DNS

Sujet

Satellites d'observation terrestre

Données numériques :

constante de gravitation: $G=6{,}7.10^{-11}\, m^3 . kg^{-1} . s^{-2}$

masse de la Terre: $M_T=6{,}0 . 10^{24}\, kg$

rayon de la Terre: $R_T=6400\, km$

I. Satellites sur orbite circulaire

Les orbites des satellites SPOT sont des trajectoires circulaires. On considérera que leurs altitudes sont identiques soit $h=800\, km$ (voir *figure* 1).

A. Caractéristiques des orbites de SPOT

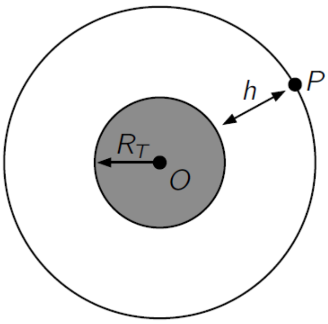


FIGURE 1 – Orbites des satellites SPOT et ENVISAT.

Acquérir plusieurs images d'une même zone à des instants différents nécessite une bonne maîtrise des trajectoires des satellites. On se propose d'étudier certains aspects du mouvement d'un satellite

(S) par rapport au référentiel géocentrique $(\mathcal{R}_g)$ considéré comme galiléen. Le satellite de masse m , repéré par un point P est en orbite circulaire de centre O à une altitude h . On considérera que la Terre est une sphère homogène de rayon R_T et de centre O (voir *figure* 1).

1. Déterminer le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}(P)$ s'exerçant au point P .
2. Établir soigneusement la relation entre la période de révolution T du satellite et son altitude h .
3. Applications numériques: calculer v et T (résultat exprimé en heures et minutes).
4. Retrouver l'expression de l'énergie potentielle E_p du satellite dans le champ de gravité de la terre en fonction de G , M_T , m , R_T et h .
5. En déduire la relation suivante, appelée « théorème du viriel » : $2E_c+E_p=0$

La Terre est entourée d'une atmosphère qui s'oppose au mouvement du satellite. La force de frottement $\vec{f}$ créée par l'atmosphère est proportionnelle au carré de la vitesse v du satellite et elle s'exprime par $\vec{f}=-\alpha m v\vec{v}$, où α est une constante de valeur positive.

6. Déterminer la dimension de α .
7. En considérant que dans ces conditions, le théorème du viriel établi précédemment est toujours valable, exprimer l'énergie mécanique du satellite E et la norme de la vitesse v en en fonction de G , M_T , m , R_T et h .
8. À partir d'un théorème énergétique en déduire que h vérifie l'équation différentielle suivante : $\frac{dh}{dt}=-2\alpha\sqrt{GM_T(R_T+h)}$
9. Un satellite placé sur une orbite d'altitude $h=800\,km$ subit une diminution d'altitude d'environ $1\,m$ *par révolution* .
   - Déterminer α en remarquant que la perte d'altitude sur un tour est très faible.
   - Calculer la perte d'altitude du satellite au bout de $10\,ans$ de fonctionnement.
   - Le fait d'avoir une augmentation de la vitesse en présence d'une force opposée au mouvement est-il paradoxal ?
10. D'après les résultats précédents et en considérant le rôle des satellites étudiés, discuter succinctement du choix de l'altitude de l'orbite pour ces satellites.

B. Stabilisation de l'orbite d'un satellite

La méthode de stabilisation d'altitude par gradient de gravité a été mise en œuvre pour les satellites artificiels afin qu'ils présentent vers la Terre toujours le même côté, et puissent observer la Terre à chaque instant. Elle ne requiert aucune ressource d'énergie embarquée.

Modèle : le satellite est constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses identiques $m=\frac{1}{2}M_S$ reliés par une tige rigide de masse nulle et de longueur 2ℓ . Le barycentre S du satellite décrit autour de la Terre une orbite circulaire de rayon $r_0=R_T+h$ ($\ell\ll r_0$). Le référentiel géocentrique $(\mathcal{R}_g)$ lié au repère $(Oxyz)$ est supposé galiléen. Le plan orbital est

Oxy . Le référentiel $(\mathcal{R}')$ défini par le repère $(Ox'y'z)$ lié au satellite tourne autour de la Terre avec une vitesse angulaire Ω (*Figure* 2). Les points M_1 et M_2 sont dans le plan orbital : $\overrightarrow{OS}=r_0\vec{u}'_x$, $\overrightarrow{OM}_1=\vec{r}_1=r_1\vec{u}_1$, $\overrightarrow{OM}_2=\vec{r}_2=r_2\vec{u}_2$ où $\vec{u}'_x$, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont unitaires. On appelle θ l'angle de M_1M_2 avec l'axe Ox' de $(\mathcal{R}')$. On cherche à déterminer les éventuelles positions d'équilibre du satellite dans le référentiel $(\mathcal{R}')$ et leur stabilité. On suppose qu'il n'y a pas de frottements.

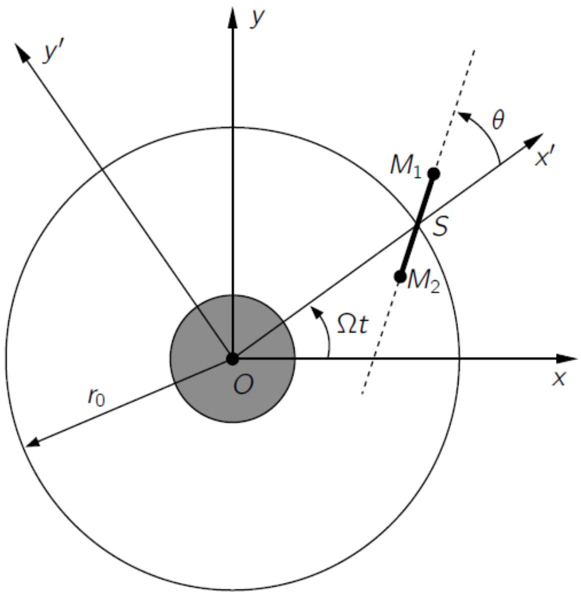


FIGURE 2 – Le satellite, son référentiel $(\mathcal{R}')$ défini par le repère $(Ox'y')$ et le référentiel $(\mathcal{R})$ défini par le repère (Oxy).

11.Exprimer les forces gravitationnelles $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ qui agissent sur M_1 et M_2 .

12.Montrer, en appliquant le théorème de la résultante cinétique à S dans le référentiel géocentrique $(\mathcal{R}_g)$, que la troisième loi de Kepler est vérifiée, soit $\Omega^2=\dfrac{GM_T}{r_0^3}$. On travaillera au premier ordre en $\dfrac{\ell}{r_0}$.

13.On se propose d'étudier la stabilité de la position du satellite dans le référentiel tournant $(\mathcal{R}')$ non galiléen.

- Exprimer dans $(\mathcal{R}')$ les forces d'inertie d'entraînement qui agissent sur M_1 et M_2 en fonction de m , Ω , $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$.
- Exprimer dans $(\mathcal{R}')$ les forces d'inertie de Coriolis qui agissent sur M_1 et M_2 en fonction de m , Ω $\overrightarrow{SM}_1$, $\overrightarrow{SM}_2$ et $\mathring{\theta}=\dfrac{d\theta}{dt}$.

14.Montrer que dans $(\mathcal{R}')$ le moment des forces d'inertie de Coriolis en S est nul.

15.Soient $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$, les résultantes des forces de gravitation et d'entraînement s'exerçant respectivement sur M_1 et M_2 . Montrer qu'au premier ordre en $\frac{\ell}{r_0}$, $\vec{R}_2 = -\vec{R}_1$.

16.Établir que dans $(\mathcal{R}')$ le moment résultant calculé en S des actions extérieures a pour amplitude, pour $\ell \ll r_0$, $\Gamma_S = 6 G m M_T \frac{\ell^2}{r_0^3} \sin(\theta) \cos(\theta)$. Préciser la direction et le sens de ce moment.

17.Appliquer le théorème du moment cinétique dans $(\mathcal{R}')$. Établir l'équation différentielle du mouvement. Déterminer les valeurs de θ qui correspondent à une position d'équilibre dans $(\mathcal{R}')$.

18.Faire un développement limité de l'équation du mouvement au voisinage de $\theta=0$. Montrer que $\theta=0$ est une position d'équilibre stable.

19.À partir de la position $\theta=0$, le satellite subit une petite perturbation qui l'écarte d'un angle θ_0 . Calculer la période des oscillations au voisinage de la position d'équilibre, pour un satellite d'altitude $h=800\,km$. Comparer cette période avec la période du satellite autour de la Terre.

II. Observation de la Terre par SPOT : imagerie haute résolution de la Terre

Le télescope du satellite SPOT est une combinaison catadioptrique à miroir sphérique dérivée du télescope de Schmidt-Cassegrain. Cette combinaison a été choisie pour ses performances en résolution et son bon comportement chromatique.

A. Préliminaire : les miroirs sphériques

20.Énoncer les conditions qui permettent de réaliser l'approximation de Gauss. Quelles conséquences l'approximation de Gauss a-t-elle sur le stigmatisme et l'aplanétisme ?

21.On considère un miroir sphérique convexe de centre C et de sommet S . Un objet $\overline{AB}$ assimilable à un segment est placé perpendiculairement à l'axe optique, l'extrémité A étant située sur cet axe. Reproduire le schéma de la *figure* 3 . Placer les foyers objet F et images F' puis construire, dans le cadre de l'approximation de Gauss, l'image $\overline{A'B'}$ de $\overline{AB}$.

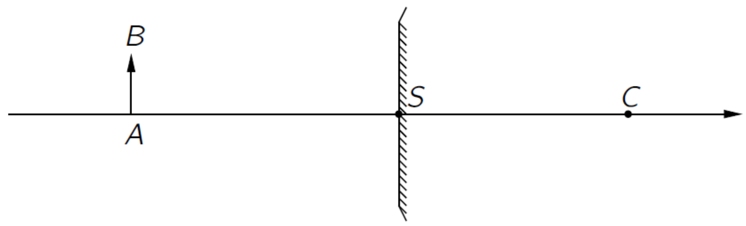


FIGURE 3 – Tracé de F et $A'B'$ à réaliser - recopier le schéma sur la copie.

22.Rappeler le formule de conjugaison de Descartes avec origine au sommet, relative aux miroirs sphériques, reliant la position de l'objet A , à son image A' et au centre C repérés par $\overline{SA}$, $\overline{SA'}$ et $\overline{SC}$. Rappeler également la formule de grandissement avec origine au sommet.

B. Télescope de Schmidt-Cassegrain

On considère à présent un modèle de l'objectif du télescope de type Schmidt-Cassegrain utilisé dans les satellites SPOT.

Modèle : le télescope comprend deux miroirs sphériques en regard, associés de la manière suivante(*Figure* 4) :

- un miroir sphérique concave (M_1) (plus simple et moins coûteux à fabriquer qu'un miroir parabolique), appelé miroir primaire, de sommet S_1 , de centre C_1 , de foyer F_1 et de rayon $R_1 = \overline{S_1 C_1}$;
- un miroir sphérique convexe (M_2) (pour modéliser le miroir hyperbolique), appelé miroir secondaire, de sommet S_2 , de centre C_2 , de foyer F_2

et de rayon $R_2 = \overline{S_2 C_2}$.

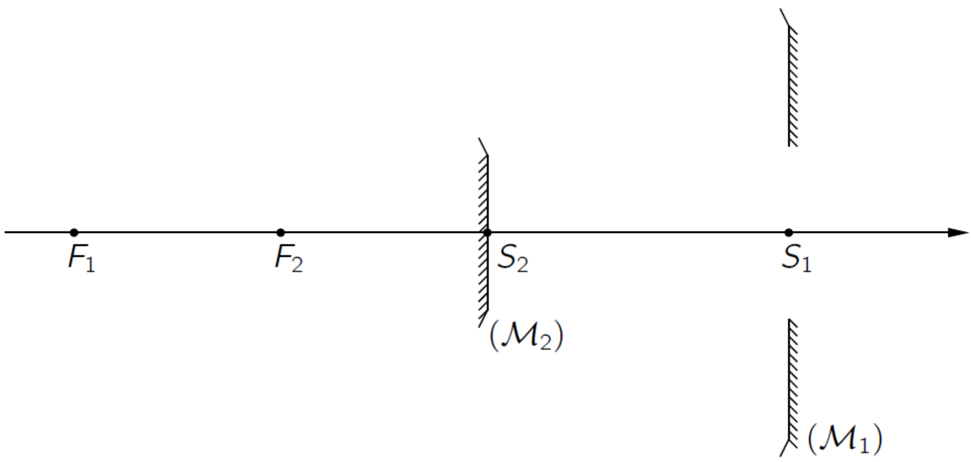


FIGURE 4 – Schéma de principe d'un télescope type Schmidt-Cassegrain.

Le miroir (M_1) comprend une petite ouverture centrée en S_1 pour permettre le passage de la lumière après réflexion sur (M_1) puis sur (M_2). Le miroir (M_2) est de petite dimension, afin de ne pas obstruer le passage de la lumière tombant sur le miroir primaire. On considérera que les miroirs sont utilisés dans les conditions de Gauss.

On observe à travers ce télescope un objet $\overline{AB}$, situé sur Terre à une distance $h = 800\,km$ du miroir (M_1). A est située sur l'axe optique. L'objet étant très éloigné les rayons issus de B qui atteignent le miroir (M_1) sont quasiment parallèles et forment avec l'axe optique l'angle α . Après réflexion sur (M_1), ces rayons se réfléchissent sur (M_2) et forment une image finale $\overline{A''B''}$ située derrière (M_1).

23.Où se situe l'image intermédiaire $\overline{A'B'}$?

24.Déterminer la position du foyer image F' , de l'association des miroirs (M_1) et (M_2), en exprimant $D = \overline{S_1 F'}$ en fonction de R_1 , R_2 et $d = \overline{S_2 S_1}$. Application numérique.

25.Exprimer le grandissement transversal γ_1 du miroir (M_1), le grandissement transversal γ_2 du miroir (M_2), en fonction de R_1 , R_2 d et h . Déterminer le grandissement total γ du télescope ainsi formé.

26.Calculer γ pour $|R_1|=2{,}0\,m$, $|R_2|=25\,m$ et $d=41\,cm$. L'image finale est-elle droite ou renversée ?

27.Quelle serait la distance focale f'_L d'une unique lentille mince qui donnerait une image de même taille ?

28.Conclure en donnant le ou les avantages du montage Cassegrain par rapport au système constitué d'une seule lentille convergente.

C. Résolution des satellites SPOT 4 et SPOT 5

La résolution d'un satellite d'observation est la taille du plus petit objet détectable sur Terre. Celle-ci est liée à la puissance du télescope mais aussi et surtout à la taille du capteur CCD. Le capteur CCD de SPOT 4 est une barrette linéaire de $6000\,pixels$, chaque pixel ayant une largeur de $\delta=13\,\mu m$ (voir *figure* 5).

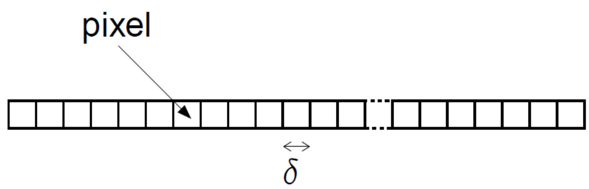


FIGURE 5 – Schéma du capteur CCD.

29.Où placer le capteur ?

30.Déterminer la résolution du satellite SPOT 4.

31.Calculer le champ de vision du satellite, c'est-à-dire la distance balayée sur Terre à chaque passage du satellite.

32.Le satellite SPOT 5, mis en service en 2007, a une résolution de $2{,}5\,m$. En supposant que le système optique reste le même que celui de SPOT 4, quelle doit-être la taille des pixels qui forment son capteur CCD ?

33.Un télescope peut être modélisé par une lentille convergente de focale $f'=1\,m$ limitée par un cercle de diamètre a de l'ordre du *mètre* , le capteur est alors placé dans son plan focal. La résolution angulaire d'un télescope correspond au rayon angulaire de la tâche d'Airy, soit $1{,}22\dfrac{\lambda}{a}$ .Estimer la limite de la résolution du télescope due à la diffraction ? Commenter.

Réponses

1) $$\overrightarrow{F} = -G\,m\,M_T \frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|^3}$$
$$= m\,\overrightarrow{\mathcal{G}}(P)$$

donc $$\overrightarrow{\mathcal{G}}(P) = -G\,M_T \frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|^3} \quad \text{ou}$$
$$= -\frac{G\,M_T}{r^2}\,\overrightarrow{u}_{OP}$$
$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{G}}(P) = -\frac{G\,M_T}{(R_T+h)^2}\,\overrightarrow{u}_{OP}}$$

---

2) On applique le th de la résultante cinétique au satellite dans $\mathcal{R}_g$

$$\cancel{m}\,\overrightarrow{\mathcal{G}}(P) = \cancel{m}\,\overrightarrow{a}_P$$

$/\overrightarrow{u_r}$ $$-\frac{G\,M_T}{(R_T+h)^2} = -\frac{v_P^2}{(R_T+h)}$$

$/\overrightarrow{u_\theta}$ $$0 = \frac{dv_P}{dt}$$

La vitesse est constante en norme et vaut

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T+h}}}$$

La période du satellite est

$$T = \frac{\text{circonférence décrite}}{\text{vitesse linéaire}}$$
$$= \frac{2\pi\,(R_T+h)}{v_P}$$
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{G\,M_T}}\,(R_T+h)^{3/2}}$$

---

3) Applications numériques :

$$v = \left(\frac{6{,}7\ 10^{-11}\ \ 6{,}0\ 10^{24}}{7{,}2\ \ 10^{6}}\right)^{1/2}$$
$$\boxed{v = 7{,}5\ \text{km s}^{-1}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{6{,}7\ 10^{-11}\ 6{,}0\ 10^{24}}}\,(7{,}2\ \ 10^{6})^{3/2}$$
$$= 6054\ \text{s}$$
$$\boxed{T = 1\,\text{h}\ 41\,\text{mn}}$$

---

4) $\overrightarrow{F} = -G m M_T \frac{1}{r^2} \overrightarrow{u_r} = -\overrightarrow{grad}\, E_P(r,\theta,\varphi)$

$\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}$
$$\left| \begin{array}{lll} -G m M_T \frac{1}{r^2} & = -\frac{\partial E_P}{\partial r} & = -\frac{dE_P}{dr} \\ 0 & = -\frac{\partial E_P}{r \partial \theta} & \\ 0 & = -\frac{\partial E_P}{r \sin\theta \partial \varphi} & \end{array} \right.$$

$$E_P = -\frac{G m M_T}{r} + \cancel{cte}$$

$$\boxed{E_P = -\frac{G m M_T}{R_T + h}}$$

---

5) $$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

(en assimilant le satellite à un point matériel)

$$E_C = \frac{1}{2} m \frac{G M_T}{R_T + h}$$

$$= -\frac{1}{2} E_P$$

$$\boxed{2 E_C + E_P = 0}$$

---

6) $$\overrightarrow{f} = -\alpha m v \overrightarrow{v}$$

$$[f] = [\alpha] \underbrace{M [v]^2}_{\text{énergie } W}$$

(cf $E_C = \frac{1}{2} m v^2$)

$$= [\alpha] \underbrace{[W]}_{\text{force} \times \text{déplacement}}$$

$$= [\alpha] [f] L$$

finalement
$$\boxed{[\alpha] = L^{-1}}$$

α a pour dimension l'inverse d'une longueur

---

7) On suppose que les frottements restent faibles et que la trajectoire est assimilable à chaque instant à la trajectoire circulaire tangente

On peut donc, à chaque instant, utiliser les résultats précédents, même si le rayon r change peu à peu.

$$\boxed{v(t) = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h(t)}}}$$

et

$$E_{\substack{\text{méca}\\\text{totale}}} = E_c + E_p$$

avec $E_c = -\frac{E_p}{2}$ (viriel)

ici :

$$E_{(t)} = \frac{E_p(t)}{2} = -E_c(t)$$

$$\boxed{E(t) = -\frac{1}{2}\frac{G m M_T}{R_T + h(t)}}$$

---

8) Le théorème de la puissance cinétique donne :

$$\frac{dE_c}{dt} = \underbrace{\mathcal{P}_{\text{pesanteur}}}_{-\frac{dE_p}{dt}} + \mathcal{P}_{\text{frottements}}$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \vec{f}\,\vec{v}$$

$$= (-\alpha m v \vec{v})\,\vec{v}$$

$$\boxed{\frac{dE(t)}{dt} = -\alpha m v^3}$$

remarque : on remplacera alors E et v par leur expression en 7)

On peut aussi faire

$$E = -\frac{1}{2} m v^2$$

$$\frac{dE}{dt} = -m v \frac{dv}{dt}$$

donc

$$-m v \frac{dv}{dt} = -\alpha m v^3$$

$$\frac{dv}{v^2} = \alpha\, dt$$

$$d\left(\frac{1}{v}\right) = -\alpha\, dt$$

$$d\left(\frac{1}{\sqrt{G M_T}}(R_T + h)^{1/2}\right) = -\alpha\, dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{GM_T}}\ \frac{1}{2}(R_T+h)^{-1/2}\ dh = -\alpha\ dt$$

$$\boxed{\frac{dh_{(t)}}{dt} = -2\alpha\sqrt{GM_T\ (R_T+h_{(t)})}}$$

---

9)

→ sur un tour, $h(t)$ varie peu. On fait

$$\frac{dh(t)}{dt} = -2\alpha\sqrt{GM_T\ (R_T+\cancel{h(t)})}$$

↳ approximé à une constante $= h$ au début de la révolution.

$$dh = -2\alpha\sqrt{GM_T(R_T+h)}\ dt$$

$$\Delta h = -2\alpha\sqrt{GM_T(R_T+h)}\ T$$

$$\alpha = -\frac{\Delta h}{2T\sqrt{GM_T(R_T+h)}}$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{\Delta h}{4\pi\ (R_T+h)^2}}$$

$$\text{A.N.} \quad = -\frac{(-1)}{4\pi\ (7{,}2\ 10^6)^2}$$

$$\boxed{\alpha = 1{,}5\ 10^{-15}\ m^{-1}}$$

→ sur 10 ans, $h(t)$ varie de façon a priori non négligeable.
Il faut donc intégrer l'équation correctement.

$$\int_{h_{initial}}^{h_{final}} dh(t)\ (R_T+h(t))^{-1/2} = -2\alpha\sqrt{GM_T}\int_{t_{initial}}^{t_{final}} dt$$

$$\boxed{2\sqrt{R_T+h_{final}} - 2\sqrt{R_T+h_{initial}} = -2\alpha\sqrt{GM_T}\ \underbrace{(t_{final}-t_{initial})}_{\Delta t}}$$

$$R_T+h_{final} = \left(\sqrt{R_T+h_{initial}} - \alpha\sqrt{GM_T}\ \Delta t\right)^2$$

$$\text{A.N.} \quad = \left(\sqrt{7{,}2\ 10^6} - 1{,}5\ 10^{-14}\sqrt{6{,}7\ 10^{-11}.\ 6{,}0\ 10^{24}}\ 10\times365\times86400\right)^2$$

$$= 7{,}148\ 10^6\ m$$

$$\Delta h = 7{,}148\ 10^6 - 7{,}200\ 10^6$$

$$\boxed{\Delta h = -52\ \text{km}}$$

remarque :

Si on continue de supposer que le $|\Delta h|$ reste petit par rapport à $R_T + h$ (7200km), on peut continuer à travailler avec $h \simeq$ cste sur 10 ans.

Donc :

$$\Delta h = \Delta h_{/tour} \times \text{nbre tours}$$

$$= \Delta h_{/tour} \times \frac{\Delta t_{10\,ans}}{T}$$

$$= -1 \times \frac{10 \times 365 \times 86400}{6054}$$

$$= -52\ \text{km}$$

Mais l'approximation, pas si évidente a priori, est à justifier.

→ On a vu

$$v(t) \simeq \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h(t)}}$$

Puisque $h(t)$ diminue avec les frottements, $v(t)$ augmente en présence des frottements.

On a établi en 7) que

$$E(t) = \frac{E_P(t)}{2} = -E_C(t)$$

Donc sous l'action des frottements :

$E(t)$ diminue d'une certaine valeur

$E_C(t)$ augmente de la même valeur

$E_P(t)$ diminue deux fois plus.

et donc v augmente

10) Si l'altitude des satellites était plus élevée, la période serait plus grande et avec un seul satellite, on passerait moins souvent autour des différentes zones de la terre.
Si l'altitude était plus basse, la vitesse serait plus grande donc aussi les frottements et la durée de vie du satellite serait trop courte.

11) $$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{F_1} &= -\frac{GmM_T}{r_1^3}\overrightarrow{r_1}\\ \overrightarrow{F_2} &= -\frac{GmM_T}{r_2^3}\overrightarrow{r_2}\end{aligned}}$$

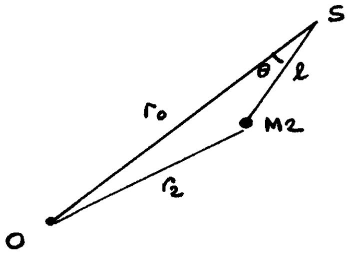
(avec $m = \frac{M_S}{2}$)

---

12) Théorème de la résultante cinétique à S dans R_g

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 2m\,\overrightarrow{a_S}$$

$$-GmM_T\left(\frac{\overrightarrow{r_1}}{r_1^3} + \frac{\overrightarrow{r_2}}{r_2^3}\right) = 2m\,\overrightarrow{a_S}$$



En utilisant la relation d'Al Kashi :

$$r_2^2 = r_0^2 + \ell^2 - 2r_0\ell\cos\theta$$

$$r_2^{-3} = (r_0^2 - 2r_0\ell\cos\theta + \ell^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= r_0^{-3}\left(1 - \frac{2\ell}{r_0}\cos\theta + \frac{\ell^2}{r_0^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\simeq r_0^{-3}\left(1 + \frac{3\ell}{r_0}\cos\theta\right)$$

de même

$$r_1^{-3} \simeq r_0^{-3}\left(1 - \frac{3\ell}{r_0}\cos\theta\right)$$

$$\boxed{-\frac{GmM_T}{r_0^3}\left(\underbrace{(\overrightarrow{r_1}+\overrightarrow{r_2})}_{\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}\,\to\,2\overrightarrow{OS}} + \frac{3\ell}{r_0}\cos\theta\,\underbrace{(\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1})}_{\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\,\to\,\overrightarrow{M_1M_2}}\right) = 2m\,\overrightarrow{a_S}}$$

$$-\frac{GmM_T}{r_0^3}\left(2r_0\,\overrightarrow{u_{OS}} - \frac{3\ell}{r_0}\cos\theta\,2\ell\,\overrightarrow{u_{M_2M_1}}\right) = 2m\,\overrightarrow{a_S}$$

$$-\frac{2GmM_T}{r_0^2}\left(\overrightarrow{u_{OS}} - \underbrace{3\left(\frac{\ell}{r_0}\right)^2\cos\theta\,\overrightarrow{u_{M_2M_1}}}\right) = 2m\,\overrightarrow{a_S}$$

↳ à éliminer car on travaille au 1er ordre finalement

$$-\frac{G M_S M_T}{r_0^2}\,\overrightarrow{u_r} = M_S\,\overrightarrow{a_S}$$

identique à la réponse question 2) comme si on avait pu supposer $\overrightarrow{g}$ uniforme et appliquer le poids au centre de masse. Ceci n'était pas directement possible ici puisque $\overrightarrow{g}$ n'est pas uniforme ... mais l étant "petit" $l \ll r_0$, le calcul, au premier ordre, revient à commettre cette approximation.

---

13) R' tourne à vitesse constante $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\,\overrightarrow{u_z}$

→ Les forces d'inertie d'entraînement sont les forces centrifuges.
(pas de forces d'inertie d'entraînement tangentielles)

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{F_1}_{centrifuge} &= m\,\Omega^2\,\overrightarrow{r_1}\\ \overrightarrow{F_2}_{centrifuge} &= m\,\Omega^2\,\overrightarrow{r_2}\end{aligned}}$$

→ R' étant un référentiel tournant, on doit tenir compte des forces de Coriolis

$$\overrightarrow{F_1}_{coriolis} = -2m\,\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{v_1}_{/R'}$$

$$\downarrow$$

$$(\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}\wedge\overrightarrow{SM_1})$$

puisque M_1 dans R' décrit un mouvement circulaire.

En continuant à travailler formellement avec $\overrightarrow{A}\wedge(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{C}) = \overrightarrow{B}(\overrightarrow{C}\,\overrightarrow{A}) - \overrightarrow{C}(\overrightarrow{A}\,\overrightarrow{B})$

$$-2m\dot{\theta}\,\Omega\,(\overrightarrow{u_z}\wedge(\overrightarrow{u_z}\wedge\overrightarrow{SM_1}))$$

$$= -2m\dot{\theta}\,\Omega\left[\overrightarrow{u_z}\,\underbrace{(\overrightarrow{SM_1}\cdot\overrightarrow{u_z})}_{\text{nul}} - \overrightarrow{SM_1}\,\underbrace{\overrightarrow{u_z}^2}_{1}\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{F_1}_{coriolis} &= 2m\dot{\theta}\,\Omega\,\overrightarrow{SM_1}\\ \overrightarrow{F_2}_{coriolis} &= 2m\dot{\theta}\,\Omega\,\overrightarrow{SM_2}\end{aligned}}$$

---

14) Moment des forces de Coriolis en S :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{CORIOLIS}(S) = \overrightarrow{SM_1}\wedge\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{SM_2}\wedge\overrightarrow{F_2}$$

$$= 2m\dot{\theta}\,\Omega\,(\underbrace{\overrightarrow{SM_1}\wedge\overrightarrow{SM_1}}_{\text{nul}} + \underbrace{\overrightarrow{SM_2}\wedge\overrightarrow{SM_2}}_{\text{nul}})$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{CORIOLIS}(S) = \vec{0}}$$

---

15) A la question 12) on a vu que – au premier ordre –

$$\overrightarrow{F_1} = -\frac{G m M_T}{r_0^3}\left(\overrightarrow{r_1} - \frac{3\ell}{r_0}\cos\theta\,\overrightarrow{r_1}\right)$$

donc

$$\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_1}_{\text{centrifuge}} = -\frac{G m M_T}{r_0^3}\left(\overrightarrow{r_1} - \frac{3\ell}{r_0}\cos\theta\,\overrightarrow{r_1}\right) + m\underbrace{\Omega^2}_{\frac{GM_T}{r_0^3}}\overrightarrow{r_1}$$

finalement :

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{R_1} &= \frac{G m M_T}{r_0^3}\,\frac{3\ell}{r_0}\cos\theta\,\overrightarrow{r_1}\\ \overrightarrow{R_2} &= -\frac{G m M_T}{r_0^3}\,\frac{3\ell}{r_0}\cos\theta\,\overrightarrow{r_2}\end{aligned}}$$

$$\overrightarrow{R_1} = \frac{G m M_T}{r_0^3}\,\frac{3\ell}{r_0}\cos\theta\left(\overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{SM_1}\right)$$

$$\overrightarrow{R_2} = -\frac{G m M_T}{r_0^3}\,\frac{3\ell}{r_0}\cos\theta\left(\overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{SM_2}\right)$$

$$\overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} = \frac{G m M_T}{r_0^3}\,\frac{3\ell}{r_0}\cos\theta\,\underbrace{\left(\overrightarrow{SM_1} - \overrightarrow{SM_2}\right)}_{\overrightarrow{M_2M_1} = 2\ell\,\vec{u}_{M_2M_1}}$$

$$= \frac{G m M_T}{r_0^2}\,\frac{6\ell^2}{r_0^2}\cos\theta\,\vec{u}_{M_2M_1}$$

$\uparrow$ terme du deuxième ordre

donc, au premier ordre

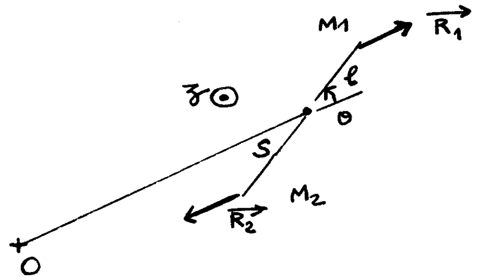
$$\overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} = \vec{0}$$

on fera :

$$\boxed{\overrightarrow{R_1} = -\overrightarrow{R_2} = \frac{G m M_T}{r_0^3}\,\frac{3\ell}{r_0}\cos\theta\,\overrightarrow{r_0}}$$

---

16)



Les deux forces forment un couple dont le moment est indépendant du point de calcul.

On calcule le moment en S par exemple

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma_S} &= \overrightarrow{SM_1} \wedge \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{SM_2} \wedge \overrightarrow{R_2} \\ &= \overrightarrow{SM_1} \wedge \overrightarrow{R_1} + (-\overrightarrow{SM_1}) \wedge (-\overrightarrow{R_1}) \\ &= \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \overrightarrow{R_1} \\ &= 2\ell\, \overrightarrow{u}_{M_2M_1} \wedge \frac{GmM_T}{r_0^3} 3\ell \cos\theta\, \overrightarrow{u}_{OS}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_S} = -6\frac{GmM_T}{r_0^3}\ell^2 \cos\theta \sin\theta\, \overrightarrow{u_z}}$$

selon $-\overrightarrow{u_z}$

Il tend donc à faire tourner le satellite pour ramener $\overrightarrow{M_2M_1}$ selon $\overrightarrow{OS}$ (moment de rappel)

---

17) Dans $\mathcal{R}'$ non galiléen, le théorème du moment cinétique en S fixe
$\rightarrow$ donne :

$$\overrightarrow{\Gamma_S} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma}(S)$$

$$\text{avec } \overrightarrow{\sigma}(S) = 2\, m\ell^2 \dot{\theta}\, \overrightarrow{u_z}$$

donc :

$$\boxed{-\frac{6\, GmM_T}{r_0^3}\ell^2 \cos\theta \sin\theta = 2\, m\ell^2 \ddot{\theta}}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3\, GM_T}{r_0^3}\cos\theta \sin\theta = 0$$

$\rightarrow$ Il y a équilibre "relatif" (c'est à dire dans $\mathcal{R}'$) si $\overrightarrow{\Gamma_S}$ est nul.

$\sin\theta \cos\theta = 0$ soit :

$$\boxed{\begin{aligned}\theta &= 0 \text{ ou } \pi \\ \theta &= \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2}\end{aligned}}$$

---

18) La figure en 16) traduit bien que $\theta = 0$ est la position d'équilibre stable. Si $\theta = +\varepsilon$ ou $\theta = -\varepsilon$ le satellite revient vers $\theta = 0$

on fait un développement limité de Γ_{S_z} avec $\vec{\Gamma_S} = \Gamma_{S_z} \vec{u_z}$ au voisinage de $\theta = 0$.

Travailler au premier ordre en θ va suffire.

$$\Gamma_{S_z} = -\frac{6\,G\,m\,M_T}{r_0^3}\,\ell^2 \underbrace{\cos\theta}_{\downarrow\,1}\ \underbrace{\sin\theta}_{\downarrow\,\theta}$$

$$\simeq -\frac{6\,G\,m\,M_T}{r_0^3}\,\ell^2\,\theta$$

donc si :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \theta > 0 & \Gamma_{S_z} < 0 & \\ \theta < 0 & \Gamma_{S_z} > 0 & \end{array}\Bigg\}\ \text{moment de rappel vers OS}}$$

équilibre stable.

---

19) On réécrit l'équation différentielle 17) au voisinage de $\theta = 0$

$$-\frac{6\,G\,m\,M_T}{r_0^3}\,\ell^2\,\theta = 2\,m\,\ell^2\,\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{3\,G\,M_T}{r_0^3}\,\theta = 0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\,G\,M_T}{r_0^3}}$$

$$\boxed{\underset{\text{oscillation satellite}}{T_0} = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{3\,G\,M_T}}}$$

$$\boxed{\underset{\text{oscillation satellite}}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \underset{\text{révolution satellite}}{T}}$$

A.N. $= \frac{1}{\sqrt{3}}\ 6054$

$= 3495$

$$\boxed{\underset{\text{oscillation}}{T_0} = 58\,\text{mn}}$$

---

20) Approximation de Gauss

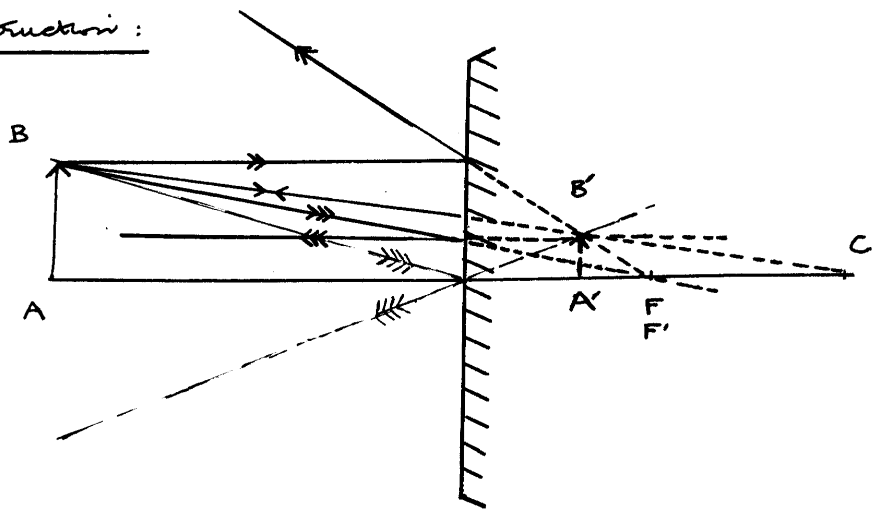
optique <u>paraxiale</u> (rayons "proches" de l'axe)

- les rayons sont <u>peu inclinés</u> sur l'axe optique - les rayons passent <u>près des sommets des dioptres</u> (on doit diaphragmer)

on aura alors <u>stigmatisme approché</u>
(à un <u>point objet</u> correspond quasiment un point image)
et <u>aplanétisme approché</u>
(si l'<u>objet est dans un plan de front</u> - perpendiculaire à l'axe - l'image se trouve elle-aussi quasiment dans un plan perpendiculaire à l'axe)

---

21) <u>Construction :</u>



---

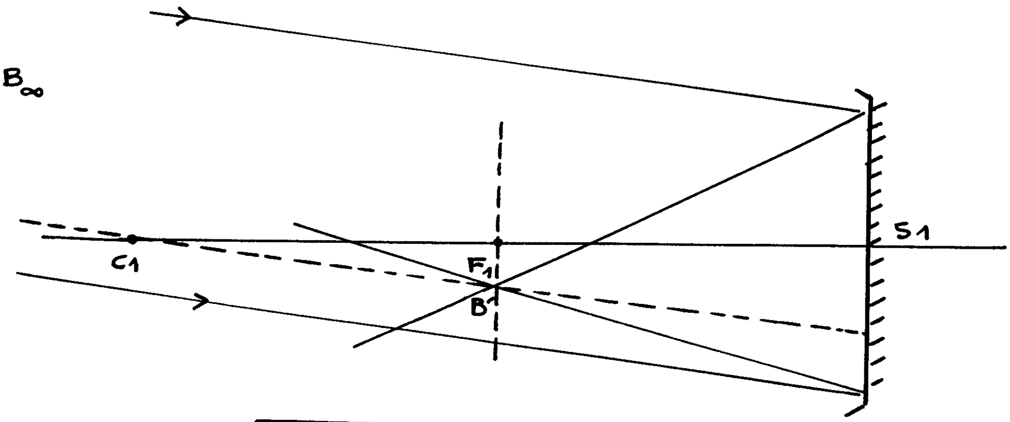
22)

$$\boxed{\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}}$$

$$\boxed{\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}}$$

---

23) L'objet AB est considéré <u>à l'infini</u>.
L'image intermédiaire donnée par le miroir (M1) se trouve donc <u>dans le plan focal</u> c'est à dire dans le plan passant par F1.



$$\boxed{\begin{array}{c} A' \text{ se trouve en } F_1 \\ \overline{S_1A'} = \overline{S_1F_1} = \frac{R_1}{2} \end{array}}$$

---

24)
$$AB_{\infty\infty} \xrightarrow{M_1} \underset{F_1}{\overset{A'B'}{\downarrow}} \xrightarrow{M_2} \underset{F'}{\overset{A_iB_i}{\downarrow}}$$

L'objet AB étant à l'infini, son image donnée par le système se trouve par définition dans le plan focal image du système

Avec
$$\frac{1}{\overline{S_2F_1}} + \frac{1}{\overline{S_2F'}} = \frac{2}{\overline{S_2C_2}}$$

on prend une origine en S_1 (avec $\overline{S_1S_2} = -d$)

$$\frac{1}{\overline{S_1F_1} - \overline{S_1S_2}} + \frac{1}{\overline{S_1F'} - \overline{S_1S_2}} = \frac{2}{\overline{S_2C_2}}$$

$$\frac{1}{\frac{R_1}{2} + d} + \frac{1}{\overline{S_1F'} + d} = \frac{2}{R_2}$$

d'où :
$$\boxed{D = \overline{S_1F'} = \frac{1}{2}\frac{R_2\,(R_1 + 2d)}{(R_1 - R_2) + 2d} - d}$$

A.N. $R_1 = -2{,}0$ m

$R_2 = -25$ m

$d = 0{,}41$ m

$$D = \frac{1}{2}\frac{-25\,(-2 + 0{,}82)}{(-2+25) + 0{,}82} - 0{,}41$$

$$\boxed{D = 0{,}209 \text{ m}}$$

---

25)

$$\gamma_1 = -\frac{\overline{S_1F_1}}{\overline{S_1A}}$$

$$= -\frac{R_1/2}{-h}$$

$$\boxed{\gamma_1 = \frac{R_1}{2h}}$$

$$\gamma_2 = -\frac{\overline{S_2F'}}{\overline{S_2F_1}}$$ en utilisant la relation de conjugaison :

$$= -\frac{\frac{1}{\overline{S_2F_1}}}{\frac{1}{\overline{S_2F'}}}$$

$$= -\frac{\frac{1}{\overline{S_2F_1}}}{\frac{2}{\overline{S_2C_2}} - \frac{1}{\overline{S_2F_1}}}$$

$$= -\frac{1}{\frac{2\,\overline{S_2F_1}}{\overline{S_2C_2}} - 1}$$

$$= -\frac{1}{\frac{2\left(\frac{R_1}{2}+d\right)}{R_2} - 1}$$

$$\boxed{\gamma_2 = -\frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + \frac{2d}{R_2} - 1}}$$

grandissement total

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2$$

$$\boxed{\gamma = -\frac{R_1 R_2}{2h\,(R_1 - R_2 + 2d)}}$$

---

26) A.N.

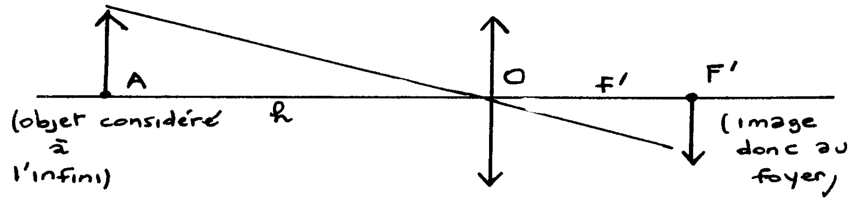
$$\gamma = -\frac{-2 \times -25}{2 \;\; 800\;10^3 \;(-2+25+0{,}82)}$$

$$\boxed{\gamma = -1{,}31\;10^{-6}}$$

L'image finale est renversée (γ négatif)

---

27) lentille mince :
par exemple avec les formules de Descartes :



$$\gamma = -\frac{f'}{h}$$

$$\boxed{f' = -\gamma h}$$

A.N. $f' = 1{,}31\ 10^{-6}\ 800\ 10^{3}$

$$\boxed{f' = 1{,}05\ m}$$

---

28) → Le montage Cassegrain est <u>moins encombrant</u> que la lentille unique

$$\overline{S_2A_i} < \overline{OF'}$$

$$0{,}41 + 0{,}21 < 1{,}05\ m$$

→ Pour une lentille, il y a des problèmes d'<u>achromatisme</u> (la position des foyers dépend de n, donc de λ à cause des réfractions) ce qui n'est pas le cas pour les miroirs (réflexion)

---

29) Le capteur est placé dans <u>le plan focal</u> où se forme l'image (cf F')

---

30) Le satellite est à une altitude de 800km.
On a $\gamma = -1{,}31\ 10^{-6}$
Pour qu'un objet impressionne 2 pixels voisins, la taille de l'image minimale est δ et la taille de l'objet correspondant est en valeur absolue : $\frac{\delta}{|\gamma|}$

$$\boxed{\text{résolution} = \frac{\delta}{|\gamma|}}$$

A.N.

$$= \frac{13\ 10^{-6}}{1{,}31\ 10^{-6}}$$

$$\boxed{\text{résolution} \simeq 10\ \text{m}}$$

---

31)

$$\boxed{\text{champ de vision} = \text{résolution} \times \text{nbre pixels}}$$

A.N. $= 10 \times 6000$

$$\boxed{\text{champ de vision} = 60\ \text{km}}$$

---

32)

δ doit être environ 4 fois plus petit

(cf $10\ \text{m} \longrightarrow 2{,}5\ \text{m}$)

$$\boxed{\delta' = 3{,}3\ \mu\text{m}}$$

---

33)

$$\underset{\text{(diffraction)}}{\text{résolution}} = 1{,}22\ \frac{\lambda}{a}\ f'$$

A.N.

(avec $\lambda \simeq 0{,}5\ \mu\text{m}$)

$$= 1{,}22\ \frac{0{,}5\ 10^{-6}}{1}\ 1$$

$$\boxed{\underset{\text{diffraction}}{\text{résolution}} \simeq 0{,}6\ \mu\text{m} \ll \delta}$$

La diffraction n'affecte pas les images ici.
