$) , sa ligne d'action étant une parallèle aux rails passant par le point G . Les accélération et vitesse observées étant suffisamment faibles, la résistance à l'avancement du milieu ambiant sera négligée. Le mouvement des roues sur les rails est supposé s'effectuer sans glissement. La vitesse de rotation instantanée est donc identique pour chacune des roues et sera notée $\vec{\Omega}=\omega\vec{u}_z$.

6. Établir la relation de roulement sans glissement liant ω , $\frac{dX}{dt}$ et r .

7. Soit $J=\frac{1}{2}mr^2$, le moment d'inertie de l'une quelconque des roues relativement à son axe de rotation. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'une quelconque des roues en fonction de m et $\frac{dX}{dt}$.

8. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble benne-plateforme-essieux en

fonction de M et $\frac{dX}{dt}$, puis celle de l'énergie E_c du wagonnet en fonction de m , M et $\frac{dX}{dt}$.

9. Retrouver l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du wagonnet.

10. Exprimer la puissance $\mathcal{P}$ fournie par la force $\vec{F}$ en fonction de F , $\frac{dX}{dt}$.

11. Les liaisons étant supposées parfaites, déduire des résultats précédents l'expression de l'accélération $\frac{d^2X}{dt^2}$ en fonction de F , M , m , α , g .

12. Donner l'expression du moment cinétique (en G_1) de la première roue (avant droit) soit $\vec{\sigma}_1(G_1)$ en fonction de J et ω .

13. Appliquer le théorème du moment dynamique pour la première roue. En déduire l'expression de T_1 en fonction de m , r et ω , puis en fonction de m , M , g , F et α .

14. Montrer que $T_1 = T_2$. Calculer la valeur numérique de ces grandeurs pour $F = 564{,}5\,N$.

15. Par projection des forces agissant sur le wagonnet suivant la direction de Oy , trouver une première relation entre N_1 et N_2 .

16. Les moments cinétiques aux points G_2 , G_3 , G_4 pour les autres roues, soient $\vec{\sigma}_2(G2)$, $\vec{\sigma}_3(G3)$, $\vec{\sigma}_4(G4)$ possèdent des expressions identiques à celle de $\vec{\sigma}_1(G1)$. En utilisant ce résultat, donner l'expression de $\vec{\sigma}(G)$, moment cinétique en G du wagonnet. Pour cela, on remarquera que les points G_1 , G_2 , G_3 et G_4 possèdent la même vitesse soit $\vec{V}_{G_1} = \vec{V}_{G_2} = \vec{V}_{G_3} = \vec{V}_{G_4} = \frac{dX}{dt}\vec{u}_x$ et, de plus, on remarquera que :

$$\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} + \overrightarrow{GG_4} = -4(c-r)\vec{u}_y$$

17. Donner le moment relativement au point G de la force $\vec{F}$ et du poids du wagonnet.

18. Par utilisation du théorème du moment dynamique et d'après les résultats des questions précédentes, trouver une seconde relation entre N_1 et N_2 .

19. Établir les expressions de N_1 et N_2 en fonction de M , m , c , r , a , g , $\frac{d^2X}{dt^2}$ et α .

Réponses

Wagonnet sur une pente

1) Le barycentre de l'ensemble vérifie :

$$m\,\overrightarrow{OG_1} + m\,\overrightarrow{OG_4} + m\,\overrightarrow{OG_2} + m\,\overrightarrow{OG_3} + M\,\overrightarrow{OG_0} = (4m+M)\,\overrightarrow{OG}$$

Pour simplifier, on peut prendre l'origine en O_0 à la verticale de G

$$\boxed{m\,(\overrightarrow{O_0G_1} + \overrightarrow{O_0G_4} + \overrightarrow{O_0G_2} + \overrightarrow{O_0G_3}) + M\,\overrightarrow{O_0G_0} = (4m+M)\,\overrightarrow{O_0G}}$$

$/x \quad m\,(a + a - a - a) + 0 = 0$

$/y \quad m\,(r + r + r + r) + M\,b = (4m+M)\,c$

$/z \quad m\,(e - e + e - e) + 0 = 0$

Pas d'incohérences.

La projection selon y donne la réponse demandée :

$$\boxed{c = \frac{Mb + 4mr}{M + 4m}}$$

---

2) Le dispositif de blocage des deux roues est un dispositif interne, n'exerçant que des forces intérieures.

Le théorème de la résultante dynamique au wagonnet permet d'écrire :

$$(4m+M)\,\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_4} + \overrightarrow{R_2} + \overrightarrow{R_3} = \overrightarrow{0}$$

$$(4m+M)\,\overrightarrow{g} + 2\overrightarrow{R_1} + 2\overrightarrow{R_2} = \overrightarrow{0}$$

$/x \quad \boxed{-(4m+M)\,g\sin\alpha + 2T_1 = 0}$

$/y \quad \boxed{-(4m+M)\,g\cos\alpha + 2N_1 + 2N_2 = 0}$

---

3)

$$\boxed{T_1 = \frac{(4m+M)\,g\sin\alpha}{2}}$$

A.N. $\quad = \dfrac{(4\times 15 + 60)\ 10\ \sin 5°}{2}$

$$\boxed{T_1 = 52{,}3\ \text{N}}$$

---

4) Théorème du moment dynamique : La somme des moments extérieurs

en un point *fixe* O (ou en G) dans $\mathcal{R}$ galiléen est égale à la dérivée du moment cinétique en O (ou respectivement en G).

→ Ici le système est immobile donc son moment cinétique (et donc la dérivée : son moment dynamique) est nul en tout point.

→ on peut, par exemple, appliquer le théorème en O_2 puisque O_2 est fixe.

$$\Sigma \overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext}(O_2) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{O_2I_1} \wedge \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{O_2I_4} \wedge \overrightarrow{R_4} + \overrightarrow{O_2I_2} \wedge \overrightarrow{R_2} + \overrightarrow{O_2I_3} \wedge \overrightarrow{R_3} + \overrightarrow{O_2G} \wedge (M+4m)\vec{g} = \vec{0}$$

$$(\overrightarrow{O_2I_1} + \overrightarrow{O_2I_4}) \wedge \overrightarrow{R_1} + \underbrace{(\overrightarrow{O_2I_2} + \overrightarrow{O_2I_3})}_{\text{nul}} \wedge \overrightarrow{R_2} + \overrightarrow{O_2G} \wedge (M+4m)\vec{g} = \vec{0}$$

$$\boxed{2\,\overrightarrow{O_2O_1} \wedge \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{O_2G} \wedge (M+4m)\vec{g} = \vec{0}}$$

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z} \end{array} \left| \begin{array}{l} 2a \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} T_1 \\ N_1 \\ 0 \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} a \\ c \\ 0 \end{array} \right. (M+4m) \left| \begin{array}{l} -g\sin\alpha \\ -g\cos\alpha \\ 0 \end{array} \right.$$

ce qui donne selon $\vec{u_z}$:

$$4aN_1 + (M+4m)\,g\,(-a\cos\alpha + c\sin\alpha) = 0$$

$$\boxed{N_1 = (M+4m)\,g\left(\frac{\cos\alpha}{4} - \frac{c}{4a}\sin\alpha\right)}$$

---

5) On avait en 2)

$$N_1 + N_2 = (M+4m)\,g\,\frac{\cos\alpha}{2}$$

En tenant compte de 4)

$$\boxed{N_2 = (M+4m)\,g\left(\frac{\cos\alpha}{4} + \frac{c}{4a}\sin\alpha\right)}$$

---

6) Par exemple, en étudiant la roue 1 :

$$\overrightarrow{v}_{\substack{\text{glissement}\\ \text{roue 1/sol}}} = \underbrace{\overrightarrow{v}_{I_1 \in \text{roue 1}/\mathcal{R}}}_{\overrightarrow{v}_{G_1} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{G_1 I_1}} - \underbrace{\overrightarrow{v}_{I_1 \in \text{sol}/\mathcal{R}}}_{\text{nul}}$$

$$\dot{X}\,\overrightarrow{u_x} + \omega\,\overrightarrow{u_z} \wedge -r\,\overrightarrow{u_y}$$

$$\boxed{\overrightarrow{v}_{\text{glissement}} = (\dot{X} + r\omega)\,\overrightarrow{u_x}}$$

Le non glissement implique donc

$$\boxed{\dot{X} = -r\omega}$$

---

7) En utilisant le théorème de König pour une roue :

$$E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + E_c^*$$

(énergie cinétique ds le référentiel barycentrique de la roue)

$$= \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2\right) \omega^2$$

avec $r^2\omega^2 = \dot{X}^2$

$$\boxed{E_{c/\mathcal{R}} = \frac{3}{4} m \dot{X}^2}$$

---

8) Pour le système benne – plateforme – essieux en translation :

$$E_c = \frac{1}{2} M \dot{X}^2$$

Pour les quatre roues :

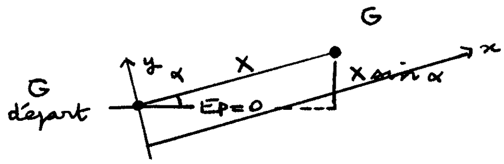
$$E_c = 4 \quad \frac{3}{4} m \dot{X}^2$$

Donc :

$$\boxed{E_{c\,\text{wagonnet}} = \frac{1}{2}(M + 6m)\dot{X}^2}$$

---

9) Energie potentielle :



on peut prévoir, à une constante près :

$$\boxed{E_P = (M+4m)\,g\,X \sin\alpha}$$

<u>Démonstration demandée</u> :

Par exemple, on écrit le poids :

$$\vec{F} = (M+4m)\,\vec{g}$$

$$= (M+4m)\,g\,(-\sin\alpha\,\vec{u_x} - \cos\alpha\,\vec{u_y})$$

$$\delta W = \vec{F}\,\vec{dl}$$

↳ ici $\vec{dl} = dX\,\vec{u_x}$

$$= -(M+4m)\,g \sin\alpha \;dX$$

$$-dE_p = -(M+4m)\,g \sin\alpha \;dX$$

$$E_p = (M+4m)\,g \sin\alpha \;X \;\cancel{+\text{cste}}$$

choisie nulle

---

10)

$$\mathcal{P} = \vec{F}\;\vec{v_G}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_F = F\,\frac{dX}{dt}}$$

---

11) On applique le théorème de la puissance cinétique au système.

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ttes forces}}.$$

pour exprimer le travail de pesanteur, on peut utiliser Ep

$$\frac{d(E_c+E_p)}{dt} = \mathcal{P}_F + \mathcal{P}_{\vec{R_1}} + \mathcal{P}_{\vec{R_2}} + \mathcal{P}_{\vec{R_3}} + \mathcal{P}_{\vec{R_4}} + \mathcal{P}_{\substack{\text{liaisons}\\ \text{intérieures}}}$$

$$\mathcal{P}_{\vec{R_1}} = \vec{R_1}\;\underbrace{\vec{v}_{I_1 \in \text{roue}1}}_{\text{nul car non glissement}}$$

→ Les liaisons (roues-essieux) sont parfaites et ne travaillent pas.
→ Les réactions ne travaillent pas puisque non glissement.

$$\frac{d(E_c + E_p)}{dt} = \mathcal{P}_F$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(M+6m)\dot{X}^2 + (M+4m)\,g\,X\sin\alpha\right) = F\,\frac{dX}{dt}$$

$$\frac{dX}{dt}\left((M+6m)\,\ddot{X} + (M+4m)\,g\,\sin\alpha\right) = F\,\frac{dX}{dt}$$

La solution $\frac{dX}{dt} = 0$ étant une solution parasite, on obtient

$$\boxed{\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{F - (M+4m)\,g\sin\alpha}{(M+6m)}}$$

---

12) Moment cinétique de la roue 1.

Rappel du théorème de König dans le cas général

$$\vec{\sigma}_{/\mathcal{R}}(O) = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{G du système étudié}}}{\overrightarrow{OG}} \wedge m\,\vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \underbrace{\vec{\sigma}^*}_{\text{moment cinétique dans le référentiel barycentrique — ici de la roue 1 —}}$$

On veut

$$\vec{\sigma}_{/\mathcal{R}}(G_1) = \underbrace{\overrightarrow{G_1G_1}}_{\text{nul}} \wedge m\,\vec{v}_{G_1/\mathcal{R}} + \vec{\sigma}^*_{\text{roue }1}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_{/\mathcal{R}\ \text{roue }1}(G_1) = \vec{\sigma}^*_{\text{roue }1}}$$

$$= J\,\vec{\Omega}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_{/\mathcal{R}\ \text{roue }1}(G_1) = \frac{1}{2}\,m\,r^2\,\omega\,\vec{u_z}}$$

---

13) On applique le théorème du moment dynamique à la roue en son point G dans $\mathcal{R}$

$$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{/\mathcal{R}}(G_1) = \Sigma\,\vec{\mathcal{M}}_{ext}(G_1)$$

$$= \underbrace{\cancel{\overrightarrow{G_1G_1}}}_{\text{nul}} \wedge m\vec{g} + \underset{\begin{vmatrix}0\\-r\\0\end{vmatrix}}{\overrightarrow{G_1I_1}} \wedge \underset{\begin{vmatrix}T_1\\N_1\\0\end{vmatrix}}{\overrightarrow{R_1}} + \vec{\mathcal{M}}_{\text{liaison}\,(G_1)}$$

La liaison étant parfaite, $\vec{\mathcal{M}}_{\text{liaison}\,(G_1)}$ n'a pas de coordonnée selon $\vec{u_z}$

En projection selon $\overrightarrow{u_z}$, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{2} m r^2 \frac{d\omega}{dt} = r\, T_1}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m r \frac{d\omega}{dt}$$

$$\boxed{T_1 = -\frac{1}{2} m \frac{d^2X}{dt^2}}$$

$$\boxed{T_1 = -\frac{1}{2} m \frac{F - (M+4m) g \sin\alpha}{(M+6m)}}$$

---

14) Pour la roue 2, l'analyse est rigoureusement la même, en modifiant l'indice 1 par l'indice 2. Donc

$$T_2 = T_1$$

A.N.
$$= -\frac{1}{2}\, 15\, \frac{564{,}5 - (60 + 4 \times 15)\, 10 \sin 5°}{(60 + 6 \times 15)}$$

$$\boxed{T_2 = T_1 = -23{,}0 \text{ N}}$$

---

15) On écrit le théorème de la résultante dynamique au wagonnet.

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = (M+4m)\, \overrightarrow{a_G}$$

$$2\overrightarrow{R_1} + 2\overrightarrow{R_2} + (M+4m)\,\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F} = (M+4m)\, \overrightarrow{a_G}$$

$/\overrightarrow{u_x}$ $\quad 2T_1 + 2T_2 - (M+4m) g \sin\alpha + F = (M+4m) \frac{d^2X}{dt^2}$

$/\overrightarrow{u_y}$ $\quad 2N_1 + 2N_2 - (M+4m) g \cos\alpha = 0$

La projection selon $\overrightarrow{u_y}$ donne la relation demandée :

$$\boxed{N_1 + N_2 = \frac{(M+4m)\, g \cos\alpha}{2}}$$

remarque :

La relation selon $\overrightarrow{u_x}$

$$2T_1 + 2T_2 - (M+4m)\, g \sin\alpha + F = (M+4m) \frac{d^2X}{dt^2}$$

en tenant compte de 13)

$$T_1 = T_2 = -\frac{1}{2}\, m \,\frac{d^2X}{dt^2}$$

donne finalement

$$-2m\frac{d^2X}{dt^2} - (M+4m)\,g\sin\alpha + F = (M+4m)\frac{d^2X}{dt^2}$$

soit l'expression de $\ddot{X}$ obtenue en 11)

---

15)

remarque

On aurait pu s'intéresser au moment cinétique $\vec{\sigma}^*_{\text{wagonnet}}$ de l'ensemble dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ (axes d'origine G parallèles à ceux de $\mathcal{R}$)

En fait dans un référentiel barycentrique, les axes sont parallèles à ceux de $\mathcal{R}$ et le point G (du système considéré) est fixe – sans être forcément l'origine –

Le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ de l'ensemble est aussi :

– le référentiel barycentrique de l'ensemble benne-plateforme-essieux puisque G_0 est fixe dans $\mathcal{R}^*$

– le référentiel barycentrique de chacune des roues puisque G_1, G_2, G_3, G_4 sont fixes chacun dans $\mathcal{R}^*$

Donc finalement :

$\vec{\sigma}^*_{\text{wagonnet}}$ (Ex calcul en G)

$$= \vec{\sigma}_{\substack{\text{benne}\\\text{plateforme}\\\text{essieux}}}(G)/\mathcal{R}^* + \vec{\sigma}_{\text{roue 1}}(G)/\mathcal{R}^* + \vec{\sigma}_{\text{roue 2}}(G)/\mathcal{R}^* + \vec{\sigma}_{\text{roue 3}}(G)/\mathcal{R}^* + \vec{\sigma}_{\text{roue 4}}(G)/\mathcal{R}^*$$

$$\vec{\sigma}^*_{\text{wagonnet}} = \underbrace{\vec{\sigma}^*_{\substack{\text{benne}\\\text{plateforme}\\\text{essieux}}}}_{\substack{\vec{0}\\\text{(immobile dans }\mathcal{R}^*)}} + \underbrace{\vec{\sigma}^*_{\text{roue 1}} + \vec{\sigma}^*_{\text{roue 2}} + \vec{\sigma}^*_{\text{roue 3}} + \vec{\sigma}^*_{\text{roue 4}}}_{J\vec{\Omega}\ \times 4}$$

$$\vec{\sigma}^*_{\text{wagonnet}} = 4J\vec{\Omega}$$

$$= 2mr^2\omega\,\vec{u_z}$$

De plus (rappelé en 12))

$$\vec{\sigma}(G)/\mathcal{R} = \vec{\sigma}^*$$

$$\vec{\sigma}(G)/\mathcal{R} = 2mr^2\omega\,\vec{u_z}$$

Le problème impose une démarche plus complexe pour atteindre le même résultat simple !

Pour la <u>roue 1</u> :

$$\vec{\sigma_1}(G_1)/\mathcal{R} = \frac{1}{2} m r^2 \omega \vec{u_z}$$

$$\vec{\sigma_1}(G)/\mathcal{R} = \vec{\sigma_1}(G_1)/\mathcal{R} + \vec{GG_1} \wedge m \vec{v}_{G_1/\mathcal{R}}$$

(en utilisant la formule de transport du moment)

et

$$\left|\begin{array}{ll} \vec{\sigma_1}(G)/\mathcal{R} = \frac{1}{2} m r^2 \omega \vec{u_z} & + m \vec{GG_1} \wedge \dot{X} \vec{u_x} \\ \vec{\sigma_2}(G)/\mathcal{R} = \frac{1}{2} m r^2 \omega \vec{u_z} & + m \vec{GG_2} \wedge \dot{X} \vec{u_x} \\ \vec{\sigma_3}(G)/\mathcal{R} = \frac{1}{2} m r^2 \omega \vec{u_z} & + m \vec{GG_3} \wedge \dot{X} \vec{u_x} \\ \vec{\sigma_4}(G)/\mathcal{R} = \frac{1}{2} m r^2 \omega \vec{u_z} & + m \vec{GG_4} \wedge \dot{X} \vec{u_x} \end{array}\right.$$

Pour l'<u>ensemble benne-plateforme-essieux</u>

$$\vec{\sigma_0}(G_0)/\mathcal{R} = \underbrace{\vec{G_0G_0}}_{\text{nul}} \wedge M \vec{v}_{G_0/\mathcal{R}} + \underbrace{\vec{\sigma}^*_{\substack{\text{benne}\\\text{plateforme}\\\text{essieux}}}}_{\substack{\text{nul}\\(\text{pas de } \vec{\omega})}}$$

par König

$$= \vec{0}$$

puis, transport du moment :

$$\left| \vec{\sigma_0}(G)/\mathcal{R} = \vec{0} + M \vec{GG_0} \wedge \dot{X} \vec{u_x} \right.$$

<u>En faisant alors la somme des 5 $\vec{\sigma}(G)$</u>, on obtient :

$$\vec{\sigma}(G)/\mathcal{R} = 2 m r^2 \omega \vec{u_z} + \left(M \vec{GG_0} + m \vec{GG_1} + m \vec{GG_2} + m \vec{GG_3} + m \vec{GG_4}\right) \wedge \dot{X} \vec{u_x}$$

Par définition de G, le terme dans la parenthèse est nul

$$\boxed{\vec{\sigma}(G)/\mathcal{R} = 2 m r^2 \omega \vec{u_z}}$$

---

17) $\vec{F}$ et $(M+4m)\vec{g}$ passent par G.

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\mathcal{M}}_F(G) = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_{(M+4m)\vec{g}}(G) = \vec{0} \end{array}}$$

---

18) On applique le théorème du moment dynamique en G dans $\mathcal{R}$ au système complet.

$$\underbrace{\overrightarrow{GI_1}\wedge\overrightarrow{R_1}+\overrightarrow{GI_4}\wedge\overrightarrow{R_1}}_{2\,\overrightarrow{GO_1}\wedge\overrightarrow{R_1}}+\underbrace{\overrightarrow{GI_2}\wedge\overrightarrow{R_2}+\overrightarrow{GI_3}\wedge\overrightarrow{R_2}}_{2\,\overrightarrow{GO_2}\wedge\overrightarrow{R_2}}+\underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}}(G)_{\text{poids}}}_{\text{nul}}+\underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}}(G)_{F}}_{\text{nul}}=\frac{d}{dt}\left(2mr^2\omega\,\overrightarrow{u_z}\right)=2mr^2\frac{d\omega}{dt}\overrightarrow{u_z}$$

$$2\begin{vmatrix}a\\-c\\0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}T\\N_1\\0\end{vmatrix}\quad+\quad2\begin{vmatrix}-a\\-c\\0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}T\\N_2\\0\end{vmatrix}$$

on obtient selon $\overrightarrow{u_z}$

$$\boxed{2a(N_1-N_2)+4cT=2mr^2\frac{d\omega}{dt}}$$

$$a(N_1-N_2)+2cT=mr^2\frac{d\omega}{dt}$$

$$a(N_1-N_2)-mc\ddot{X}=-mr\ddot{X}$$

finalement :

$$\boxed{N_1-N_2=m\frac{(c-r)}{a}\ddot{X}}$$

---

19)

$$N_1+N_2=\frac{(M+4m)g\cos\alpha}{2}$$

$$N_1-N_2=m\left(\frac{c-r}{a}\right)\ddot{X}$$

$$\boxed{\begin{aligned}N_1&=\frac{1}{4}\left[(M+4m)g\cos\alpha+2m\left(\frac{c-r}{a}\right)\ddot{X}\right]\\N_2&=\frac{1}{4}\left[(M+4m)g\cos\alpha-2m\left(\frac{c-r}{a}\right)\ddot{X}\right]\end{aligned}}$$
