DNS

Sujet

Secousses en mécanique

Ce sujet fait intervenir la notion, peu courante en mécanique newtonienne, de secousse: on nomme ainsi une quantité $\vec{\alpha}$ égale à la dérivée temporelle d'une accélération $\vec{a}$: $\vec{\alpha}=\frac{d\vec{a}}{dt}$.

Sur le guéridon de la *figure* 1 , recouvert d'une nappe sans ourlet, on place une assiette remplie. D'un geste brusque, on tire la nappe. La question est de savoir si l'assiette reste en place sur le guéridon. La masse de l'assiette est $M=400\,g$, celle de la nappe est $m=50\,g$. Le guéridon est modélisé par un disque de centre O et de rayon $R=25\,cm$. Il est recouvert d'une nappe de même dimension et d'épaisseur négligeable. L'assiette circulaire, de rayon $r=5\,cm$ est placée au centre de la nappe. On admet que le support de la force $\vec{F}$ développée par l'expérimentateur pendant qu'il tire sur la nappe passe par O et que cette force s'écrit, en fonction du temps t , $\vec{F}=m\,\alpha\,t\,\vec{u}_x$, où $\vec{u}_x$ est un vecteur unitaire constant et α une constante. On désigne par $\vec{u}_z$ un vecteur unitaire vertical, vers le haut. Le frottement entre la nappe et le guéridon est négligeable. Le coefficient de frottement de glissement entre la nappe et l'assiette est noté f ($f=0{,}2$). Le référentiel $\mathcal{R}$ lié au guéridon (repère d'espace $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ est supposé galiléen. On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur ($g=9{,}81\,m/s^2$).

On rappelle les lois de Coulomb du frottement solide avec R_T : composante scalaire tangentielle (ou force de frottement) et R_N : composante scalaire normale de la réaction

En cas de non glissement, la réaction se trouve dans le cône de frottement. On a l'égalité: $\vec{v}_{glissement}=\vec{0}$ et l'inégalité (à vérifier): $\left|\frac{R_T}{R_N}\right|\leqslant f$. En cas de glissement la réaction se trouve sur le cône de frottement. On a l'égalité: $\left|\frac{R_T}{R_N}\right|=f$ et l'inégalité traduisant que la réaction est opposée à la vitesse de glissement s'écrit $\vec{R}.\vec{v}_{glissement}\leqslant 0$ soit $R_T.v_{glissement}\leqslant 0$

.

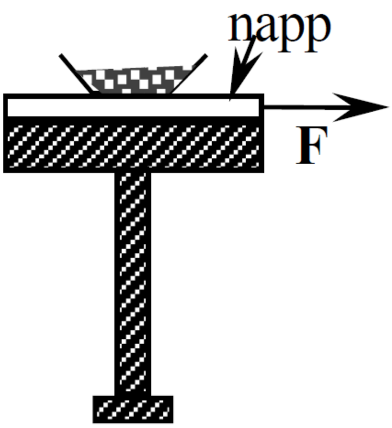


Fig. 1 : assiette, guéridon et nappe

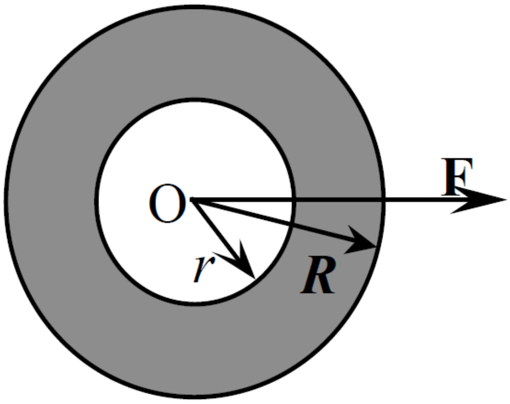


Fig. 2 : nappe et assiette vues de haut

1. Montrer que α a bien les dimensions d'une secousse.

I. Première modélisation

On suppose que tout le long de l'expérience, l'assiette glisse sur la nappe.

(Les lois sont établies en supposant un contact total entre nappe et assiette mais pour simplifier on les supposera toujours valables même en cas de contact partiel entre nappe et assiette).

2. Définir la vitesse de glissement de l'assiette par rapport à la nappe. Que peut-on prévoir quant au signe de cette vitesse de glissement en projection sur $\vec{u}_x$ au début du mouvement de l'assiette ? Justifier.

3. Montrer que l'accélération de l'assiette est constante dans $\mathcal{R}$ et déterminer l'équation horaire du mouvement de son centre C_a , $x_a = f(t)$.

4. Déterminer l'équation horaire de mouvement du centre C_n de la nappe, $x_n = h(t)$.

5. On observe qu'il faut un temps $\tau = 0{,}1\,s$ pour qu'il n'y ait plus du tout de nappe sous l'assiette. Calculer la valeur de α et déterminer le déplacement total de l'assiette et de la nappe. Que vaut la force maximale que l'expérimentateur doit pouvoir exercer sur la nappe ?

6. Les hypothèses commises dans cette partie concernant le glissement sont-elles vérifiées ? Justifier.

II. Une modélisation plus réaliste.

En réalité, la dynamique de l'assiette comprend deux phases. Une phase de non glissement puis une phase de glissement.

A. Phase de non glissement

7. Étudier la phase de non glissement

8. Déterminer sa durée t_1 en fonction de m, M, f, g, α .

9. Préciser la position x_a de C_a et sa vitesse à l'issue de cette phase.

B. Phase de glissement

10. Déterminer x_a et x_n pour $t > t_1$ sous la forme de polynômes de la variable $(t - t_1)$.

11. On suppose que c'est la deuxième phase qui dure un temps $\tau = 0{,}1\,s$ et alors il n'y a plus du tout de nappe sous l'assiette. Calculer la valeur de α et celle de t_1 .

12. Commenter le résultat obtenu et l'approximation lors de la première modélisation.

Tunnel terrestre

Le problème envisage le déplacement d'un train dans un tunnel creusé dans la sphère terrestre. Dans tout le problème, la Terre est assimilée à un corps sphérique homogène de rayon R_T , de centre O_T et de masse volumique homogène ρ_T . On néglige tous les effets de la rotation de la terre sur elle-même et on se place dans le référentiel géocentrique que l'on supposera galiléen. Pour les applications numériques on prendra $\rho_T=5{,}5\cdot 10^3\,kg.m^{-3}$, $r_T=6{,}4\cdot 10^6\,m$. On rappelle la valeur de la constante universelle de gravitation de Newton $G=6{,}7\cdot 10^{-11}m^3.kg^{-1}.s^{-2}$.

I. Étude préliminaire

On considère un point P situé à l'intérieur de la sphère terrestre. On note $\overrightarrow{O_T P}=\vec{r}=r\,\vec{u}_r$.

1. Justifier que le champ gravitationnel créé par la terre en P noté $\vec{g}(P)$ est porté $\vec{u}_r$ et que son module ne dépend que de r , on notera donc $\vec{g}(P)=g(r)\vec{u}_r$.
2. Retrouver le théorème de Gauss gravitationnel.
3. Déterminer l'expression de $g(r)$ en P .
4. En déduire que la force de gravitation s'exerçant sur un point de masse m situé en P dérive de l'énergie potentielle $Ep(r)=Ep_0+\frac{1}{2}m\,\omega^2 r^2$ où Ep_0 est une constante qui dépend de la référence choisie et que l'on ne demande pas d'expliciter. Donner l'expression de ω^2 en fonction des données. Quelle est la dimension de ω ?

II. Le tunnel droit

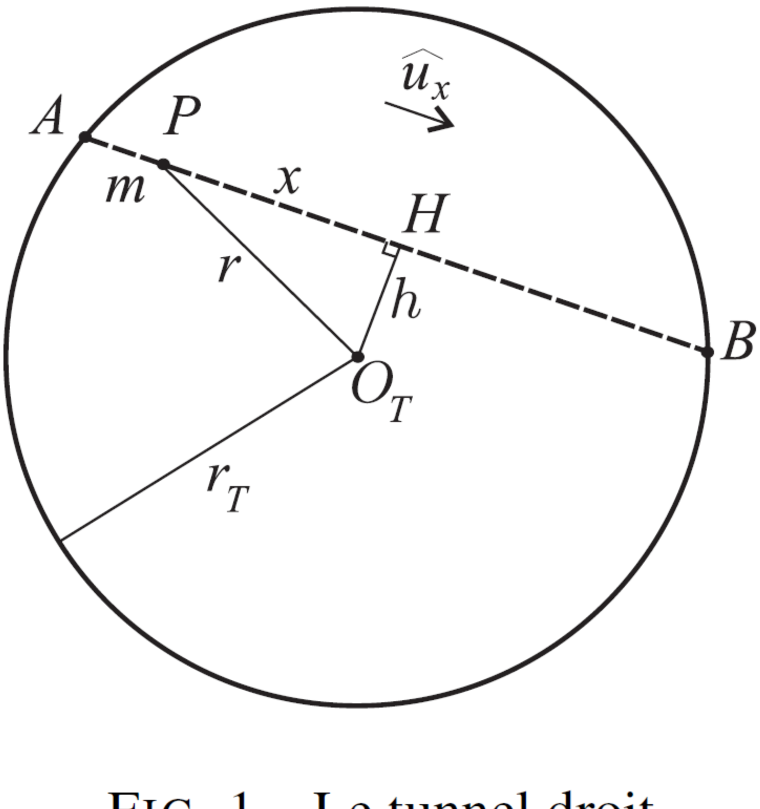


FIG. 1 – Le tunnel droit

On relie deux points A et B de l'équateur terrestre par un tunnel cylindrique traversant la Terre selon le schéma de la *figure* 1 qui présente également les notations utilisées. On considère un mobile ponctuel P de masse m se déplaçant dans le tunnel sous l'effet du champ gravitationnel terrestre. La position du mobile est repérée sur le segment $[AB]$ par la coordonnée x telle que $\overrightarrow{HP}=x\vec{u}_x$ où le vecteur unitaire $\vec{u}_x$ est colinéaire $\overrightarrow{AB}$ et de même sens et H est la projection orthogonale de O_T sur $[AB]$. On note finalement $h=O_T H$.

Le point P reste en permanence dans l'axe du tunnel grâce à un système de confinement créant des forces mais sans frottement. A l'instant $t=0$, on abandonne le mobile au point A sans vitesse initiale.

5. Déterminer l'équation différentielle (linéaire) du second ordre vérifiée par $x(t)$ en appliquant le principe fondamental.
6. Retrouver l'équation différentielle par une méthode énergétique.
7. Déduire l'expression de $x(t)$ en fonction de h, r_T, ω et t .
8. Quelle est la valeur de la vitesse maximale atteinte par le point P sur le trajet. En quel point cette vitesse est-elle atteinte ?
9. Exprimer la durée τ_0 du trajet entre A et B et calculer sa valeur numérique.

III. Projet de métro

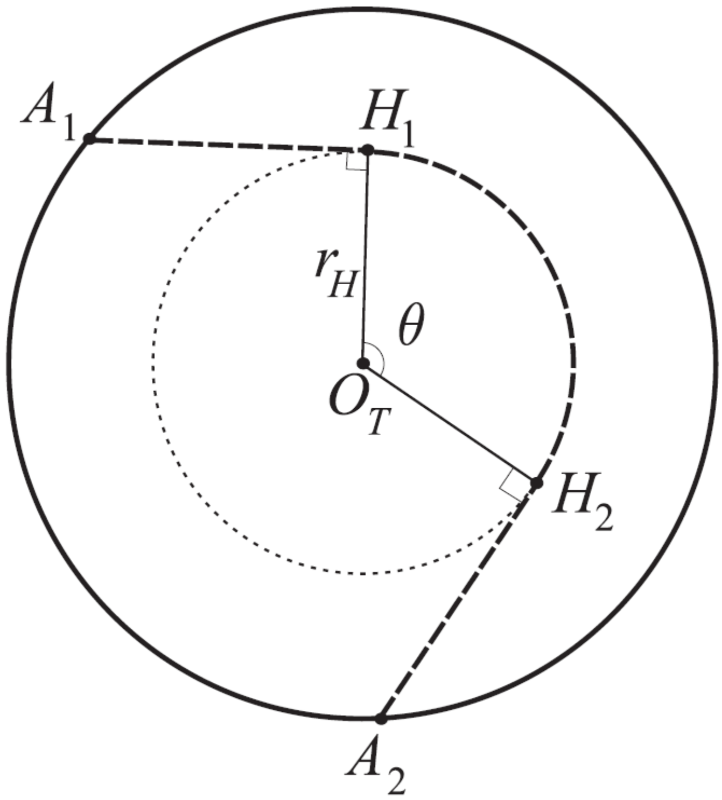


FIG. 2 – Le système de tunnels

Pour desservir plusieurs points sur l'équateur, on considère un système de tunnels représentés sur la *figure* 2 . Un tunnel circulaire est percé à une distance r_H du centre de la Terre dans le plan de l'équateur et l'on creuse des tunnels rectilignes de descente ou de remontée $A_1 H_1$ $A_2 H_2$, etc... Ces tunnels se raccordent au tunnel circulaire interne en des points H_1 , H_2 ,... Chaque jonction est tangentielle, c'est-`a-dire que $\overrightarrow{A_1 H_1}.\overrightarrow{O_T H_1}=0$, $\overrightarrow{A_2 H_2}.\overrightarrow{O_T H_2}=0$,... Les points H_1 , H_2 ,... sont équipés d'un système d'aiguillage assurant la continuité du vecteur vitesse de la rame de transport des voyageurs lors du transfert entre le tunnel de descente ou de remontée et le tunnel circulaire.

On assimile cette rame à un point matériel P de masse m astreint à circuler dans l'axe du tunnel et sans contact avec ses parois grâce au système de confinement. À l'instant $t=0$, on laisse tomber une rame du point A_1 et sans vitesse initiale.

10. Quelle est la nature du mouvement de la rame sur le trajet circulaire interne $H_1 H_2$. Déterminer la vitesse de la rame sur cette portion, en déduire que la durée τ_1 du transfert de H_1 vers H_2 se met sous la forme : $\tau_1=\frac{\theta}{\omega} f(y)$ où $y=\frac{r_T}{r_H}$ et f est une fonction que l'on déterminera.

11. Déterminer la durée totale τ du voyage de A_1 vers A_2 en fonction de θ , ω et y . Déterminer la valeur numérique de τ pour un voyage tel que $\theta=\pi/3$ avec $r_H=r_T/2$. Comparer les caractéristiques de ce voyage avec son équivalent à la surface de la terre.

Réponses

Secousses en mécanique

1) $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{a}}{dt}$

$$\boxed{[\alpha] = [\text{accélération}]\ T^{-1}}$$

Ici

$\vec{F} = m\,\alpha\,t\ \vec{u_x}$

$[\alpha] = \underbrace{\dfrac{[\text{Force}]}{M}}_{[\text{accélération}]}\ T^{-1}$

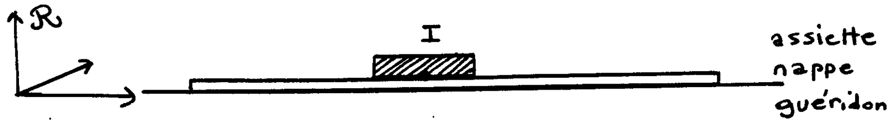
α a bien les dimensions d'une secousse.

---

2) $\vec{v}_{\text{glissement } a/n} = \vec{v}_{I \in \text{assiette}/\mathcal{R}} - \vec{v}_{I \in \text{nappe}/\mathcal{R}}$

ou puisque ici, il s'agit de translation

$$\boxed{\vec{v}_{\text{glissement } a/n} = \vec{v}_{\text{assiette}/\mathcal{R}} - \vec{v}_{\text{nappe}/\mathcal{R}}}$$



Ici, dans ce problème, la secousse est une grandeur discontinue (en $t=0$) et l'accélération (et donc la vitesse) est une grandeur continue.
A l'instant $t=0$, rien ne bougeait. Donc en $t=0^+$, par continuité des vitesses, $\vec{v}_{\text{assiette}} = \vec{0}$ et $\vec{v}_{\text{nappe}} = \vec{0}$

$$\boxed{\text{En } t=0^+ \quad \vec{v}_{\text{glissement}} = \vec{0}}$$

mais le glissement s'établit peut-être progressivement à moins qu'il n'y ait une phase de non glissement.
On ne sait pas.

Si on suppose glissement avec :

$\vec{v}_{\text{glissement}} = \underbrace{(\dot{x}_a - \dot{x}_n)}_{v\ \text{glissement}}\ \vec{u_x}$

on peut prévoir en t que l'assiette a moins avancé que la nappe puisque l'on tire sur la nappe et que c'est la nappe qui finit par entraîner l'assiette. Soit

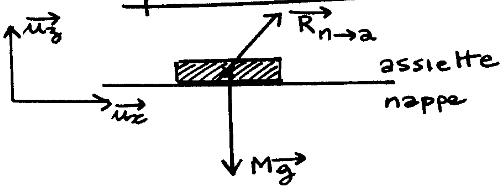
$$\dot{x}_a < \dot{x}_n$$

$$\boxed{\text{Si glissement } \ v_{\text{glissement}} = \dot{x}_a - \dot{x}_n < 0}$$

3) Les différents théorèmes de la résultante cinétique :

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \text{masse} \times \overrightarrow{\text{accélération}_G}$$

– pour l'assiette dans $\mathcal{R}$

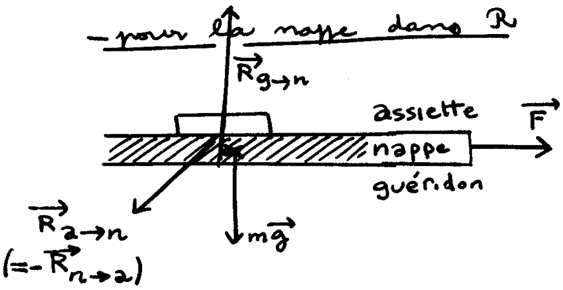


$$M\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R_{n\to a}} = M\ddot{x}_a\overrightarrow{u_x}$$

$$/x \quad \boxed{R_x = M\ddot{x}_a}$$

$$/z \quad \boxed{-Mg + R_z = 0}$$

– pour la nappe dans $\mathcal{R}$

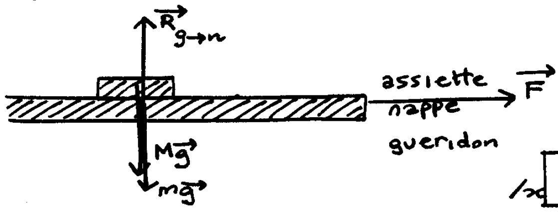


$$m\overrightarrow{g} + \underbrace{\overrightarrow{R_{a\to n}}}_{-\overrightarrow{R_{n\to a}}} + \overrightarrow{R_{g\to n}} + \underbrace{\overrightarrow{F}}_{m\alpha t\,\overrightarrow{u_x}} = m\ddot{x}_n\overrightarrow{u_x}$$

$$/x \quad \boxed{-R_x + m\alpha t = m\ddot{x}_n}$$

$$/z \quad \boxed{-mg - R_z + R_{gn} = 0}$$

– pour le système nappe + assiette dans $\mathcal{R}$



$$m\overrightarrow{g} + M\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R_{g\to n}} + \overrightarrow{F} = (M\ddot{x}_a + m\ddot{x}_n)\overrightarrow{u_x}$$

$$/x \quad \boxed{m\alpha t = M\ddot{x}_a + m\ddot{x}_n}$$

$$/z \quad \boxed{-mg - Mg + R_{gn} = 0}$$

Ici, avec le th de la résultante cinétique pour l'assiette :

$$R_x = M\ddot{x}_a \qquad (1)$$

$$R_z = Mg \qquad (2)$$

et la loi de Coulomb pour le glissement :

$$\rightarrow \quad \left|\frac{R_T}{R_N}\right| = f$$

ici : $\left|\dfrac{R_x}{R_z}\right| = f$

$$R_x = \pm fMg$$

$$\rightarrow \quad \overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{v}_{glissement} \leqslant 0$$

$$R_x\, v_{glissement} \leqslant 0$$

<u>on a supposé $v_{gliss} < 0$</u>

donc on choisit $R_x > 0$

$$R_x = +fMg \qquad (3)$$

avec (1) et (3)

$$\ddot{x}_a = f\, g \quad \text{constante}$$

$$\dot{x}_a = f\, g\, t + \cancel{A}$$

$$x_a = \frac{1}{2} f\, g\, t^2 + \cancel{B}$$

$$\boxed{x_a = \frac{1}{2} f\, g\, t^2}$$

4) Mouvement de la nappe :

Le théorème du centre de masse à la nappe donne :

$$-R_x + m\alpha t = m\ddot{x}_n \qquad (4)$$

avec (3), on obtient

$$-fMg + m\alpha t = m\ddot{x}_n$$

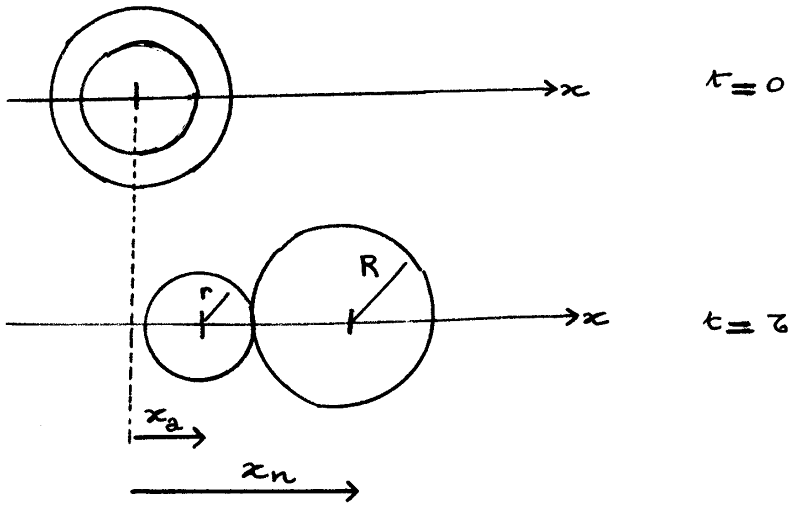
$$\ddot{x}_n = \alpha t - f\frac{M}{m} g$$

$$\dot{x}_n = \frac{1}{2}\alpha t^2 - f\frac{M}{m} g\, t + \cancel{A}$$

$$x_n = \frac{1}{6}\alpha t^3 - \frac{1}{2} f \frac{M}{m} g\, t^2 + \cancel{B}$$

$$\boxed{x_n = \frac{1}{6}\alpha t^3 - \frac{1}{2} f \frac{M}{m} g\, t^2}$$

5)



Au temps τ , $x_n - x_a = (r + R)$

soit :

$$\frac{1}{6}\alpha\tau^3 - \frac{1}{2}f\frac{M}{m}g\tau^2 - \frac{1}{2}fg\tau^2 = (r+R)$$

$$\boxed{\alpha = \frac{6\,(r+R)}{\tau^3} + \frac{3\,fg\,(1+\frac{M}{m})}{\tau}}$$

A.N.

$$= \frac{6\ (0{,}05+0{,}25)}{0{,}1^3} + \frac{3\times 0{,}2\times 9{,}81\ (1+\frac{0{,}4}{0{,}05})}{0{,}1}$$

$$\boxed{\alpha = 2{,}33\ 10^3\ m\,s^{-3}}$$

$$x_a = \frac{1}{2}fg\tau^2$$

$$= \frac{1}{2}\ 0{,}2\ 9{,}81\ \ 0{,}1^2$$

$$x_a = 9{,}8\ 10^{-3}\ m$$

$$\boxed{x_a \simeq 1{,}0\ cm}$$

$$x_n = \frac{1}{6}\alpha\tau^3 - \frac{1}{2}f\frac{M}{m}g\tau^2$$

$$= \frac{1}{6}\ 2{,}33\ 10^3\ \ 0{,}1^3 - \frac{1}{2}\ 0{,}2\ \frac{0{,}4}{0{,}05}\ \ 9{,}81\ \ 0{,}1^2$$

$$\boxed{x_n \simeq 31{,}0\ cm}$$

$$F_{max} = m\alpha\tau$$

$$= 0{,}05\times 2{,}33\ 10^3\times 0{,}1$$

$$\boxed{F_{max} = 11{,}6\ N}$$

---

6) On avait supposé que le glissement commencerait immédiatement avec une vitesse de glissement négative.
Cette supposition, gratuite, est "à vérifier".

$$v_{glissement} = \dot{x}_a - \dot{x}_n$$

$$= fgt - \left(\frac{1}{2}\alpha t^2 - fgt\frac{M}{m}\right)$$

$$\boxed{v_{glissement} = fgt\left(1+\frac{M}{m}\right) - \frac{1}{2}\alpha t^2}$$

Le raisonnement est cohérent si

$$\boxed{Fgt\left(1+\frac{M}{m}\right)-\frac{1}{2}\alpha t^2 \leq 0 \quad \text{pour} \quad t \geq 0}$$

or, cette inégalité implique en réalité :

$$\boxed{t \geq \frac{2fg}{\alpha}\left(1+\frac{M}{m}\right)}$$

$$t \geq t'_1$$

A.N.

$$t'_1 = \frac{2fg}{\alpha}\left(1+\frac{M}{m}\right)$$

$$= \frac{2 \times 0{,}2 \times 9{,}81}{2{,}33\ 10^3}\left(1+\frac{0{,}4}{0{,}05}\right)$$

$$= 0{,}015\ s$$

Notre raisonnement est incorrect. Il y avait au départ une phase de non glissement. Il faut reprendre le problème.

---

7) Phase de non-glissement :

En utilisant, ce qui est plus rapide, le théorème de la résultante cinétique au système : nappe + assiette (voir préalable à la question 3) avec cette fois $\ddot{x}_a = \ddot{x}_n = \ddot{x}$

On avait :

$$m\alpha t = (M+m)\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{m}{M+m}\alpha t$$

$$\dot{x} = \frac{m}{M+m}\alpha\frac{t^2}{2} + \cancel{A}$$

$$x = \frac{m}{M+m}\alpha\frac{t^3}{6} + \cancel{B}$$

donc

$$\boxed{x_a = x_n = \frac{m}{M+m}\alpha\frac{t^3}{6}}$$

---

8) Cette phase dure tant que les lois de Coulomb, en cas de non glissement, sont vérifiées :

$$\left|\frac{R_T}{R_N}\right| \leq f$$

$$\left|\frac{R_x}{R_y}\right| \leq f$$

avec (cf th de la résultante cinétique pour l'assiette)

$$R_x = M\ddot{x} = \frac{Mm}{M+m}\alpha t$$

$$R_z = Mg$$

$$\frac{R_x}{R_z} = \frac{m}{M+m}\frac{\alpha}{g}t \leq f$$

$$\boxed{t \leq \frac{fg}{\alpha}\left(1+\frac{M}{m}\right)}$$

$$t \leq t_1$$

$$t_1 = \frac{fg}{\alpha}\left(1+\frac{M}{m}\right) = \frac{t'_1}{2}$$

remarque :

Le résultat vaut la moitié de la valeur obtenue par le raisonnement faux en 6)

---

9) A l'issue de cette phase, on aura

$$x_1 = \frac{1}{1+\frac{M}{m}}\alpha\frac{t_1^3}{6} = \frac{1}{1+\frac{M}{m}}\alpha\frac{1}{6}\frac{(fg)^3}{\alpha^3}\left(1+\frac{M}{m}\right)^3$$

$$\boxed{x_1 = \frac{f^3g^3}{6\alpha^2}\left(1+\frac{M}{m}\right)^2}$$

$$\boxed{\dot{x}_1 = \frac{f^2g^2}{2\alpha}\left(1+\frac{M}{m}\right)}$$

---

10) La deuxième phase commence en t_1 avec $x = x_1$ et $\dot{x} = \dot{x}_1$.
C'est une phase de glissement (étudiée dans la première partie du problème). Il faut seulement changer les conditions initiales.

$$\boxed{x_a - x_1 = \frac{1}{2}fg(t-t_1)^2 + \dot{x}_1(t-t_1)}$$

$$\boxed{x_n - x_1 = \frac{1}{6}\alpha(t-t_1)^3 - \frac{1}{2}f\frac{M}{m}g(t-t_1)^2 + \dot{x}_1(t-t_1)}$$

---

11) A la fin de cette deuxième phase, on a donc en $t = t_F$

$$x_n - x_a = (R+r)$$

$$\frac{1}{6}\alpha(t_F - t_1)^3 - \frac{1}{2} f g \left(1+\frac{M}{m}\right)(t_F - t_1)^2 = (R+r)$$

$$\left(\text{avec } t_1 = \frac{fg}{\alpha}\left(1+\frac{M}{m}\right)\right)$$

Si on suppose $t_F - t_1 = \tau$ (et non pas $t_F = \tau$), on retrouve la même valeur de α qu'en 5) soit :

$$\boxed{\alpha = 2{,}33\ 10^3\ m s^{-3}}$$

La durée de la première phase est t_1 :

$$\underline{t_1 = 0{,}0076\ s} \qquad (\ll \tau = 0{,}1\ s)$$

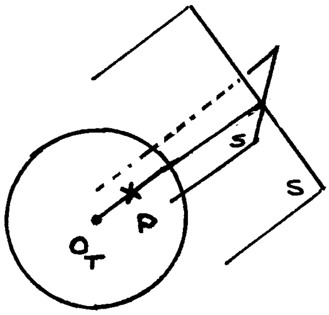
---

12) L'approximation de la première modélisation semble très convenable par rapport à la deuxième modélisation (pour le même α)

	modélisation 1	modélisation 2
durée totale	$\tau = \underline{0{,}100}\ s$	$\tau + t_1 = \underline{0{,}108}\ s$
distance parcourue par l'assiette	$x_a = \frac{1}{2} f g \tau^2$ $= \underline{9{,}81}\ mm$	$x_a = \underbrace{\frac{1}{2} f g \tau^2}_{9{,}81\,mm} + \underbrace{\dot{x}_1 \tau}_{0{,}74\,mm} + \underbrace{x_1}_{0{,}02\,mm}$ $= \underline{10{,}57}\ mm$

Tunnel terrestre

1)



- Les plans $(P, \vec{u_r}, \vec{u_\varphi})$ et $(P, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ sont des plans de symétrie. le champ gravitationnel $\vec{g}(P)$ appartient à ces deux plans.

$$\vec{g}(P) \text{ est selon } \vec{u_r}$$

- le problème est invariant en rotation selon θ et selon φ donc

$$g = g(r, \cancel{\theta}, \cancel{\varphi})$$

On retrouve donc un problème à symétrie sphérique

$$\boxed{\vec{g} = g(r)\ \vec{u_r}}$$

---

2) Par analogie dans le cas de deux points :

électrostatique	gravitation
$\vec{f} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \vec{u_r}$	$\vec{f} = -\dfrac{G m_1 m_2}{r^2}\ \vec{u_r}$
$= q_2\ \vec{E_1}$	$= m_2\ \vec{g_1}$

$$\vec{E} \Longleftrightarrow \vec{g}$$

$$q \Longleftrightarrow m$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Longleftrightarrow -G$$

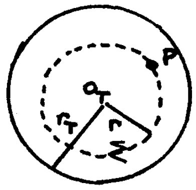
le théorème de gauss devient :

$$\oiint \vec{E}\ \vec{dS} = \frac{Q_{intérieure}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\oiint \vec{g}\ \vec{dS} = -4\pi G\ M_{intérieure}}$$

---

3) On utilise comme surface de Gauss, une sphère centrée en O_T de rayon r, passant par P.



$$\oiint_{\Sigma} \vec{g}\,\vec{dS} = -4\pi G\, M_{intérieure}$$

$$\oiint_{\Sigma} g_{(r)}\, dS = -4\pi G \iiint_V \rho_T\, d\tau$$

$$g_{(r)}\, 4\pi r^2 = -4\pi G\, \rho_T\, \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\boxed{g_{(r \leq r_T)} = -\frac{4}{3}\pi G \rho_T\, r}$$

$$\vec{g} = -\frac{4}{3}\pi G \rho_T\, \vec{r}$$
$$= -\omega^2\, \vec{r}$$

avec

$$\boxed{\omega^2 = \frac{4}{3}\pi G \rho_T}$$

---

4)
$$\vec{f} = m\vec{g}$$
$$= -m\omega^2\vec{r}$$

Cette force dérive d'une énergie potentielle E_P

$$\vec{f} = -\overrightarrow{grad}\, E_P$$

$$\vec{f}\,\vec{dl} = -\overrightarrow{grad}\, E_P\, \vec{dl}$$

$$= -dE_P$$

donc
$$dE_P = m\omega^2\vec{r}\,\vec{dl}$$
$$= m\omega^2 r\, dr$$

$$\boxed{E_P = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + E_{P_0}}$$

Pour trouver la dimension de ω, on peut remarquer que mv^2 étant une énergie aussi, on peut dire que

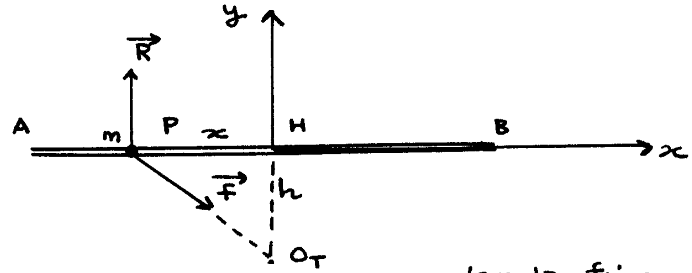
$$[\omega] = \frac{[v]}{[r]} = \frac{L\,T^{-1}}{L}$$

$$\boxed{[\omega] = T^{-1}}$$

(ω sera une pulsation en rad s^{-1})

---

5)



(sur la figure $x<0$)

Par le principe fondamental :

$$\vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}$$

$$\boxed{-m\omega^2\,\overrightarrow{O_TP} + R\,\overrightarrow{u_y} = m\,\frac{d^2\overrightarrow{O_TP}}{dt^2}}$$

avec $\overrightarrow{O_TP} = \overrightarrow{O_TH} + \overrightarrow{HP}$

$= h\,\overrightarrow{u_y} + x\,\overrightarrow{u_x}$

on projette,

$/x \quad -m\omega^2 x = m\,\frac{d^2x}{dt^2}$

$/y \quad -m\omega^2 h + R = 0$

L'équation différentielle est donc:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

---

6) La méthode énergétique est plus pratique.

Puisque $\overrightarrow{R}$ ne travaille pas (pas de frottements), l'énergie mécanique totale est conservée.

Intégrale première du mouvement :

$$E_c + E_p = E_m \text{ (cste)}$$

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + E_{p_0} = E_m$$

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + h^2) + E_{p_0} = E_m$$

soit

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + h^2) + E_{p_0} = \frac{1}{2} m \omega^2 r_T^2 + E_{p_0}$$

$$\boxed{\dot{x}^2 + \omega^2 (x^2 + h^2 - r_T^2) = 0}$$

On peut dériver, par rapport au temps, cette intégrale première

$$2 \dot{x} \ddot{x} + \omega^2 \, 2 x \dot{x} = 0$$

La solution $\dot{x} = 0$ est une solution parasite. On retrouve alors l'équa diff du deuxième ordre :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

---

7)

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

C.I.

$t = 0$	$x = -\sqrt{r_T^2 - h^2} =$	$A \times 1 + B \times 0$
$t = 0$	$\dot{x} = 0$	$= -A\omega \times 0 + B\omega \times 1$

$$\boxed{x = -\sqrt{r_T^2 - h^2} \cos(\omega t)}$$

$$\dot{x} = \omega \sqrt{r_T^2 - h^2} \sin(\omega t)$$

---

8) La vitesse est maximale pour $x = 0$ (en H)

$$\boxed{\dot{x}_{MAX} = \omega \sqrt{r_T^2 - h^2}}$$

Applications numériques :

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3} \pi G \rho_T}$$

$$= \left(\frac{4}{3} \times \pi \times 6{,}7\ 10^{-11} \times 5{,}5\ 10^3\right)^{1/2}$$

$$= 1{,}24\ 10^{-3} \text{ rad s}^{-1}$$

période des oscillations (de centre H)

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$= 5057 \text{ s}$$
$$= 84 \text{ mn}$$

---

9) Trajet AB :

$$\tau_0 = \frac{T}{2} \text{ ou } \frac{\pi}{\omega}$$

$$\boxed{\tau_0 = 42 \text{ mn}}$$

---

10) Sur H_1H_2 on a toujours $E_m = cste$ mais de plus $E_p(r)$ est aussi constante. La vitesse est donc constante.

$$\boxed{H_1H_2 : \text{mvt circulaire uniforme}}$$

La vitesse est la même qu'en H_1 (cf 8))

$$\boxed{v = \omega \sqrt{r_T^2 - r_H^2}}$$

La distance à parcourir est $r_H\,\theta$ et donc la durée est

$$\tau_1 = \frac{r_H\,\theta}{v}$$
$$= \frac{r_H}{\sqrt{r_T^2 - r_H^2}} \; \frac{\theta}{\omega}$$

$$\boxed{\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_T}{r_H}\right)^2 - 1}} \; \frac{\theta}{\omega}}$$

---

11)

$$\tau = \frac{\pi}{2\omega} + \tau_1 + \frac{\pi}{2\omega}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\pi}{\omega} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_T}{r_H}\right)^2 - 1}} \; \frac{\theta}{\omega}}$$

A.N.
$$= \frac{\pi}{1{,}24\ 10^{-3}} + \frac{1}{\sqrt{2^2 - 1}} \; \frac{\pi/3}{1{,}24\ 10^{-3}}$$
$$= 3015 \text{ s}$$

$$\boxed{\tau = 50 \text{ ms}}$$

Extrêmement rapide
mais avec au niveau des parties rectilignes (en A_1 et A_2) des accélérations ou des décélérations de l'ordre de $9{,}8 \text{ ms}^{-2}$ (entre $9{,}8$ et $4{,}9 \text{ ms}^{-2}$) et pour la partie circulaire, une accélération centripète $\frac{v^2}{r_T} = \underline{14{,}8 \text{ ms}^{-2}}$. Donc une force centrifuge extrême ...