

DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

| | |
|---|----|
| <u>Induction</u> | 2 |
| I. <u>Question préliminaire</u> | 2 |
| II. <u>Freinage</u> | 3 |
| A. <u>Le champ magnétique est étendu à toute la zone $x > 0$</u> | 3 |
| B. <u>Le champ magnétique n'existe que entre $x = 0$ et $x = d$</u> | 4 |
| C. <u>N zones de freinage</u> | 4 |
| D. <u>Freinage hybride</u> | 4 |
| <u>Ondes</u> | 5 |
| I. <u>Propagation d'une onde électromagnétique dans le métal</u> | 5 |
| A. <u>Conductivité du milieu</u> | 5 |
| B. <u>Nature de l'onde</u> | 6 |
| II. <u>Réflexion d'une onde électromagnétique</u> | 6 |
| III. <u>Ionisation dans le métal, limite en puissance</u> | 7 |
| <u>Diagrammes d'Ellingham</u> | 9 |
| I. <u>Élaboration de l'oxyde de titane TiO_2</u> | 9 |
| II. <u>Préparation du tetrachlorure $TiCl_4$</u> | 10 |
| III. <u>Réduction de $TiCl_4$ (procédé Kroll)</u> | 11 |
| A. <u>Étude préliminaire</u> | 11 |
| B. <u>Analyse de la réduction</u> | 12 |

Sujet 1 : extrait modifié de Physique I PC et PSI, Centrale 2011

Sujet 2 : extrait modifié de Physique MP, Centrale 2011

Sujet 3 : extrait modifié de E3A MP Physique-Chimie 2010

Les sujets appartiennent aux différents concours et sont publiés sous la licence: [Creative Commons Paternité-Pas d'Utilisation Commerciale-Partage des Conditions Initiales à l'Identique](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).



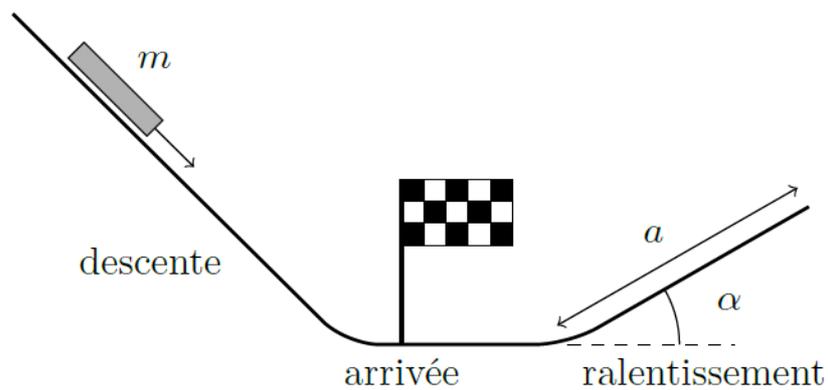
Induction

Le skeleton est un sport d'hiver qui se pratique dans un couloir de glace en pente : le coureur s'allonge sur une planche qui glisse sur la glace en prenant appui sur des patins.



I. Question préliminaire

L'ensemble coureur + skeleton est assimilé à un solide de masse $m=100\text{ kg}$ pouvant glisser sans frottement. Il franchit la ligne d'arrivée avec une vitesse v_0 et se ralentit simplement en montant une pente faisant un angle α avec l'horizontale.

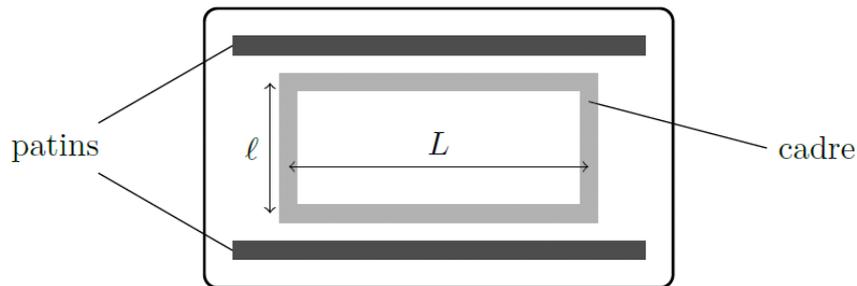


1. Déterminer la longueur a de piste nécessaire au ralentissement.
2. Application numérique: on prendra $v=30\text{ m.s}^{-1}$ et $g=10\text{ m.s}^{-2}$ et on considérera une pente de 5% .

L'infrastructure ne se prêtant pas à la réalisation d'une piste inclinée de décélération on envisage un autre type de freinage; c'est ce freinage et ses conséquences que l'on va étudier dans la suite du problème.

II. Freinage

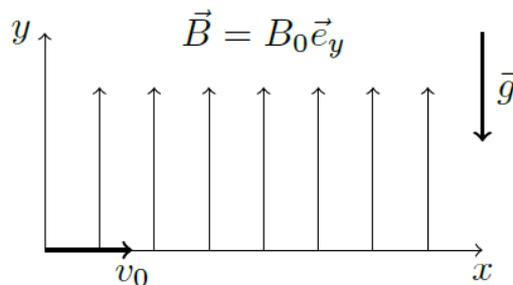
On fixe sous la planche un cadre métallique conducteur ayant la forme d'un rectangle de côtés $\ell \times L$.



Skeleton vu de dessous

La piste de décélération est horizontale; on considérera un référentiel $(Oxyz)$ galiléen lié au sol. L'origine O est prise au point d'arrivée, l'axe Ox le long de la piste de décélération (qui correspond donc à $x > 0$), l'axe Oy selon la verticale ascendante. Un dispositif adéquat crée un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{u}_y$, stationnaire et uniforme sur toute ou partie de la longueur de piste de décélération (et sur toute la largeur de la piste).

A. Le champ magnétique est étendu à toute la zone $x > 0$



La position du cadre est repérée par l'abscisse x de son extrémité avant et on suppose $x=0$ à $t=0$.

La résistance électrique du cadre est notée R . Son inductance propre est négligeable.

- Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse $v = \frac{dx}{dt}$; on distinguera deux phases dans le mouvement selon que le cadre se trouve partiellement ou totalement plongé dans le champ magnétique. Mettre en évidence un temps caractéristique τ que l'on exprimera en fonction de B_0 , m , ℓ et R .
- Déterminer $x(t)$ pendant la phase de décélération.
- Montrer que l'engin ne stoppe qu'à condition que L soit supérieure à une certaine valeur que

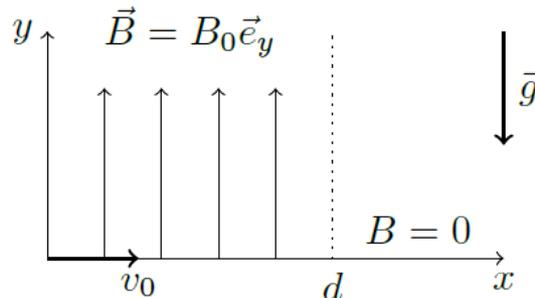
l'on précisera. Montrer par une application numérique que ceci n'est pas réalisé.

6. Déterminer la vitesse finale du skeleton. En tout état de cause serait-il réaliste de n'envisager que ce freinage pour arrêter l'appareil ?

On donne : $\ell = 30 \text{ cm}$, $L = 50 \text{ cm}$, $B_0 = 1,0 \text{ T}$ et $R = 1,0 \times 10^{-2} \Omega$

B. Le champ magnétique n'existe que entre $x = 0$ et $x = d$

On suppose à présent que le champ magnétique (stationnaire et uniforme) n'est non nul que dans la zone comprise entre $x = 0$ et $x = d$.



7. Si $L \geq d$, montrer qualitativement qu'il existe deux phases de freinage séparées par une phase où la vitesse reste constante et déterminer la vitesse à l'issue des deux phases de freinage.

8. Même question si $L \leq d$.

9. Quelle valeur doit-on donner à d , en fonction de L , pour optimiser le freinage?

C. N zones de freinage

On place N zones de freinage identiques à la précédente (optimisées) séparées les unes des autres d'une distance D .

10. Quelle doit être la distance D pour encore une fois optimiser le freinage ?

11. Quelle valeur donner à N pour stopper le skeleton ? En déduire la distance d'arrêt et comparer sa valeur numérique à la valeur trouvée précédemment dans la question préliminaire.

12. Quelle est la durée de chaque phase de freinage ? Applications numériques: calculer la durée de la première phase de freinage, calculer la durée de la centième phase de freinage.

13. Déterminer la durée du freinage pour N zones de freinage en fonction de N et des autres grandeurs. Conclusion: que peut-on dire de la durée totale du freinage?

D. Freinage hybride

On peut alors choisir un freinage « hybride »: freinage électromagnétique d'abord jusqu'à ce que la vitesse soit $v_1 = 10 \text{ m.s}^{-1}$, puis freinage mécanique ensuite.

14. Déterminer la durée du freinage électromagnétique ainsi que le nombre de zones de champ nécessaire.

Ondes

Certaines valeurs numériques sont regroupées en fin d'énoncé. Les résultats numériques fournis par les candidats tiendront compte du nombre de chiffres significatifs des valeurs de l'énoncé.

Lors de la réflexion d'une onde électromagnétique de forte intensité sur une surface métallique, celle-ci risque d'être endommagée du fait de l'ionisation du milieu sous l'effet du champ électrique. On souhaite déterminer l'ordre de grandeur de la puissance maximale de l'onde incidente pour éviter ce phénomène.

Le métal (de l'or) occupe tout le demi-espace $z > 0$, le demi espace $z < 0$ étant de l'air assimilé au vide.

L'onde incidente est supposé monochromatique et se propage dans le vide suivant l'axe Oz dans le sens des z croissants (incidence normale). La longueur d'onde dans le vide de cette onde est $\lambda = 1050 \text{ nm}$.

I. Propagation d'une onde électromagnétique dans le métal

A. Conductivité du milieu

Le métal est constitué d'ions et d'électrons libres. On note n le nombre d'électrons libres par unité de volume, $q = -e$ la charge d'un électron et m sa masse. La vitesse d'un électron au point M à l'instant t est notée $\vec{v}(M, t)$.

On adopte le modèle suivant (modèle de Drude) :

- les électrons sont traités dans le cadre de la mécanique classique ;
- le déplacement des électrons est faible devant la longueur d'onde et l'accélération des électrons $\frac{d\vec{v}}{dt}$ en M est assimilée à $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(M, t)$;
- les électrons subissent de la part du réseau cristallin une force de la forme $-\frac{m}{\tau}\vec{v}(M, t)$, où τ est une constante caractéristique du milieu ;
- l'effet du champ magnétique sur un électron est négligeable.

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un électron, donner l'équation différentielle vérifiée par $\vec{v}(M, t)$.

On se place pour toute la suite dans le cas d'un régime sinusoïdal forcé de pulsation ω : $\vec{v}(M, t) = \Re(\vec{\tilde{v}}(M, t))$ avec $\vec{\tilde{v}}(M, t) = \vec{\tilde{v}}(M) \exp(j\omega t)$.

2. Donner l'expression de $\vec{\tilde{v}}(M, t)$ en fonction du champ électrique complexe $\vec{\tilde{E}}(M, t)$.

3. Justifier que la contribution des ions au vecteur densité de courant électrique $\vec{J}(M, t)$ est négligeable.
4. Montrer que l'on peut écrire : $\vec{J}(M, t) = \underline{\sigma} \vec{E}(M, t)$ avec $\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{(1 + j\omega\tau)}$ où σ_0 est une constante réelle à exprimer en fonction des données. À quoi correspond σ_0 ?
5. En supposant que chaque atome donne un électron libre, calculer la densité d'électrons n dans l'or ainsi que la constante τ .

On donne :

Masse volumique de l'or : $\mu = 19300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Masse molaire de l'or : $M = 197 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;

Valeur de σ_0 : $\sigma_0 = 4,5 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

6. Montrer, en tenant compte des applications numériques précédentes, que l'on peut simplifier l'expression de la conductivité à : $\underline{\sigma} = -j \frac{nq^2}{m\omega}$

B. Nature de l'onde

On suppose que le milieu n'est pas magnétique et qu'à tout instant et en chaque point la densité volumique de charge électrique est nulle.

7. Écrire les équations de Maxwell vérifiées par les champs électrique et magnétique dans le conducteur.
8. En déduire l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique.

On cherche à étudier la propagation d'un champ de la forme $\vec{E}(M, t) = \underline{E}(0) \exp[j(\omega t - k z)] \vec{u}_x$.

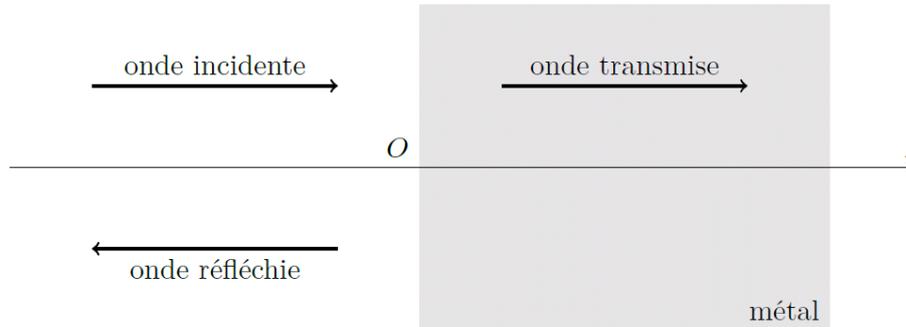
9. Montrer que k doit être solution de $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide et ω_p une constante caractéristique du matériau dont on donnera l'expression.
10. Calculer ω_p et montrer que ω^2 est négligeable devant ω_p^2 .
11. En déduire k en fonction de ω_p et c (on justifiera avec soin le choix de la solution adoptée) ainsi que les expressions des champs électrique et magnétique. Quelle est la nature de l'onde ?
12. Calculer numériquement la distance caractéristique sur laquelle les champs sont non négligeables. Justifier l'hypothèse milieu semi-infini.

II. Réflexion d'une onde électromagnétique

On veut exprimer l'amplitude complexe du champ dans le conducteur en fonction de l'amplitude

de l'onde incidente.

Les champs électriques des ondes incidente et réfléchie dans le vide sont respectivement : $\vec{E}_i(z, t) = E_0 \exp[j\omega(t - z/c)] \vec{u}_x$ et $\vec{E}_r(z, t) = r E_0 \exp[j\omega(t + z/c)] \vec{u}_x$ où r est le coefficient, éventuellement complexe, de réflexion.



13. Donner les expressions des champs magnétiques correspondants.
14. On se place ici dans le cas d'une distribution volumique de charges et de courants et donc les champs sont continus à l'interface. Quelles relations les champs électriques et magnétiques des ondes incidente, réfléchie et transmise doivent-ils vérifier ?
15. En déduire l'expression du coefficient de réflexion. Que peut-on dire de l'amplitude de l'onde réfléchie par rapport à celle de l'onde incidente ?
16. Donner l'expression de l'amplitude $E(0) = |\underline{E}(0)|$ du champ électrique à la surface du conducteur en fonction de E_0 , ω et ω_p .
17. On note v_0 la vitesse maximale atteinte par les électrons dans le conducteur. En tenant compte des ordres de grandeur de ω et ω_p , montrer que : $v_0 = 2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{nm}} E_0$.

III. Ionisation dans le métal, limite en puissance

Les électrons accélérés risquent d'ioniser par impact les atomes voisins, l'équilibre de la matière ainsi rompu provoque l'éjection de particules hautement ionisées et la destruction du dépôt métallique sur la surface.

18. Sachant que l'or a pour numéro atomique $Z=79$ et un rayon atomique $r=140 \text{ pm}$, estimer l'ordre de grandeur de l'énergie nécessaire pour provoquer une ionisation. Calculer cette énergie. En fait les tables donnent une énergie de l'ordre de 9 eV . Comment peut-on expliquer l'écart entre les deux valeurs.

On prendra la valeur tabulée pour la suite des calculs.

19. En supposant que lors d'un choc électron-ion toute l'énergie cinétique de l'électron est transmise à l'ion, quelle est l'ordre de grandeur de la vitesse susceptible de créer une ionisation

supplémentaire.

20. Quelle est l'amplitude du champ électrique de l'onde incidente susceptible de donner lieu à une telle vitesse ?
21. Quelle est la puissance moyenne de cette onde sachant que la section du faisceau est de l'ordre de 260 cm^2 ?
22. Expérimentalement, pour une impulsion de une picoseconde, on mesure un seuil d'endommagement de $0,5 \text{ J.cm}^{-2}$. Comparer au résultat précédent et commenter la pertinence du modèle.

Données

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (SI)}$

Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ (SI)}$

Charge de l'électron : $q = -e = -1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

Masse de l'électron : $m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

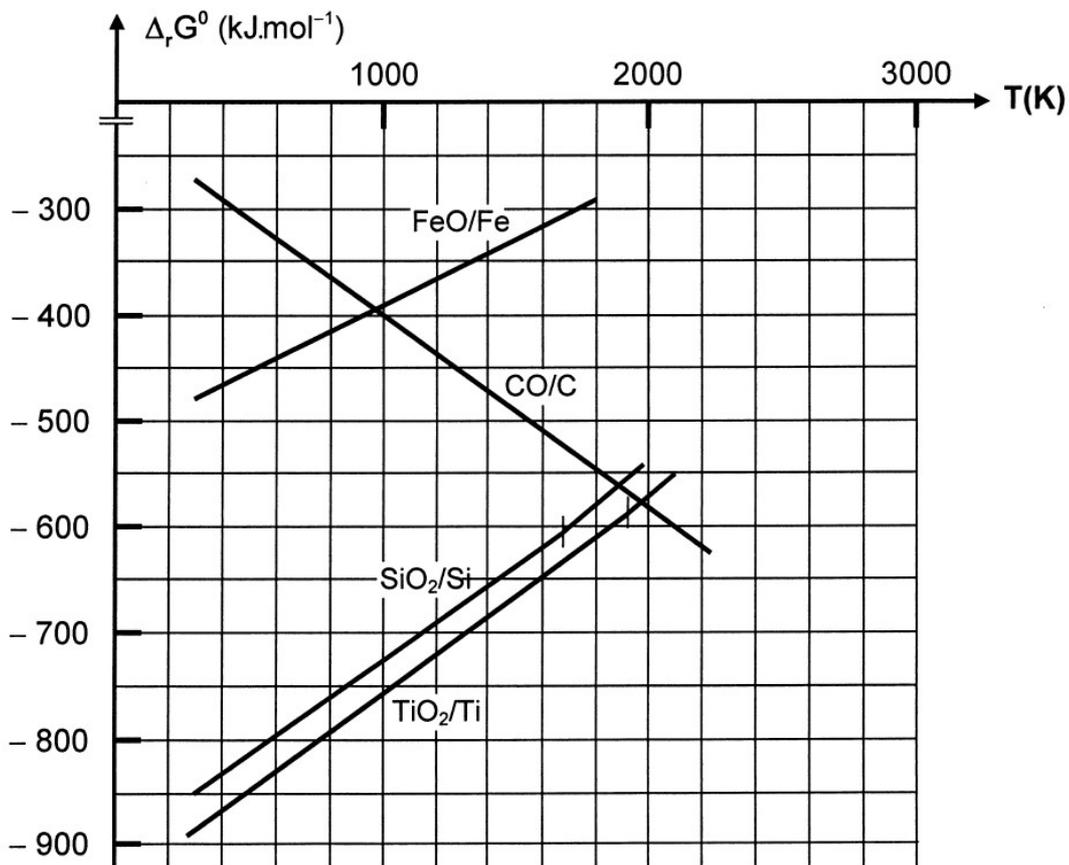
Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Diagrammes d'Ellingham

Le minerai le plus abondant renfermant du titane est l'ilménite $FeTiO_3$ (mélange équimolaire d'oxyde de fer FeO et de dioxyde de titane TiO_2); ce minerai renferme également des oxydes de silicium et d'aluminium en pourcentages minoritaires.

I. Élaboration de l'oxyde de titane TiO_2

Les deux oxydes majoritaires FeO et TiO_2 ayant des stabilités très différentes, un procédé à haute température permet d'obtenir le dioxyde de titane avec un excellent rendement. Dans un four préalablement porté à 1000 K , sont introduits du minerai et du carbone (sous forme de coke); la réaction s'opère à 1300 K . Au final du dioxyde de titane (dont l'analyse ultérieure prouve qu'il ne renferme pratiquement plus de fer) et de la fonte sont obtenus.



Courbes d'Ellingham relatives aux couples FeO/Fe , CO/C , SiO_2/Si et TiO_2/Ti

Figure 1

- En utilisant la *figure 1* reproduisant les évolutions avec la température des enthalpies libres standard $\Delta_r G^\circ(T)$ des couples CO/C , FeO/Fe , SiO_2/Si et TiO_2/Ti , montrer que le carbone peut réduire l'oxyde de fer FeO dans une plage de température à justifier.

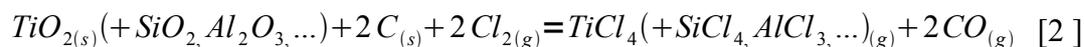
- Écrire la réaction de réduction de l'oxyde de fer par le carbone ; cette réduction est-elle envisageable à 1300 K ? Préciser sous quelle forme le carbone est récupéré.
- Les dioxydes de silicium et de titane sont-ils réduits au cours de l'opération ? A partir de quelle température TiO_2 pourrait-il être réduit par le carbone ?
- Considérons l'équilibre : $Ti_{(s)} + O_{2(g)} = TiO_{2(s)}$ [1], pour lequel l'expression de l'enthalpie libre standard en fonction de la température est fournie dans les annexes. Calculer l'enthalpie libre de cette réaction à 1300 K , sachant qu'elle s'effectue dans l'air à la pression atmosphérique (prise comme pression de référence $p^\circ = 1\text{ bar}$). Justifier la grande stabilité du dioxyde de titane.

II. Préparation du tétrachlorure $TiCl_4$

Les oxydes, nitrures et carbures de titane sont très stables, indestructibles à la température de fusion du métal et même sous vide. De plus, la présence de traces de carbone rend le titane fragile, non utilisable pour les applications métallurgiques.

Il n'est donc pas possible de concevoir une élaboration directe du métal à partir de l'oxyde ; il faut passer par un produit intermédiaire, le tétrachlorure $TiCl_4$, composé liquide de 248 K à 409 K , puis gazeux au-delà.

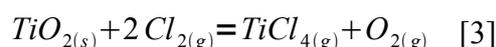
La première opération métallurgique est une chloration du dioxyde de titane en présence de carbone, suivant la réaction :



(les composés notés entre parenthèses participent bien évidemment à la réaction mais ne seront pas pris en compte dans les questions qui suivent).

Le dioxyde de titane est introduit sous forme poudreuse dans le four préalablement chauffé à 900 K ; l'injection du dichlore gazeux réalise un lit fluidisé. Puis du carbone finement broyé est alors introduit, il s'enflamme et maintient une température de 1100 K .

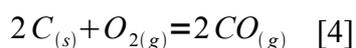
- D'un point de vue thermodynamique, étudions d'abord la réaction :



A l'aide des données thermodynamiques fournies dans l'annexe, déterminer l'enthalpie standard, l'entropie standard et l'enthalpie libre standard de la réaction [3] à 1100 K . (Se placer, pour simplifier les calculs, dans le cadre de l'approximation d'Ellingham)

- Calculer l'enthalpie libre de réaction de la réaction [3] dans les conditions suivantes : $T = 1100\text{ K}$, $p(Cl_2) = 0,4\text{ bar}$, $p(TiCl_4) = 0,2\text{ bar}$ et $p(O_2) = 0,2\text{ bar}$. Conclure.

- On imagine ensuite de coupler la réaction [3] avec la réaction :



Calculer l'enthalpie libre de réaction de la réaction [4] à 1100 K , sachant que $p(O_2) = 0,2\text{ bar}$ et $p(CO) = 0,4\text{ bar}$.

- Peut-on obtenir le tétrachlorure de titane $TiCl_4$, sous forme gazeuse, en couplant les réactions [3] et [4] ? Justifier quantitativement la réponse.

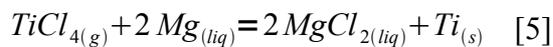
9. Quelle est l'influence d'une augmentation de la température ou de la pression sur le déplacement de l'équilibre [2] ?

10. Conclure quant au rôle joué par le carbone.

A la sortie du four, un mélange gazeux contenant $TiCl_4$, $SiCl_4$, $AlCl_3$ est obtenu. Les chlorures autres que $TiCl_4$ sont éliminés par condensation fractionnée.

III. Réduction de $TiCl_4$ (procédé Kroll)

Peu de métaux (Ca , Mg et Na) sont susceptibles de réduire $TiCl_4$. Parmi ceux-ci, le magnésium de haute pureté a été retenu à l'échelle industrielle, selon la réaction de réduction suivante, dans laquelle les phases condensées sont non miscibles :



A cause de la réactivité des produits, cette réduction doit être effectuée dans un réacteur en acier sous atmosphère inerte d'argon rigoureusement sec : $TiCl_4$ est injecté sous phase gazeuse dans un bain de magnésium liquide (proportions stœchiométriques) ; après deux journées à $1150 K$, le réacteur renferme du titane solide et du chlorure de magnésium liquide.

11. Analyser qualitativement puis quantitativement ce qui se passerait si du dioxygène était présent dans le réacteur.

12. En tenant compte de l'état physique des réactifs et des produits dans la réaction étudiée (voir données fournies en annexe), déterminer l'intervalle de température a priori compatible avec la réaction. Il est précisé que le titane peut être contaminé au contact des parois en acier, au-delà de $1200 K$. Industriellement, la température de réaction est réglée à $1150 K$; est-ce en accord avec votre choix ?

A. Étude préliminaire

13. A l'aide des données thermodynamiques, déterminer, dans le cadre de l'approximation d'Ellingham, les expressions des différentes enthalpies libres standard $\Delta_r G_i^\circ(T)$ en fonction de la température, pour les couples $TiCl_4/Ti$, en tenant compte des divers états physiques possibles des composés, dans l'intervalle ($248-1900 K$) (chaque réaction ne fera intervenir qu'une mole de dichlore).

Les expressions des enthalpies libres standard $\Delta_r G_i^\circ(T)$ en fonction de la température pour les couples $MgCl_2/Mg$, établies en faisant intervenir une mole de dichlore et en tenant compte des divers états physiques possibles des composés, sont fournies en annexe et représentées sur la *figure 2* (et sur le document-réponse qu'il conviendra de compléter et de rendre avec la copie), dans l'intervalle ($248-1900 K$).

14. Représenter sur le document-réponse le tracé relatif au couple $TiCl_4/Ti$.

15. D'après le graphe tracé précédemment, la réaction [5] semble-t-elle ou non favorisée ?

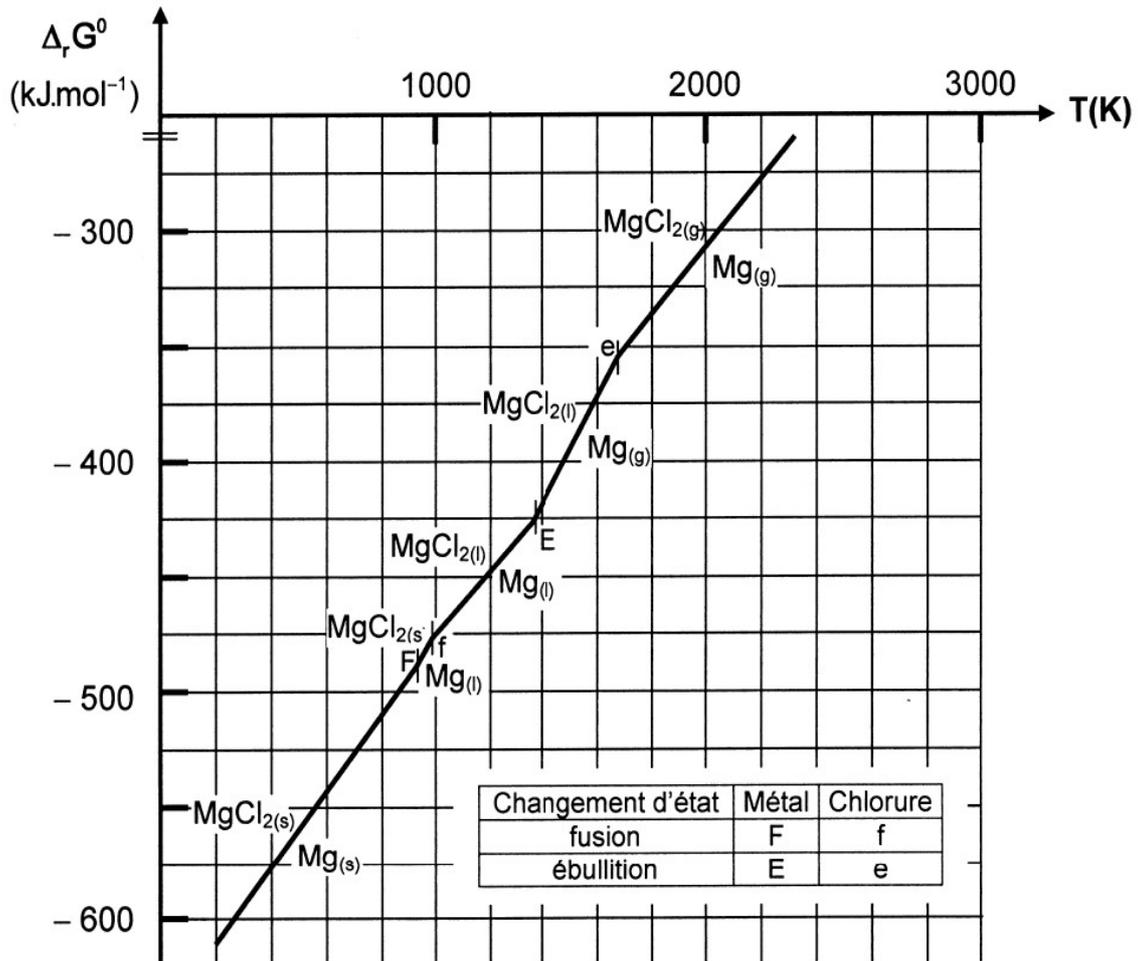


Figure 2

B. Analyse de la réduction

16. Calculer l'enthalpie libre standard $\Delta_r G_s^\circ(T)$ à 1150 K , puis l'enthalpie libre de réaction, sachant que dans le réacteur industriel, la pression partielle en TiCl_4 est maintenue à $0,1\text{ bar}$. Préciser si la réaction se révèle totale ou non.

17. Proposer une technique simple pour séparer le titane du chlorure de magnésium. Expliquer comment recycler le chlorure de magnésium, dans le cadre des opérations précédemment décrites.

Le titane solide obtenu présente un aspect poreux (il porte alors le nom d'éponge de titane), contenant encore dans ses pores du magnésium, du chlorure de magnésium ainsi que des traces de fer (réacteur en acier). Après distillation sous vide, l'éponge est broyée puis refondue sous vide à 2000 K ; après refroidissement, des lingots de titane de haute pureté sont obtenus.

DONNEES NUMERIQUES

Dans tous les calculs, les gaz sont assimilés à des gaz parfaits et les phases solides sont considérées comme non miscibles. La pression partielle d'un gaz sera notée p et les indices suivants seront utilisés : (s) solide, (liq) liquide, (g) gaz.

Le logarithme décimal sera noté : \log et le logarithme népérien : \ln .

Constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

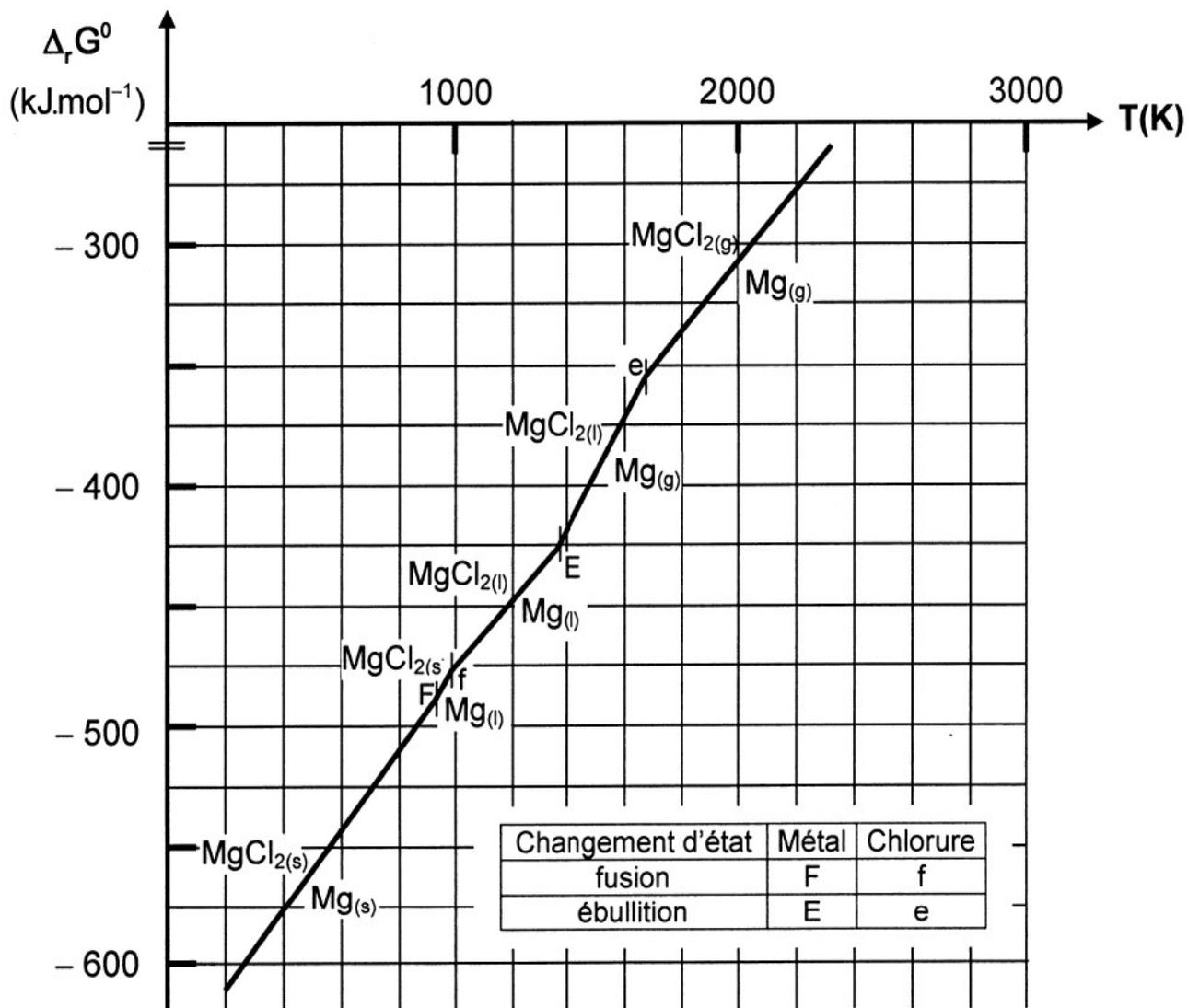
DONNEES THERMODYNAMIQUES

| Élément ou composé | Enthalpie standard de formation à 298 K $\Delta_f H^\circ$ (kJ.mol ⁻¹) | Entropie molaire standard à 298 K S° (J.K ⁻¹ .mol ⁻¹) | Température de fusion T_f (K) | Enthalpie molaire de fusion à T_f $\Delta_{fus} H^\circ$ (kJ.mol ⁻¹) | Température de vaporisation T_e (K) | Enthalpie molaire de vap. à T_e $\Delta_{vap} H^\circ$ (kJ.mol ⁻¹) | Densité |
|-------------------------|--|---|---------------------------------|--|---------------------------------------|--|---------|
| Ti (s) | 0 | 30,6 | 1933 | 16,0 | 3560 | 429,0 | 4,5 |
| TiO ₂ (s) | - 945 | 50,6 | 2113 | | | | |
| TiCl ₄ (liq) | - 804 | 252,3 | | | 409 | 35,1 | |
| Mg (s) | 0 | 32,7 | 923 | 9,2 | 1378 | 131,8 | |
| MgCl ₂ (s) | - 642 | 89,6 | 987 | 43,1 | 1685 | 136,8 | |
| MgCl ₂ (liq) | | | | | | | 2,3 |
| C (s) | 0 | 5,7 | | | | | |
| CO (g) | - 110 | 197,9 | | | | | |
| O ₂ (g) | 0 | 205,0 | | | | | |
| Cl ₂ (g) | 0 | 223,0 | | | | | |

Enthalpies libres standard de réaction (calculées pour une mole de O₂ ou de Cl₂)

| Couple | $\Delta_r G^\circ$ (kJ.mol ⁻¹) |
|------------------------------------|--|
| FeO (s) / Fe (s) | - 519 + 0,125 · T |
| CO (g) / C (s) | - 221 - 0,179 · T |
| SiO ₂ (s) / Si (s) | - 911 + 0,182 · T |
| SiO ₂ (s) / Si (liq) | - 961 + 0,212 · T |
| TiO ₂ (s) / Ti (s) | - 945 + 0,185 · T |
| TiO ₂ (s) / Ti (liq) | - 961 + 0,194 · T |
| MgCl ₂ (s) / Mg (s) | - 642 + 0,166 · T |
| MgCl ₂ (s) / Mg (liq) | - 651 + 0,176 · T |
| MgCl ₂ (liq) / Mg (liq) | - 608 + 0,132 · T |
| MgCl ₂ (liq) / Mg (g) | - 740 + 0,228 · T |
| MgCl ₂ (g) / Mg (g) | - 603 + 0,147 · T |

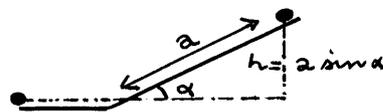
DOCUMENT-REPONSE A RENDRE AVEC LA COPIE



Réponses

Le skeleton

1) En absence de frottement, l'énergie mécanique totale est conservée



$$E_{Pf} = mgh = mga \sin \alpha$$

$$E_{Cf} = 0$$

$$E_{Pi} = 0$$

$$E_{Ci} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$E_{Pi} + E_{Ci} = E_{Pf} + E_{Cf}$$

$$0 + \frac{1}{2} m v_0^2 = mga \sin \alpha + 0$$

donc :

$$a = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}$$

3) A.N.

avec

$$\tan \alpha = 0,05$$

$$\sin \alpha = + \sqrt{\frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{0,05^2}{1 + 0,05^2}}$$

$$= 0,0499$$

On est dans le cadre de l'approximation des petits angles

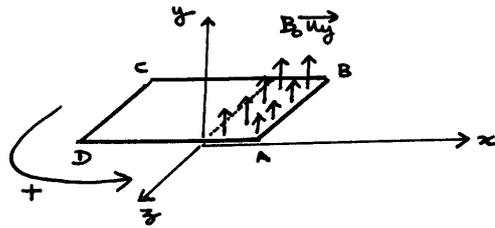
$$\text{avec } \sin \alpha = \tan \alpha = 0,05$$

$$a = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}$$

$$= \frac{(30)^2}{2 \times 10 \times 0,05}$$

$$a = 900 \text{ m}$$

3) a) au départ le cadre se trouve partiellement plongé dans le champ magnétique $x_{AB} = x(t) < L$



orientation

Le cadre est orienté par l'axe y
(sens positif ABCD)

force électromotrice induite

on néglige le champ propre (L négligé)

$$e = e_{AB} + e_{BC} + e_{CD} + e_{DA}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } e_{AB} &= \int_{AB} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{z=0}^{z=l} (v \vec{u}_x \wedge B_0 \vec{u}_y) \cdot dz \vec{u}_z \\ &= -B_0 l v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{BC} &= \int_{BC} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{x_{AB}=x}^0 (v \vec{u}_z \wedge B_0 \vec{u}_y) \cdot dx' \vec{u}_x \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$e_{CD} = 0 \quad (\vec{B} \text{ nul sur CD})$$

$$e_{DA} = 0 \quad (\text{même calcul que } e_{BC} \text{ avec inversion des bornes})$$

$$e(t) = -B_0 l v(t)$$

remarque :

L'utilisation de $e = -\frac{d\phi}{dt}$ est plus performante ici

$$\phi = B_0 l x_{AB} = B_0 l x$$

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0 l v$$

équation électrique du circuit

$$e = R i$$

$$\boxed{-B_0 l v(t) = R i(t)} \quad (1)$$

force de Laplace subie par le cadre

$$\vec{F} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{DA}$$

$$\text{avec } \vec{F}_{AB} = \int_{AB} i d\vec{t} \wedge \vec{B}$$

$$= \int_{z=0}^{z=l} i dz \vec{u}_z \wedge B_0 \vec{u}_y$$

$$= i l B_0 \vec{u}_x$$

$$\vec{F}_{BC} = \int_{BC} i d\vec{t} \wedge \vec{B}$$

mais \vec{B} n'est non nul qu'entre $x = x_{AB}$ et $x = 0$

$$= \int_{x_{AB}=x}^0 i dx' \vec{u}_x \wedge B_0 \vec{u}_y$$

$$= -i x B_0 \vec{u}_y$$

$$\vec{F}_{CD} = \vec{0} \quad (\vec{B} \text{ nul sur } CD)$$

$$\vec{F}_{DA} = +i x B_0 \vec{u}_y$$

(même calcul que \vec{F}_{BC} avec inversion des bornes)

$$\boxed{\vec{F} = i l B_0 \vec{u}_x}$$

équation mécanique

On applique le théorème de la résultante cinétique au cadre

$$\vec{F} + \vec{\text{poids}} + \vec{\text{réaction}} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

\vec{u}_x

$$\boxed{i l B_0(t) = m \frac{dv(t)}{dt}} \quad (2)$$

équation différentielle du mouvement

(on regroupe (1) et (2))

$$\text{de (1) : } i(t) = -\frac{B_0 l v(t)}{R}$$

on reporte alors dans (2)

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{B_0^2 l^2}{mR} v(t) = 0$$

on pose pour le temps de relaxation

$$\tau = \frac{mR}{B_0^2 l^2}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} v(t) = 0$$

b) deuxième phase: le cadre est totalement plongé dans le champ magnétique $x_{AB} = x(t) > L$

force électromotrice induite

$$e = 0$$

(soit on fait $e = -\frac{d\phi}{dt}$ avec $\phi = B_0 l L = \text{cte}$)

soit on remarque que $e_{DA} = -e_{AB}$)

équation électrique du circuit

$$i = 0$$

(cf on a toujours $e = Ri$)

force de Laplace

nécessairement nulle

- d'une part parce que $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{CD}$

- mais surtout parce que i est nul

Donc l'équation différentielle est :

$$\frac{dv(t)}{dt} = 0$$

4) Pendant la première phase (décélération) :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$$

$$v = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

C.I. $v_0 = A$

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

En intégrant à nouveau

$$x = -v_0 \tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + A'$$

C.I. $0 = -v_0 \tau + A'$

$$x = v_0 \tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

pour $x < L$

5) La distance totale parcourue (si la zone de freinage est suffisamment étendue) vaut :

$$x_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(v_0 \tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \right)$$

$$x_{\max} = v_0 \tau$$

L'engin s'arrête donc si

$$L > v_0 \tau$$

Applications numériques :

$$\tau = \frac{m R}{B_0^2 l^2}$$

$$= \frac{100 \times 0,01}{1^2 (9,3)^2}$$

$$\tau = 11,1 \text{ s}$$

$$x_{\max} = v_0 \tau$$

$$x_{\max} = 333 \text{ m}$$

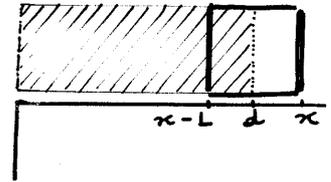
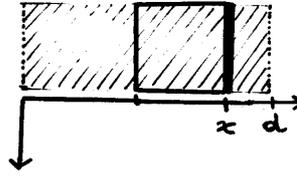
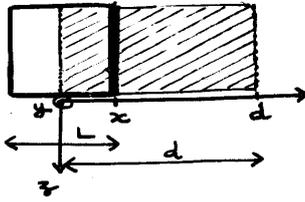
il est évident que la longueur L de la planche est inférieure à cette valeur. L'engin n'est donc pas stoppé.

6) Pendant la deuxième phase, la vitesse du squelette est une constante. La vitesse finale est donc la vitesse à la fin de la première phase c'est à dire pour $x=L$. On désigne par t_1 la valeur de t pour $x=L$

$$L = v_0 \tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right)\right)$$

$$\exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) = 1 - \frac{L}{v_0 \tau}$$

8) $L < d$
 3 phases aussi pour le freinage



$0 < x < L$
 $0 < t < t_1$
 Même étude qu'en 7) en remplaçant d par L

$$v_1 = v_0 - \frac{L}{\tau}$$

$L < x < d$
 $t_1 < t < t_2$
 Même étude qu'en 7) en remplaçant d par L et L par d

$$v_2 = v_1$$

$x > d$
 $x - L < d$
 $d < x < L + d$
 $t_2 < t < t_3$
 Même remarque que ci-contre

$$v_3 = v_2 - \frac{L}{\tau}$$

finallement

$$v_3 = v_0 - \frac{2L}{\tau}$$

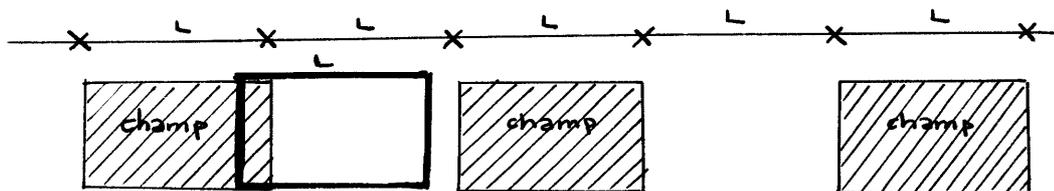
9) Pour optimiser le freinage, il faut réduire la phase "milieu" au cours de laquelle, il y a vitesse constante.
 Au mieux, on fera donc

$$d = L$$

10) En reconsidérant les trois phases dans une zone (avec $L = d$)
 première phase: $0 < x < L$
 deuxième phase: nulle
 troisième phase: $L < x < 2L$ } $0 < x < 2L$

donc

$$D = 2L$$



- 11) La vitesse diminue de $\frac{2L}{\tau}$ après chaque zone de freinage
Donc après N zones, la vitesse vaudra

$$v_{\text{final}} = v_0 - N \frac{2L}{\tau}$$

Le nombre minimal de zones à prévoir pour l'arrêt est donc

$$N = \frac{v_0 \tau}{2L}$$

ou si le résultat ne donne pas un entier ici :

$$N = E \left[\frac{v_0 \tau}{2L} \right] + 1$$

$$\begin{aligned} \text{A.N.} &= E \left[\frac{30 \cdot 100/9}{2 \cdot 0,5} \right] + 1 \\ &= E [333,3] + 1 \end{aligned}$$

$$N = 334$$

La distance d'arrêt est obtenue en multipliant N par $\frac{2L}{D}$

$$a = v_0 \tau$$

$$\text{A.N.} = 30 \times 100/9$$

$$a = 333,3 \text{ m}$$

(on avait trouvé 300 m à la première question)

- 12) Durée de la k ème phase de freinage (correspondant à la k ème zone de freinage)

Quand le freinage est optimisé, on constate que le cadre est sans arrêt soumis à la force de freinage $\vec{F} = -m \frac{v}{\tau} \vec{u}_x$
donc l'équa diff est toujours la même :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$$

$$v = v_0 e^{-t/\tau}$$

$$x = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau})$$

Pour la k ème zone

x varie entre $(k-1)2L$ et $k2L$

t varie entre t_{k-1} et t_k

avec

$$(k-1)2L = v_0 \tau (1 - e^{-\frac{t_{k-1}}{\tau}})$$

$$k2L = v_0 \tau (1 - e^{-\frac{t_k}{\tau}})$$

$$t_{k-1} = -\tau \ln \left(1 - \frac{(k-1)2L}{v_0 \tau} \right)$$

$$t_k = -\tau \ln \left(1 - \frac{k 2L}{v_0 \tau} \right)$$

La durée cherchée est

$$T_k = t_k - t_{k-1}$$

$$= -\tau \left[\ln \left(1 - \frac{k 2L}{v_0 \tau} \right) - \ln \left(1 - \frac{(k-1) 2L}{v_0 \tau} \right) \right]$$

$$= \tau \ln \frac{1 - \frac{(k-1) 2L}{v_0 \tau}}{1 - \frac{k 2L}{v_0 \tau}}$$

$$T_k = \tau \ln \frac{v_0 \tau - (k-1) 2L}{v_0 \tau - k 2L}$$

A.N.

$$T_1 = \tau \ln \frac{v_0 \tau}{v_0 \tau - 2L}$$

$$= \frac{100}{9} \ln \frac{30 \cdot \frac{100}{9}}{30 \cdot \frac{100}{9} - 1}$$

$$T_1 = 33,4 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$T_{100} = \tau \ln \frac{v_0 \tau - 99 \times 2L}{v_0 \tau - 100 \times 2L}$$

$$= \frac{100}{9} \ln \frac{30 \cdot \frac{100}{9} - 99}{30 \cdot \frac{100}{9} - 100}$$

$$T_{100} = 47,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

13) Pour N zones, la durée totale T de freinage est

$$T = \sum_{k=1}^N T_k$$

$$= \sum_{k=1}^N \tau \ln \frac{v_0 \tau - (k-1) 2L}{v_0 \tau - k 2L}$$

$$= \tau \ln \left(\prod_{k=1}^N \frac{v_0 \tau - (k-1) 2L}{v_0 \tau - k 2L} \right)$$

$$T = \tau \ln \frac{v_0 \tau}{v_0 \tau - N 2L}$$

A.N.

N est tel que $v_0 \tau - N 2L = 0$

donc

$$T \rightarrow \infty$$

(cf freinage par une force type: $-\alpha \vec{v}$)

14) durée du freinage électromagnétique

$$v = v_0 e^{-t/\tau}$$

$$T_{\text{électrom}} = -\tau \ln \frac{v_{\text{final}}}{v_0}$$

A.N. $= -\frac{100}{9} \ln \frac{10}{30}$

$$T_{\text{électrom}} = 12,2 \text{ s}$$

nombre de zones nécessaires

$$v_{\text{final}} = v_0 - N \frac{2L}{\tau}$$

$$N = (v_0 - v_{\text{final}}) \frac{\tau}{2L}$$

A.N. $= (30 - 10) \frac{100/9}{1}$

$$= 222,2$$

$$N \approx 223$$

remarque : le temps pour parcourir les 223 zones est en fait :

$$T = \tau \ln \frac{v_0 \tau}{v_0 \tau - N 2L}$$

$$= \frac{100}{9} \ln \frac{30 \cdot 100/9}{30 \cdot 100/9 - 223}$$

$$= 12,3 \text{ s}$$

Puissance limitée lors de la réflexion sur une surface métallique

1)

$$-e\vec{E} - m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

2) En complexes puisque l'on étudie le régime sinusoidal forcé

$$\begin{aligned} -e\vec{E} - m\frac{d\vec{v}}{dt} &= m\frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= m\gamma\omega\vec{v} \\ \vec{v} &= \frac{-e\vec{E}}{\frac{m}{\tau} + m\gamma\omega} \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \frac{-e\tau}{1 + \gamma\omega\tau} \vec{E}$$

3) Dans un métal, les ions positifs sont liés au réseau cristallin. Ils restent toujours à proximité d'un nœud du réseau. Ce sont des charges "liées".
Leur contribution au courant est négligeable.

4) En ne tenant compte que des électrons

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \rho_{\text{libre}} \vec{v}_{\text{charges libres}} \\ &= n(-e) \vec{v} \end{aligned}$$

$$\vec{J} = \underbrace{\frac{ne^2\tau}{m}}_{\sigma} \vec{E}$$

avec

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

C'est la valeur de la conductivité en régime statique (à fréquence nulle soit à $\omega = 0$)

5)

$$\text{nombre d'électrons} = \frac{\text{masse de métal}}{\text{masse molaire}} \times N_A$$

puisque chaque atome donne un électron libre.

donc par unité de volume

$$n = \frac{M}{M} N_A$$

A.N.
$$= \frac{19,3 \cdot 10^3}{197 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}$$

$$n = 5,9 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

De plus
$$\sigma_0 = \frac{n e^2 \tau_0}{m}$$

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0 m}{n e^2}$$

A.N.
$$= \frac{4,5 \cdot 10^7 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}}{5,9 \cdot 10^{28} \cdot (1,60 \cdot 10^{-19})^2}$$

$$\tau_0 = 2,7 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

5) Calculons :

$$\begin{aligned} \omega \tau_0 &= k_{\text{vide}} c \tau_0 \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} c \tau_0 \\ &= \frac{2\pi}{1050 \cdot 10^{-9}} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2,7 \cdot 10^{-14} \\ &= 49 \end{aligned}$$

$$\omega \tau_0 \gg 1$$

on fera

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \frac{\sigma_0}{1 + j\omega \tau_0} \\ &\approx \frac{\sigma_0}{j\omega \tau_0} \end{aligned}$$

$$\underline{\sigma} = -j \frac{n e^2}{m \omega}$$

7) Dans le conducteur, les équations de Maxwell s'écrivent avec $\rho=0$ et $\underline{j} = \underline{\sigma} \underline{E}$

$$= -j \frac{n e^2}{m \omega} \underline{E}$$

$$\vec{j} = \frac{ne^2}{m(\gamma\omega)} \vec{E}$$

↑
P

$$P\vec{j} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$$

c'est à dire qu'en réalité on aurait trouvé
(en supposant le régime sinusoïdal forcé toujours
atteint) :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$$

| | |
|---------------------|--|
| Maxwell - Gauss : | $\text{div } \vec{E} = 0$ |
| Maxwell - Flux : | $\text{div } \vec{B} = 0$ |
| Maxwell - Faraday : | $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ |
| Maxwell - Ampère : | $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ |

3) M.F. :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}$$

avec M.A. :

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\left(\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\right)$$

avec M.G. :

$$\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

↑
nul

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{ne^2 \mu_0}{m} \vec{E}$$

ou ∇^2

3) On cherche des solutions de la forme

$$\vec{E} = \vec{E}(0) \exp j(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$$

$$\nabla \rightarrow -jk \vec{u}_z$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{ne^2 N_0}{m} \vec{E}$$

$$(-jk\vec{u}_z)^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} (\partial\omega)^2 \vec{E} = \frac{ne^2 N_0}{m} \vec{E}$$

En simplifiant par \vec{E}

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{ne^2 N_0}{m}$$

ou pose

$$\frac{ne^2 N_0}{m} = \frac{\omega_p^2}{c^2}$$

$$= \omega_p^2 \epsilon_0 N_0$$

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m \epsilon_0}$$

donc $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

10) A.N.

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m \epsilon_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{5,9 \cdot 10^{28} (1,60 \cdot 10^{-19})^2}{9,11 \cdot 10^{-31} \times 8,85 \cdot 10^{-12}}}$$

$$\omega_p = 1,37 \cdot 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$= \frac{2\pi \cdot 3,00 \cdot 10^8}{1050 \cdot 10^{-9}}$$

$$\omega = 1,80 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = 0,017$$

11) donc

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

on négligeant ω^2 devant ω_p^2

$$k^2 = -\frac{\omega_p^2}{c^2}$$

$$k = \pm j \frac{\omega_p}{c}$$

Si on choisit le signe plus, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E(0) \exp(j(\omega t - j\frac{\omega_p}{c} z)) \vec{u}_x \\ &= E(0) \exp(\frac{\omega_p}{c} z) \exp(j\omega t) \vec{u}_x\end{aligned}$$

On a posé que le métal occupait le demi-espace $z > 0$
dans ce cas z peut tendre vers l'infini et

$$\begin{aligned}\exp(\frac{\omega_p}{c} z) &\rightarrow \infty \\ \text{si } z &\rightarrow \infty\end{aligned}$$

ce qui n'a pas de sens physique.

On choisit alors :

$$k = -j \frac{\omega_p}{c}$$

$$\vec{E} = E(0) \exp(-\frac{\omega_p}{c} z) \exp(j\omega t) \vec{u}_x$$

Pour trouver \vec{B} :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & E \\ 0 & 0 \\ -\frac{\omega_p}{c} & 0 \end{array}$$

$$\vec{B} = \frac{-\frac{\omega_p}{c} E}{-j\omega} \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = -j \frac{\omega_p}{\omega} \frac{E}{c} \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = -j \frac{\omega_p}{\omega} \frac{E(0)}{c} \exp(-\frac{\omega_p}{c} z) \exp(j\omega t) \vec{u}_y$$

Cette onde amortie ou exponentielle est une

onde évanescente

(on peut d'ailleurs remarquer que \vec{E} et \vec{B} sont en quadrature et donc $\langle \vec{\Pi} \rangle$ - vecteur de Poynting - est nul traduisant le fait que cette onde évanescente ne transporte pas d'énergie)

13) Les champs sont en $\exp(-\frac{\omega_p}{c} z)$

ou en introduisant la distance caractéristique

$$L = \frac{c}{\omega_p}$$

en $\exp\left(-\frac{z}{L}\right)$.

On sait que sur une distance de $5L$, l'amplitude a diminué de plus de 99% par rapport à sa valeur initiale.

$$\text{A.N.} \quad L = \frac{3,00 \cdot 10^8}{1,37 \cdot 10^{16}}$$

$$L = 22 \text{ nm}$$

Pour une épaisseur d'or de $5L$ soit environ $100 \text{ nm} = 0,1 \mu\text{m}$ l'onde se propage quasiment (à moins de 1% près) et le milieu peut donc être considéré comme semi-infini.

13) Ce sont des OPPM dans le vide donc

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

onde incidente:

$$\vec{B}_i = \frac{\frac{\omega}{c} \vec{u}_z \wedge E_0 \exp[j\omega(t - \frac{z}{c})] \vec{u}_x}{\omega}$$

$$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \exp[j\omega(t - \frac{z}{c})] \vec{u}_y$$

onde réfléchi

$$\vec{B}_r = -\frac{\omega}{c} \vec{u}_z \wedge r E_0 \exp[j\omega(t + \frac{z}{c})] \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_r = -r \frac{E_0}{c} \exp[j\omega(t + \frac{z}{c})] \vec{u}_y$$

remarque: l'onde dans le conducteur est donc:

$$\begin{cases} \vec{E} = E(0) \exp(-\frac{\omega_p}{c} z) \exp(j\omega t) \vec{u}_x \\ \vec{B} = -j \frac{\omega_p}{\omega} \frac{E(0)}{c} \exp(-\frac{\omega_p}{c} z) \exp(j\omega t) \vec{u}_y \end{cases}$$

14) La description étant volumique, il n'y a pas de courant et de charge surfacique. Les champs sont continus à l'interface en $z=0$

$$\vec{E}(z=0^-) = \vec{E}(z=0^+)$$

$$\vec{E}_i(0,t) + \vec{E}_r(0,t) = \vec{E}(0,t)$$

$$\vec{B}(z=0^-) = \vec{B}(z=0^+)$$

$$\vec{B}_i(0,t) + \vec{B}_r(0,t) = \vec{B}(0,t)$$

15) Ces deux équations s'écrivent, après simplification:

$$E_0 + r E_0 = E(0)$$

$$E_0 - r E_0 = -j \frac{\omega}{\omega_p} E(0)$$

en faisant le rapport:

$$\frac{1+r}{1-r} = j \frac{\omega}{\omega_p}$$

$$r = - \frac{1 - j \frac{\omega}{\omega_p}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_p}}$$

Le module de r est:

$$|r| = 1$$

donc l'onde réfléchie a la même amplitude que l'onde incidente

remarque

$$r = - \frac{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_p})^2} \exp -j\varphi}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_p})^2} \exp +j\varphi}$$

avec $\varphi = \arctan(\frac{\omega}{\omega_p})$

$$r = - \exp[-2j \arctan(\frac{\omega}{\omega_p})]$$

Si $\omega \ll \omega_p$, r tend vers -1 comme pour la réflexion sur un métal parfait.

16) donc

$$E(0) = (1+r) E_0$$

$$= \frac{2j \frac{\omega}{\omega_p}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_p}} E_0$$

de module :

$$E(\omega) = \frac{2 \frac{\omega}{\omega_p}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}} E_0$$

on a vu précédemment que :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 \ll 1$$

donc :

$$E(\omega) = 2 \frac{\omega}{\omega_p} E_0$$

17) A la question 2) on a obtenu :

$$\vec{x} = \frac{-e\vec{\zeta}/m}{1 + \omega\zeta} \vec{E}$$

avec $\omega\zeta \gg 1$ (question 6)

$$= \frac{-e\vec{\zeta}/m}{\omega\zeta} \vec{E}$$

soit pour les amplitudes :

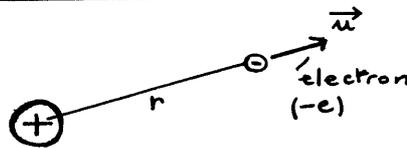
$$x_0 = \frac{e}{m\omega} \frac{2\omega}{\omega_p} E_0$$

$$= \frac{2e}{m\omega_p} E_0$$

avec $\omega_p = \sqrt{\frac{n}{m\epsilon_0}} e$

$$x_0 = 2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{m n}} E_0$$

18)



noyau

L'énergie potentielle : $q = Ze$

$$\vec{F}_{\text{noyau} \rightarrow \text{électron}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{\text{noyau} \rightarrow \text{électron}}$$

$$= \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

E_p

$$= -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

L'énergie mécanique :

$$E_m = E_p + E_c$$

On imagine dans notre modèle un électron en orbite circulaire.

On sait alors que $E_c = -\frac{E_p}{2}$ d'où

$$E_m = \frac{E_p}{2}$$

$$E_m = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

remarque:

| | |
|-----------|--|
| Démontrer | $E_c = -\frac{E_p}{2}$ |
| P.F.D. | $-\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{mv^2}{r}$ |
| | $\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = mv^2$ |
| | $-E_p = 2E_c$ |

L'énergie d'ionisation :

C'est l'énergie à fournir pour que l'électron se retrouve à l'infini (avec une E_c nulle)

$$E_{\text{ionisation}} = \underbrace{E_{\text{infini}}}_{\text{nulle}} - E_m$$

$$E_i = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

A.N.

$$E_i/J = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$E_i/eV = \frac{Ze}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$= \frac{79 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{8\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 140 \cdot 10^{-12}}$$

$$E_i = 406 \text{ eV}$$

L'écart avec la valeur expérimentale (3 eV) est en lien avec l'effet d'écran. Les autres électrons "cachent" en fait la charge du noyau et l'électron ne voit qu'une charge "effective" bien plus petite que 79 e

19) Pour créer une ionisation, il faut une vitesse minimale telle que

$$\frac{1}{2} m v^2 = E_i$$

$$v = \sqrt{\frac{2 E_i}{m}}$$

$$\text{A.N.} = \sqrt{\frac{2 \times 9 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}}}$$

$$v = 1,8 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$$

20) En utilisant 17)

$$E_0 = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{m m}{\epsilon_0}}$$

$$\text{A.N.} = \frac{1,8 \cdot 10^6}{2} \sqrt{\frac{9,11 \cdot 10^{-31} \times 9 \cdot 10^9}{8,85 \cdot 10^{-12}}}$$

$$E_0 = 6,9 \cdot 10^{10} \text{ V.m}^{-1}$$

21)

$$\langle P \rangle = \iint \langle \vec{\pi} \rangle dS$$

$$= \langle \pi \rangle S$$

$$\text{avec}$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0^2}{\mu_0 c} \vec{E}^2 \vec{u}_z$$

$$\langle P \rangle = \frac{\epsilon_0^2}{2 \mu_0 c} S$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 S$$

$$\text{A.N.} = \frac{1}{2} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \cdot (6,9 \cdot 10^{10})^2 \cdot 260 \cdot 10^{-4}$$

$$\langle P \rangle = 1,7 \cdot 10^{17} \text{ W}$$

22) La valeur expérimentale est

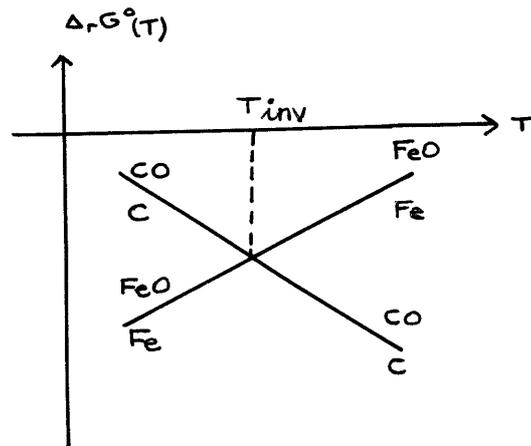
$$P_{\text{exp}} = \frac{0,5 \times 260}{10^{-12}}$$

$$P_{\text{exp}} = 1,3 \cdot 10^{14} \text{ W}$$

Bien plus faible. Le modèle ne convient pas.

Préparation du titane

- 1) "On sait" que le domaine au dessus de la droite est celui de l'oxyde et que le domaine en dessous est celui du réducteur.
Donc ici :



- pour $T < T_{inv}$, il y a un domaine commun C-FeO, la réaction $C - FeO$ n'est pas favorisée
- pour $T > T_{inv}$, pas de domaine commun C-FeO d'après le diagramme donc le carbone réduit l'oxyde de fer.

D'après le graphe, la température d'inversion $T_{inv} \approx 980K$
Pour préciser cette valeur, on résout :

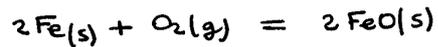
$$\begin{aligned} \Delta_r G^\circ_{(FeO/Fe)} &> \Delta_r G^\circ_{(CO/C)} \\ -519 + 0,125T &> -221 - 0,179T \\ T &> \frac{519 - 221}{0,125 + 0,179} \\ T &> 980,3 \text{ K} \end{aligned}$$

Réponse:

$$T > T_{inv} = 980K$$

remarque complémentaire :

Dont-on justifier les domaines affirmés au départ ?

couple FeO/Fe

$$\begin{aligned} A &= -\Delta_r G \\ &= -(\Delta_r G^\circ(T) + RT \ln \frac{1}{P_{\text{O}_2}/P^\circ}) \\ &= -\Delta_r G^\circ(T) + RT \ln P_{\text{O}_2}/P^\circ \end{aligned}$$

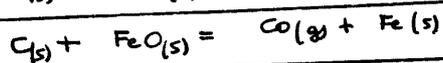
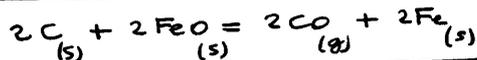
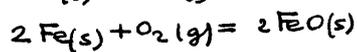
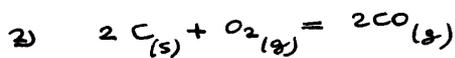
L'ordonnée est en réalité $y = RT \ln P_{\text{O}_2}/P^\circ$

- sur la droite: $RT \ln P_{\text{O}_2}/P^\circ = \Delta_r G^\circ(T)$ donc $A=0$
- au dessus $RT \ln P_{\text{O}_2}/P^\circ > \Delta_r G^\circ(T)$ donc $A > 0$
la réaction est totale vers la droite.
(domaine d'existence de FeO(s))
- en dessous $RT \ln P_{\text{O}_2}/P^\circ < \Delta_r G^\circ(T)$ donc $A < 0$
la réaction est totale vers la gauche
(domaine d'existence de Fe(s))

couple CO/C

$$\begin{aligned} A &= -\Delta_r G \\ &= -(\Delta_r G^\circ(T) + RT \ln \frac{(P_{\text{CO}}/P^\circ)^2}{P_{\text{O}_2}/P^\circ}) \\ &= -\Delta_r G^\circ(T) + RT \ln \frac{P_{\text{O}_2}/P^\circ}{P_{\text{CO}}^2/P^\circ} \end{aligned}$$

- sur la droite: $P_{\text{CO}} = P^\circ$, $RT \ln P_{\text{O}_2}/P^\circ = \Delta_r G^\circ(T)$ et $A=0$
- au dessus: $P_{\text{CO}} > P^\circ$, $RT \ln P_{\text{O}_2}/P^\circ > \Delta_r G^\circ(T)$ et $A < 0$
la réaction est davantage déplacée vers CO
- en dessous: $P_{\text{CO}} < P^\circ$, $RT \ln P_{\text{O}_2}/P^\circ < \Delta_r G^\circ(T)$ et $A > 0$
la réaction est davantage déplacée vers C



cette réduction de FeO(s) est donc envisageable à 1300K ($> T_{\text{inv}}$)

le carbone restant se retrouve dissous dans le Fer (fonte)

3) D'après le graphe, la réduction de TiO_2 est favorisée au dessus de 1980K

D'après le graphe, la réduction de SiO_2 est favorisée au dessus de 1893K

Donc à 1300K, on peut estimer que TiO_2 et SiO_2 ne sont pas réduits.

remarque : calcul plus précis des températures d'inversion

→ pour le titane :

vers 1980K, Ti est liquide ($T_f = 1933K$)

On résout

$$\Delta_r G^\circ_{TiO_2(s)/Ti(l)} = \Delta_r G^\circ_{CO(g)/C(s)}$$

$$-961 + 0,194T = -221 - 0,173T$$

$$T_{inv} = 1984K$$

→ pour le silicium

En supposant Si liquide vers 1880K

(le graphe de départ indique un changement d'état vers 1680K)

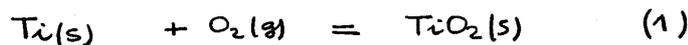
On résout :

$$\Delta_r G^\circ_{SiO_2(s)/Si(l)} = \Delta_r G^\circ_{CO(g)/C(s)}$$

$$-961 + 0,212T = -221 - 0,173T$$

$$T_{inv} = 1893K$$

4)



$$\Delta_r G = \Delta_r G^\circ(T) + RT \ln \frac{1}{(P_{O_2}/P^\circ)}$$

$$\Delta_r G = -945 + 0,185T - RT \ln P_{O_2}/P^\circ$$

$$A.N. = -945 + 0,185 \times 1300 - 8,31 \cdot 10^{-3} \times 1300 \times \ln \frac{0,2}{1}$$

car $P_{O_2} \approx 0,2$ bar si on considère que l'air contient 1/5e d'oxygène

$$\Delta_r G_1 = -687 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

L'affinité de la réaction $A = -\Delta_r G$ est donc très nettement positive ce qui signifie que $TiO_2(s)$ est donc très stable à 1300K puisque sa formation est favorisée.

remarque

On pourrait estimer la pression de corrosion à 1300K en résolvant $A = 0$

On obtient

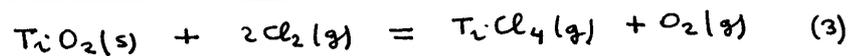
$$\ln \frac{P_{O_2, eq}}{P^0} = \frac{-945 + 0,185 T}{R T}$$

\swarrow 1300
 \nearrow 8,31 10^{-3} \nwarrow 1300

$$P_{O_2, eq} = 4,8 \cdot 10^{-29} \text{ bar} \ll 0,2 \text{ bar}$$

donc Ti est oxydé sous 0,2 bar à 1300K

5)



avec

→

$$\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(O_2(g)) + \Delta_f H^0(TiCl_4(g)) - \Delta_f H^0(TiO_2(s)) - 2 \Delta_f H^0(Cl_2(g))$$

sachant que :

$$\Delta_f H^0(TiCl_4(g)) = \Delta_f H^0(TiCl_4(lig)) + \Delta_{vap} H^0(TiCl_4(lig))$$

$$\Delta_r H^0 = 0 + (-804 + 35,1) - (-945) - 2 \times 0$$

$$\Delta_r H^0 = 176,1 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

→

$$\Delta_r S^0 = S^0(O_2(g)) + S^0(TiCl_4(g)) - S^0(TiO_2(s)) - 2 S^0(Cl_2(g))$$

sachant que

$$S^0(TiCl_4(g)) = S^0(TiCl_4(lig)) + \frac{\Delta_{vap} H^0(TiCl_4(lig))}{T_b(TiCl_4(lig))}$$

$$\Delta_r S^0 = 205 + \left(252,3 + \frac{35,1 \cdot 10^3}{409} \right) - 50,6 - 2 \times 223$$

$$\Delta_r S^0 = 46,5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\rightarrow \Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$$

A.N. à 1100K

$$\Delta_r G^\circ = 176,1 - 1100 \cdot 46,5 \cdot 10^{-3}$$

/kJ.mol⁻¹

$$\Delta_r G_3^\circ = 125 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

(1100K)

E)

$$\Delta_r G = \Delta_r G^\circ(T) + RT \ln \frac{P_{O_2} P_{TiCl_4}}{P^\circ \left(\frac{P_{Cl_2}}{P^\circ}\right)^2}$$

$$\Delta_r G = \Delta_r G^\circ(T) + RT \ln \frac{P_{O_2} P_{TiCl_4}}{P_{Cl_2}^2}$$

A.N.

$$\Delta_r G = 125 + 8,31 \cdot 10^{-3} \times 1100 \ln \frac{0,2 \cdot 0,2}{0,4^2}$$

/kJ.mol⁻¹

$$\Delta_r G_3 = 112 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

$$A = -\Delta_r G < 0$$

Dans les conditions indiquées, cette réaction n'a pas lieu puisque $A < 0$.

La chloration de TiO_2 n'est pas possible directement.

F)



$$\Delta_r G = \Delta_r G^\circ(T) + RT \ln \frac{\left(\frac{P_{CO}}{P^\circ}\right)^2}{\left(\frac{P_{O_2}}{P^\circ}\right)}$$

$$\Delta_r G = -221 - 0,179T + RT \ln \frac{P_{CO}^2}{P_{O_2} P^\circ}$$

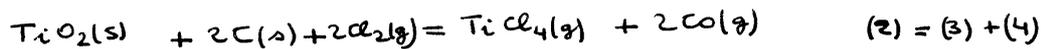
/kJ.mol⁻¹

A.N.

$$\Delta_r G = -221 - 0,179 \times 1100 + 8,31 \cdot 10^{-3} \times 1100 \ln \frac{(0,4)^2}{0,2}$$

$$\Delta_r G_4 = -420 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

8) On couple (3) dont l'affinité est négative (réaction qu'on souhaite réaliser) avec (4) dont l'affinité est très positive.



Au lieu d'une chloration, on envisage une carbochloration

$$\begin{aligned} A_2 &= -\Delta_r G_2 \\ &= -(\Delta_r G_3 + \Delta_r G_4) \end{aligned}$$

$$A_2 = A_3 + A_4$$

A.N.

$$= -112 + 420$$

$$A_2 = 308 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Cette carbochloration permet donc de fabriquer TiCl_4 (affinité $A_2 > 0$)

9) → En utilisant la loi de modération de Van't Hoff :

Si on augmente la température, l'équilibre chimique se déplace (ou on a rupture d'équilibre) dans le sens endothermique.

On doit déterminer

$$\begin{aligned} \Delta_r H_2^\circ &= \Delta_r H_3^\circ + \Delta_r H_4^\circ \\ &= 176 - 221 \end{aligned}$$

$$\Delta_r H_2^\circ = -45 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

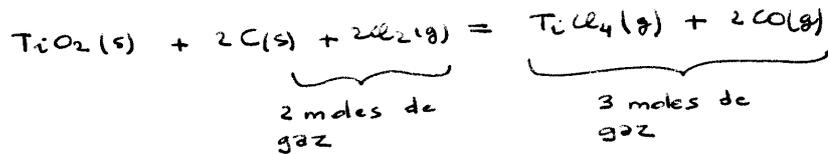
(réaction exothermique)

si on $\uparrow T$ déplacement vers la gauche
(défavorable)

→ En utilisant la loi de modération de Le Chatelier :

Si on augmente la pression, l'équilibre chimique se déplace (ou on a rupture d'équilibre) dans le sens d'une diminution

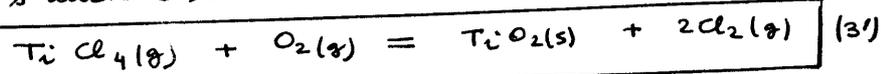
du nombre de moles de gaz :



si on ↑ P déplacement vers la gauche
(défavorable)

10) Le carbone permet de transformer une chloration impossible en carbochloration favorisée.

11) Si du dioxygène était présent dans le réacteur (cf questions 5) et 6) à propos de la réaction (3) on pourrait s'attendre à la réaction :



et l'on reviendrait à $\text{TiO}_2(\text{s})$.

Vérifions en calculant $\Delta_r G^\circ$ à 1150 K

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$$

$$\Delta_r G^\circ = -176,1 + 1150 \cdot 46,5 \cdot 10^{-3} \text{ /kJ.mol}^{-1}$$

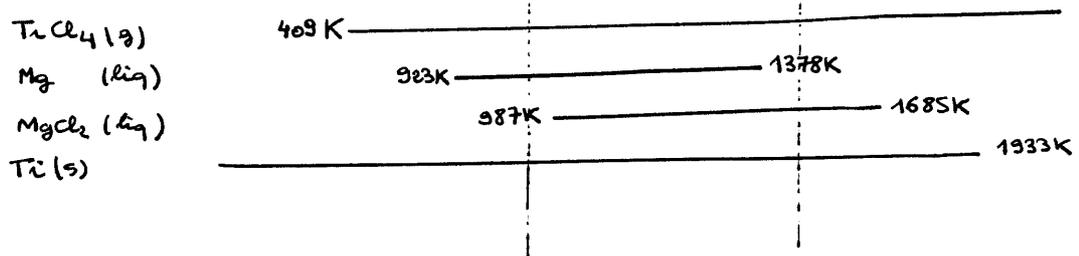
$$= -122,6 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

L'affinité standard de la réaction :

$$A^\circ = 122,6 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

est donc nettement positive.

12) Températures



a priori, cette réaction est étudiée pour

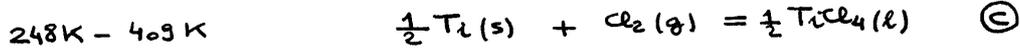
$$987\text{K} < T < 1378\text{K}$$

mais puisque il ne faut pas dépasser 1200K

$$987\text{K} < T < 1200\text{K}$$

Le choix réalisé est 1150K en accord avec cette inégalité.
Température choisie près de la borne supérieure peut être pour favoriser la cinétique(?)

12) Dans la zone 248-1900K, Ti est toujours solide, TiCl₄ est liquide de 248K à 409K et gazeux au dessus de 409K.



$$\bullet \Delta_r H^\circ = \frac{1}{2}(-804) - \frac{1}{2} \times 0 - 0$$

$$\Delta_r H^\circ = -402 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\bullet \Delta_r S^\circ = \frac{1}{2}252,3 - \frac{1}{2}30,5 - 223$$

$$\Delta_r S^\circ = -0,112 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\Delta_r G^\circ = -402 + 0,112 T$$

$\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

409K - 1900K → Ecrivons la vaporisation de TiCl₄

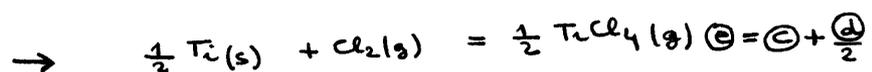


$$\bullet \Delta_r H^\circ = \Delta H_{\text{vap}}^\circ = 35,1 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\bullet \Delta_r S^\circ = \frac{\Delta H_{\text{vap}}^\circ}{T_e} = \frac{35,1}{409} = 0,086 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\Delta_r G^\circ = 35,1 - 0,086 T$$

$\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

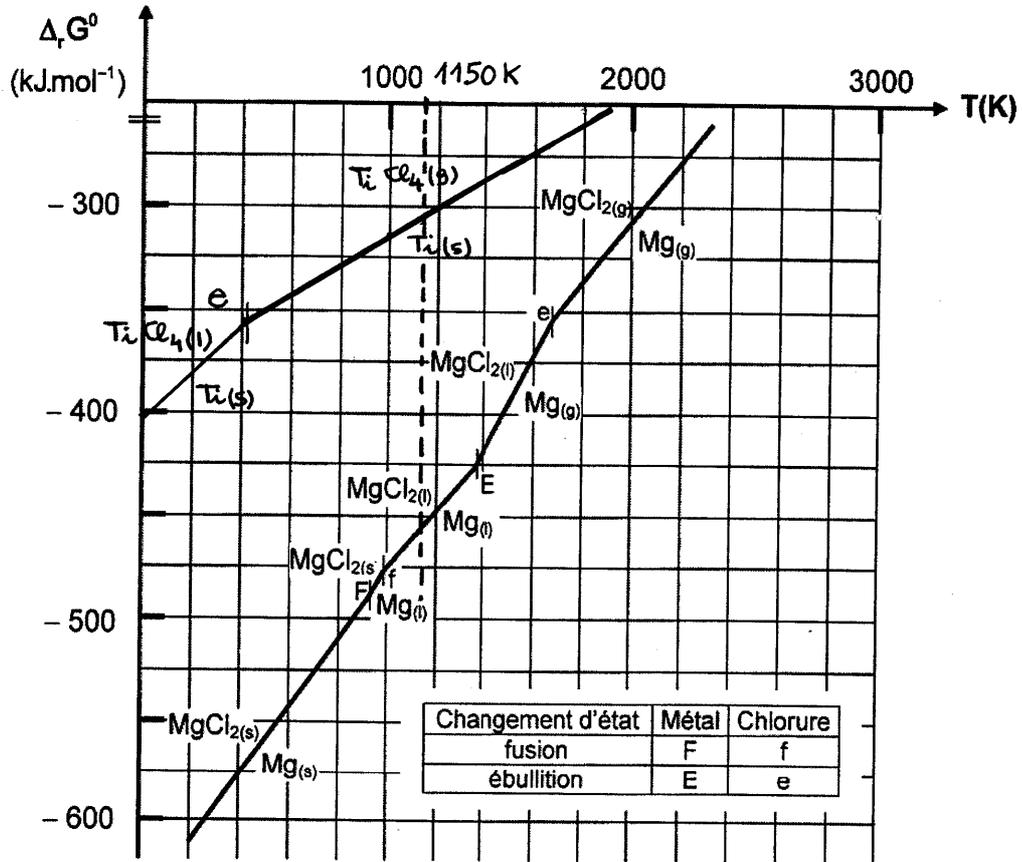


$$\Delta_r G^\circ_{\textcircled{c}} = \Delta_r G^\circ_{\textcircled{c}} + \frac{\Delta_r G^\circ_{\textcircled{d}}}{2}$$

$$\Delta_r G^\circ = -384 + 0,069 T$$

$\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

14)



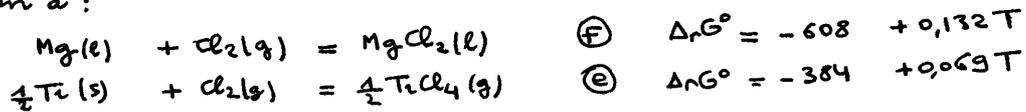
15) A 1150K, les domaines de $TiCl_4(g)$ et $Mg(l)$ sont disjointes sur le graphe.
 La réaction est donc favorisée. (on remarquera que $TiCl_4$ étant gazeux, il y a équilibre a priori)

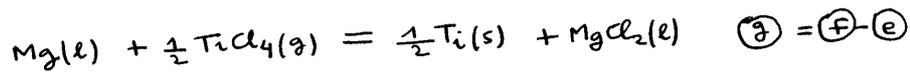
remarque

L'ordonnée du graphe est en fait :

$$y = RT \ln \frac{P_{Cl_2}}{P^0}$$

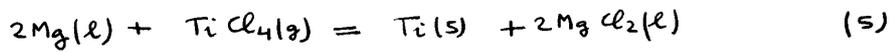
16) On a :





$$\Delta_r G^\circ = -224 + 0,063 T$$

Finalement pour (5) = 2 x (g)



$$\Delta_r G_S^\circ = -447 + 0,126 T$$

/K.mol⁻¹

$$\Delta_r G_S^\circ = -309 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

(1150 K)

Enthalpie libre de réaction :

$$\begin{aligned} \Delta_r G &= \Delta_r G^\circ + RT \ln \frac{1}{\left(\frac{P_{\text{TiCl}_4}}{P^\circ}\right)} \\ &= -309 + 8,31 \cdot 10^{-3} \times 1150 \ln \frac{1}{0,1} \end{aligned}$$

$$\Delta_r G = -287 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

L'affinité A vaut 287 kJ.mol⁻¹. Elle ne change pas quand la réaction a lieu (dans la mesure où P_{TiCl_4} est maintenue à 0,1 bar). Dans ces conditions, la réaction est donc totale. Elle se termine avec la disparition de Mg(l).

17) → Ti est solide et MgCl₂ est liquide.

Il suffit donc de laisser s'écouler MgCl₂ pour récupérer Ti(s)

(le texte indique qu'il restera du MgCl₂(liq) dans les pores de l'éponge de titane)

→ Il faut refabriquer Mg en partant de MgCl₂ pour recycler le magnésium