DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Cycle thermodynamique

On étudie dans ce problème le cycle thermodynamique d'une machine motrice ditherme qui fonctionne au contact de deux thermostats dont les températures sont respectivement notées T_{froid} pour le thermostat le plus froid (noté Σ_F) et T_{chaud} pour le thermostat le plus chaud (noté Σ_C). Le système que l'on considère au cours du cycle est une masse m d'air assimilable à un gaz parfait dont le rapport de capacités thermiques est noté γ .

On note W la quantité d'énergie échangée sous forme de travail avec le milieu extérieur par le système au cours d'un cycle. Q_{froid} et Q_{chaud} sont respectivement les quantités d'énergie échangées sous forme de chaleur par le système avec Σ_F et Σ_C au cours d'un cycle.

Données :

- Masse d'air décrivant le cycle : $m=1\,kg$
- Rapport de capacités thermiques de l'air : $\gamma=1{,}4$
- Constante des gaz parfaits : $R=8{,}32\,J.K^{-1}.mol^{-1}$
- Masse molaire de l'air : $M_{air}=29\,g.mol^{-1}$
- Température de la source froide (atmosphère) : $T_{froid}=290\,K$
- Température de la source chaude : $T_{chaud}=950\,K$
- Pression basse : $P_0=10^5\,Pa$
- Pression haute : $P_1=10^6\,Pa$

Dans la suite: « exprimer en fonction des données » signifie: donner une réponse littérale en fonction de m , γ , R , M_{air} , T_{froid} , T_{chaud} , P_0 , P_1 .

I. Questions préliminaires

A. Généralités sur les moteurs

1. Quels sont les signes de W , Q_{froid} et Q_{chaud} dans la convention thermodynamique ?
2. Définir l'efficacité (appelée aussi: rendement thermodynamique) (notée η) du moteur.
3. On désigne l'entropie produite au cours d'un cycle par S^p_{cycle} . À partir de l'écriture du premier et deuxième principes de la thermodynamique sur le cycle, établir l'expression de l'efficacité et montrer que l'efficacité maximale du moteur est obtenue pour un fonctionnement réversible. Donner l'expression de cette efficacité maximale en fonction des températures des sources.

B. Gaz parfait

4. Rappeler la relation de Mayer pour un gaz parfait qui relie les capacités thermiques molaires C_V à volume constant et C_P à pression constante et la constante R . Retrouver

l'expression de C_V et celle de C_P en fonction de R et de γ .

5. Retrouver l'expression de la variation d'énergie interne massique (pour une masse unité) Δu entre deux états d'équilibre quelconques en fonction de R , M_{air} , γ et ΔT (la variation de température entre les deux états).
6. En déduire l'expression de la variation d'enthalpie massique Δh entre deux états d'équilibre quelconques en fonction des mêmes grandeurs.

II. Thermodynamique du moteur

La masse d'air m subit dans le moteur la succession de transformations suivante :

a)Une transformation d'un état d'équilibre noté A à un état d'équilibre noté B , qui fait passer la pression d'une valeur basse P_0 à une valeur haute P_1 . Les températures et les volumes dans l'état A et dans l'état B sont respectivement $T_A = T_{froid}$, V_A , $T_B = T_{froid}$ et V_B .

À ce stade rien n'est dit sur la nature ni la réalisation de cette transformation. On indique seulement qu'il n'y a pas, au cours de cette transformation, d'échange d'énergie thermique avec le thermostat Σ_C mais il peut y en avoir avec Σ_F .On sait aussi que le gaz dans l'état A et dans l'état B est en équilibre thermique avec le thermostat Σ_F . De plus, on note W_{AB} la quantité d'énergie échangée sous forme de travail par le système au cours de cette transformation inconnue $A \rightarrow B$.

b)Un échauffement monobare au contact du thermostat Σ_C de l'état d'équilibre B à l'état d'équilibre C . La température, le volume et la pression de l'état C sont respectivement $T_C = T_{chaud}$, V_C et $P_C = P_1$.

c)Une détente adiabatique réversible qui fait passer le gaz de l'état d'équilibre C à l'état d'équilibre D . La température, le volume et la pression de l'état D sont respectivement T_D , V_D et $P_D = P_0$

d)De l'état d'équilibre D , un refroidissement monobare au contact du thermostat Σ_F ramène le système à l'état initial d'équilibre A .

A. Étude du cycle

1) Les états d'équilibres

7. Exprimer en fonction des données puis calculer numériquement les volumes V_A , V_B et V_C .
8. Exprimer en fonction des données: $\frac{T_D}{T_C}$ et $\frac{V_D}{V_C}$ puis calculer numériquement la température T_D et le volume V_D . On démontrera les relations utilisées.
9. Positionner qualitativement les points d'équilibre A , B , C et D dans un diagramme de Clapeyron (P, V) et tracer l'allure .

2) Calculs d'entropie

On étudie chaque transformation afin de déterminer l'entropie produite au cours de chaque transformation.

10.On étudie la transformation $B \rightarrow C$. Exprimer en fonction des données puis calculer numériquement Q_{BC} . Exprimer en fonction des données puis calculer le terme de transfert d'entropie S_{BC}^{tr} au cours de cette transformation. Idem pour le terme de production d'entropie S_{BC}^{p} .

11.On étudie la transformation $D \rightarrow A$. Exprimer en fonction de m , γ , R , M_{air} , T_{froid} , T_D puis calculer numériquement Q_{DA} . Exprimer, en fonction des mêmes grandeurs, puis calculer le terme de transfert d'entropie S_{DA}^{tr} au cours de cette transformation. Idem pour le terme de production d'entropie S_{DA}^{p} .

12.On étudie la transformation $C \rightarrow D$. Déterminer le terme de transfert d'entropie S_{CD}^{tr} et le terme de production d'entropie S_{CD}^{p} au cours de cette transformation.

13.On étudie la transformation inconnue $A \rightarrow B$. Écrire la relation entre W_{AB} et Q_{AB} . Exprimer (démontrer la relation utilisée) et calculer ΔS_{AB} ($= S_{AB}^{tr}+S_{AB}^{p}$) pour cette transformation. Exprimer le terme de production d'entropie S_{AB}^{p} au cours de cette transformation en faisant intervenir W_{AB} .

3) Détermination directe de la production d'entropie globale sur le cycle

Les questions qui suivent dans cette partie sont totalement indépendantes des calculs d'entropie de la partie précédente.

14.L'échange d'énergie sous forme de chaleur avec Σ_C ne s'effectue au cours du cycle que sur la transformation $B \rightarrow C$. Par contre l'échange d'énergie sous forme de chaleur avec Σ_F s'effectue au cours du cycle sur la transformation $D \rightarrow A$ et sur la transformation $A \rightarrow B$. Exprimer littéralement $Q_{froid}=Q_{DA}+Q_{AB}$ en fonction de T_{froid} , de T_{chaud} , de W_{AB} et des autres données du problème.

15.À partir de l'écriture du deuxième principe de la thermodynamique sur le cycle, en déduire alors une expression de l'entropie produite sur le cycle S_{cycle}^{p} en fonction de W_{AB} et des données du problème.

16.En déduire que la diminution de l'entropie produite sur ce cycle passe par la minimisation de W_{AB} .

B. Étude de la transformation AB

On étudie deux propositions pour la transformation AB.

1) Compression isotherme

On fait l'hypothèse que la transformation AB est une compression isotherme.

17.Exprimer en fonction des données puis calculer W_{AB} .

18.Calculer l'efficacité thermodynamique du moteur.

19.Quelle est la durée d'une transformation isotherme. Que vaudrait alors la puissance d'un moteur fonctionnant dans le cadre de cette hypothèse?

2) Compression simple

L’air pris dans l’état d’équilibre A subit une compression rapide jusqu'à la pression haute P_1 . La compression est adiabatique. On suppose les équilibres de pression suffisamment rapides pour que la compression puisse être considérée comme mécaniquement réversible. Le fluide sort du compresseur dans l'état d'équilibre E . Puis dans une deuxième étape, le fluide échange de l'énergie selon une transformation monobare avec Σ_F jusqu'à atteindre l'équilibre avec la source.

20. Représenter dans un même diagramme de Clapeyron les deux propositions (compression isotherme et compression simple).

21. Exprimer puis calculer la température T_E .

22. Exprimer puis calculer l’énergie échangée sous forme de travail par la masse de fluide au cours de la transformation $A \rightarrow E$.

23. Exprimer puis calculer l’énergie échangée sous forme de travail par la masse de fluide au cours de la transformation $E \rightarrow B$.

24. Exprimer puis calculer W_{AB} .

25. Calculer l'efficacité thermodynamique du moteur. Commenter.

Interférences avec des miroirs plans

L'indice de l'air est pris égal à celui du vide c'est-à-dire: 1 .

I. Miroir de Lloyd

A. Étude générale

On considère le dispositif interférentiel du miroir de Lloyd composé d'un miroir plan AB , de largeur ℓ et d'un écran placé en B , orthogonalement au plan du miroir. Une source ponctuelle S , située à une hauteur h au-dessus du plan du miroir et à une distance d de l'extrémité A du miroir, éclaire celui-ci sous incidence rasante ($h \ll d+\ell$), d'une lumière de longueur d'onde λ .

Les faisceaux, direct et réfléchi par le miroir, contribuent aux interférences observées en un point M de l'écran (*figure* 1)

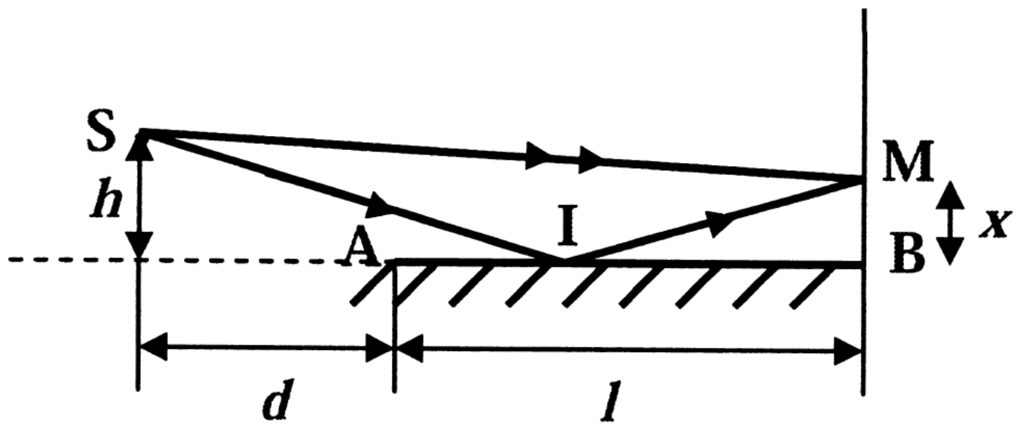


figure 1

1. Ce dispositif est-il à division du front d'onde ou à division d'amplitude ? Quelle est la conséquence sur les intensités I_1 et I_2 des faisceaux issus des sources secondaires S_1 et S_2 ?

2. Positionner les sources secondaires S_1 et S_2 dans ce dispositif interférentiel et délimiter le champ d'interférences dans le plan de la *figure* 1 . Préciser ensuite les valeurs extrêmes de x pour la zone d'interférences au niveau de l'écran.

3. Contrairement au rayon direct, le rayon réfléchi subit, lors de la réflexion, un déphasage de π . Ces sources secondaires sont-elles cohérentes ? synchrones ? en phase ?

4. Déterminer la différence de marche géométrique δ' (on démontrera la formule utilisée en utilisant les notations de la figure en travaillant dans le plan de la figure) et la différence de marche totale δ ainsi que l'ordre d'interférence p au point M ($BM=x$) en fonction de λ , h , ℓ , d et x .

5. En déduire l'expression (simplifier cette expression) de l'intensité lumineuse $I(x)$ en M en

fonction de I_1 , λ , h , ℓ , d et x . On démontrera la formule utilisée. Déterminer la nature de la frange en $x=0$.

6. Déduire de $I(x)$ l'expression de l'interfrange i , en fonction de λ , h , ℓ et d .

7. Déterminer en fonction de λ , h , ℓ et d ,le nombre N de franges claires que l'on peut observer sur l'écran.

8. Applications numériques : Calculer i , N , sachant que : $\lambda=632{,}8\,nm$, $h=1\,mm$, $\ell=30\,cm$ et $d=50\,cm$. Préciser l'abscisse x des franges claires.

B. Application

Un bateau en mer à $10\,km$ de la côte veut capter une émission radio FM de fréquence $100\,MHz$. Le faisceau parallèle, provenant de l'émetteur situé sur la côte, se réfléchit en partie sur la mer et le dispositif s'identifie à celui du miroir de Lloyd (*figure* 2).

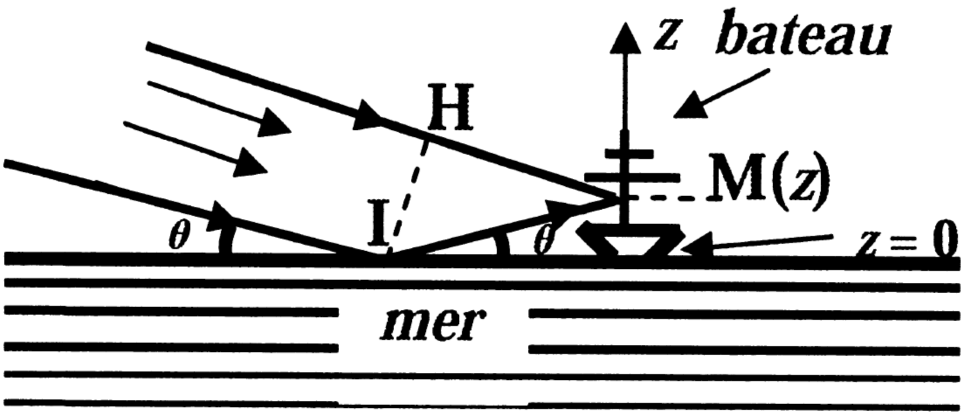


figure 2

1) Mer calme

Par mer calme, celle-ci se comporte comme un miroir parfait.

9. Déterminer la différence de marche géométrique δ' . Montrer avec précision qu'elle vaut $\delta'=K\ z\ \sin\theta$ où K est une constante dont on donnera la valeur.

10. Donner l'expression de l'ordre d'interférence $p(z)$, de l'intensité vibratoire $I(z)$. Donner l'expression de l'interfrange i en fonction de λ et θ .

11. Application numérique : calculer l'interfrange si l'émetteur est situé à une hauteur de $10\,m$.

12. Pour quelle raison l'émission de radio est-elle mal perçue quand l'émetteur est situé à une hauteur de $10\,m$ et la perception bien meilleure quand celui-ci se trouve sur une colline à une hauteur de $700\,m$?

2) Mer agitée

Par mer agitée, la mer se comporte comme un miroir imparfait. La vibration propagée par le faisceau parallèle est perpendiculaire au plan d'incidence, avec un facteur de réflexion en intensité du miroir imparfait $R_\perp = 80\ \%$.

13.Démontrer l'expression donnant l'intensité $I(z)$ en désignant par I_1 l'intensité du faisceau direct et par I_2 l'intensité du faisceau réfléchi. En déduire l'expression en fonction I_1 et de I_2 , puis en fonction de $R_\perp$, du contraste $\mathscr{C} = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$.

14.Calculer $\mathscr{C}$ pour $R_\perp = 80\ \%$. La perception des ondes est-elle bien contrastée quand l'antenne réceptrice se déplace le long du mât du bateau.

II. Miroirs de Fresnel

On considère le système interférentiel des miroirs de Fresnel (*figure* 3). Les miroirs (M_1) et (M_2), d'arête commune (Δ), font entre eux un angle $\alpha = 3'$ d'arc et sont éclairés par une source ponctuelle S située à la distance $d = 60\,cm$ de (Δ), dans le plan de symétrie du système perpendiculaire à (Δ). Les miroirs donnent de S deux images S_1 et S_2 . Les interférences sont observées dans un plan (E) parallèle à (Δ) et perpendiculaire au plan médiateur de S_1S_2 à la distance $D = 1{,}40\,m$ de (Δ).

La position d'un point P sera repérée par sa distance x à l'axe (y, y'), intersection du plan médiateur de S_1S_2 avec (E).

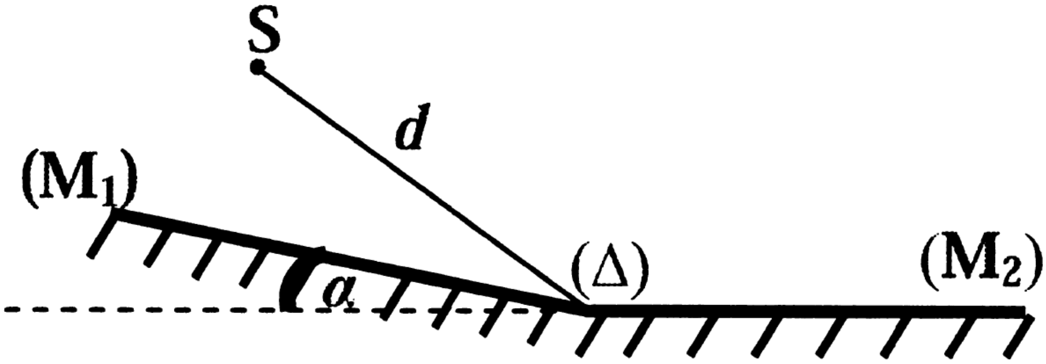


figure 3

A. Lumière monochromatique

La source (laser He-Ne) émet de la lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 632{,}8\,nm$.

15.Exprimer la différence de marche $\delta(x)$ (donner d'abord une expression exacte puis travailler dans la suite au premier ordre en α) et l'intensité lumineuse I dans le plan (E) en fonction de λ_0 , α , d , D , x et I_0 avec $I_{S1} = I_{S2} = I_0$: intensité commune des sources secondaires.

16.Déterminer les expressions littérales et les valeurs numériques de l'interfrange i et de la largeur ℓ du champ d'interférences.

B. Doublet

La source S (lampe spectrale) émet maintenant deux radiations lumineuses de même intensité I_0 et de longueurs d'ondes $\lambda_1 = 577{,}0\,nm$ et $\lambda_2 = 579{,}1\,nm$ (doublet jaune du mercure).

17.Établir l'expression de l'intensité $I(x)$ en un point P de (E) et montrer qu'elle s'écrit sous la forme : $I(x) = 4 I_0 \{1 + \cos[2\pi.\delta(x).f(\lambda_1,\lambda_2)].\cos[2\pi.\delta(x).g(\lambda_1,\lambda_2)]\}$ où l'on définira les fonctions f et g.

L'allure qualitative que pourrait avoir $I(x)$ est représentée sur la *figure* 4.

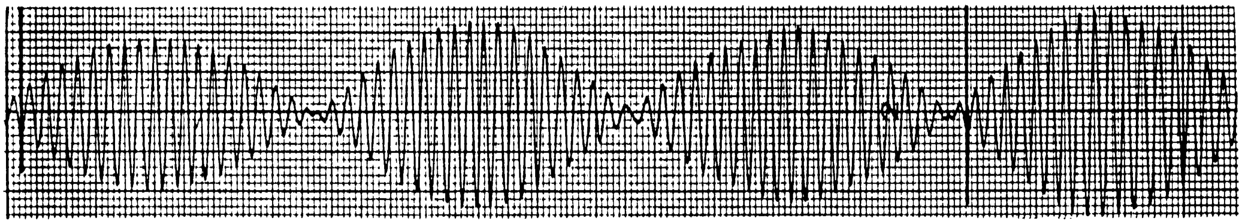


figure **4**

18.Montrer que, en théorie, des mesures sur le graphe de l'enregistrement de $I(x)$ permettraient de déduire les valeurs des deux longueurs d'ondes. Préciser la démarche.

19.Le dispositif étudié ici permet-il effectivement de mesurer λ_1 et λ_2 ? Justifier votre réponse.

Atome

Ce problème propose d'étudier divers modèles de l'atome d'hydrogène.

Données:

Permittivité du vide ε_0 :	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9.10^9\ F\ m^{-1}$
Masse de l'électron :	$m=9{,}1.10^{-31}\ kg$
Charge élémentaire :	$e=1{,}6.10^{-19}\ C$
Célérité de la lumière dans le vide :	$c=3.10^8\ m\ s^{-1}$
Constante de Planck :	$h=6{,}62.10^{-34}\ J.s$
Constante réduite de Planck:	$\hbar=\frac{h}{2\pi}$
Énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène: (avec $1\ eV=1{,}6.10^{-19}\ J$ *)*	$E_i=13{,}6\ eV$

Le rayon de l'atome d'hydrogène sera noté a *dans la suite.*

I. Modèle de Thomson

En 1904, le physicien anglais Sir Joseph John Thomson (1856-1940) propose le modèle suivant pour l'atome d'hydrogène : il est constitué d'une sphère de centre O et de rayon a . La charge positive e de l'atome est répartie uniformément dans le volume intérieur de cette sphère. L'électron ponctuel, de charge : $-e$, se déplace librement à l'intérieur de la sphère ; on repère par M sa position et on note $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ son vecteur position et $\vec{v}$ sa vitesse.

1. Déterminer l'expression vectorielle de la force ressentie par l'électron à l'intérieur de la sphère ? On posera $k=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$.
2. Pourquoi nomme-t-on le modèle de J.J. Thomson « modèle de l'électron élastiquement lié à l'atome »?

Dans l'état d'énergie minimale, l'électron est au repos en O . Dans l'état ionisé, l'électron est à l'infini sans énergie cinétique. L'énergie d'ionisation E_i est l'énergie à fournir pour passer de l'état d'énergie minimale à l'état ionisé.

3. Déterminer l'expression de l'énergie d'ionisation dans ce modèle.
4. Application: en déduire a dans le cadre de ce modèle. Application numérique: calculer a en nm.
5. On suppose qu'à $t=0$ suite à l'excitation de l'atome, on a pour la position initiale de l'électron

$\vec{r}=r_0\vec{u}_x$ (avec $r_0<a$) et pour sa vitesse initiale $\vec{v}=\vec{0}$. Déterminer $\vec{r}(t)$.

6. Donner l'expression de la fréquence ν mise en jeu. Application numérique: calculer ν et la longueur d'onde correspondante.

II. Modèle de Rutherford

Le français (né à Lille) Jean Perrin (1870-1942), le néozélandais Ernest Rutherford (1871-1937) proposent un autre modèle : la charge positive se trouve dans un noyau quasi-ponctuel de charge e situé en O autour duquel gravite l'électron ponctuel de charge $-e$. Le noyau est ici supposé fixe dans un référentiel galiléen propre à l'étude, auquel on associe le repère orthonormé direct (O , $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$).

On envisage une trajectoire circulaire de rayon a pour l'électron correspondant à l'état d'énergie minimale.

7. Pourquoi parle-t-on de modèle planétaire ?

8. Donner l'expression de l'énergie mécanique totale E de l'électron sur sa trajectoire en fonction de e , ε_0 , a .

9. Connaissant la valeur de l'énergie d'ionisation E_i en déduire l'expression de a dans le cadre de ce modèle. Application numérique: calculer a en nm.

10. Est-il raisonnable de ne pas tenir compte de la relativité dans ces calculs? Justifier numériquement.

11. Donner l'expression de la fréquence ν mise en jeu dans l'état fondamental. Application numérique: calculer ν et la longueur d'onde correspondante.

III. Théorie quantique

Une action en physique, pour un système donné, est une grandeur caractéristique de ce système ayant pour unité celle de la constante de Planck. On peut déterminer une action en combinant des paramètres pertinents pour la description des phénomènes physiques en jeu. Un système dont l'action caractéristique admet une valeur proche de $\hbar$, est un système pour lequel on ne peut plus faire abstraction des phénomènes quantiques. Par contre, si sa valeur est très supérieure à $\hbar$, alors l'étude du système relève de la physique classique.

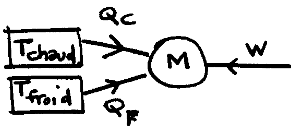
12. Vérifier que la description d'une antenne radio de puissance 1kW émettant à 1 MHz ne relève pas de la physique quantique

13. On considère l'atome d'hydrogène. Son énergie d'ionisation est E_i .La fréquence caractéristique est ν (voir plus haut) . L'atome d'hydrogène relève-t-il de la physique quantique ?

Réponses

Cycle thermodynamique

1) Moteur



convention

donc pour un moteur qui prend de la chaleur à la source chaude, rend de la chaleur à la source froide et fournit du travail :

$$\boxed{\begin{array}{c} Q_C > 0 \\ Q_F < 0 \\ W < 0 \end{array}}$$

---

2)

$$\eta = \frac{\text{travail fourni par le moteur}}{\text{chaleur fournie au moteur par la source chaude}}$$

$$\boxed{\eta = \frac{(-W)}{Q_C}}$$

---

3) 1er principe

$$\boxed{\Delta U_{cycle} = 0 = Q_C + Q_F + W}$$

$$\Delta S_{cycle} = 0 = S^{tr}_{cycle} + S^{P}_{cycle}$$

2ème principe

$$\boxed{\Delta S_{cycle} = 0 = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S^{P}_{cycle}}$$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{-W}{Q_C} \\ &= \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} \\ &= 1 + \frac{Q_F}{Q_C} \end{aligned}$$

avec $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S^{P}_{cycle} = 0$

d'où $\frac{T_F}{T_C} + \frac{Q_F}{Q_C} + \frac{T_F S^{P}_{cycle}}{Q_C} = 0$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} - \frac{T_F S^{P}_{cycle}}{Q_C}}$$

Puisque $\frac{T_F S^{P}_{cycle}}{Q_C}$ est positif, on peut conclure que

$$\boxed{\eta \leq \underbrace{1 - \frac{T_F}{T_C}}_{\eta_{max}}}$$

avec $\eta = \eta_{max}$ si $S^P_{cycle} = 0$ (fonctionnement réversible)

---

4) Relation de Mayer (pour une mole) :

$$\boxed{C_P - C_V = R}$$

Rapport des capacités thermiques molaires

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

donc $\gamma C_V - C_V = R$

$$\boxed{C_V = \frac{R}{\gamma - 1} \qquad C_P = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}}$$

---

5) et pour une masse unité avec les capacités thermiques massiques :
(avec $r = \frac{R}{M_{air}}$)

$$c_V = \frac{r}{\gamma - 1}$$

$$c_P = \frac{r\gamma}{\gamma - 1}$$

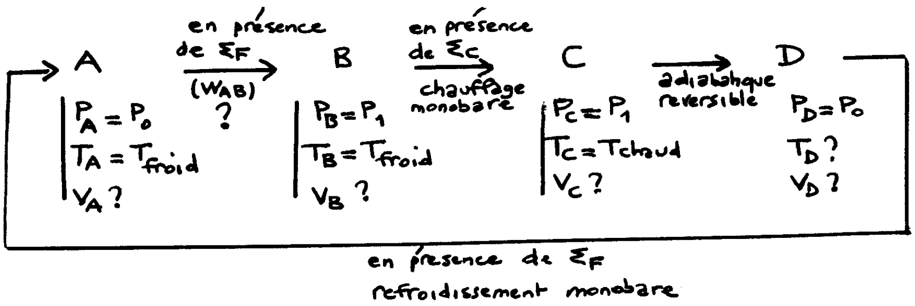
$$du = c_V \, dT$$

$$\boxed{\Delta u = \frac{R}{M_{air}} \frac{1}{\gamma - 1} \Delta T}$$

---

6) de même $dh = c_P \, dT$

$$\boxed{\Delta h = \frac{R}{M_{air}} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \Delta T}$$



7) $P_A V_A = m\, r\, T_A$

$$\boxed{V_A = m \frac{R}{M_{air}} \frac{T_{froid}}{P_0}}$$

A.N. $\quad = 1 \, \dfrac{8,32}{0,029} \, \dfrac{290}{10^5}$

$$\boxed{V_A = 0,832 \ m^3}$$

de même :

$$\boxed{V_B = m \frac{R}{M_{air}} \frac{T_{froid}}{P_1}}$$

A.N. $\quad = 1 \, \dfrac{8,32}{0,029} \, \dfrac{290}{10^6}$

$$\boxed{V_B = 0,0832 \ m^3}$$

et

$$\boxed{V_C = m \frac{R}{M_{air}} \frac{T_{chaud}}{P_1}}$$

A.N. $\quad = 1 \, \dfrac{8,32}{0,029} \, \dfrac{950}{10^6}$

$$\boxed{V_C = 0,273 \ m^3}$$

---

8) La transformation CD est isentropique. On sait que

$$\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = cste$$

démonstration :

$$\underbrace{dH}_{n C_p dT} = T dS + V dP$$

$$dS = n C_p \frac{dT}{T} - \frac{V}{T} dP$$

$$= n C_p \frac{dT}{T} - n R \frac{dP}{P}$$

$$= \frac{nR}{\gamma-1} \left(\gamma \, d\ln T - (\gamma-1) \, d\ln P \right)$$

$$\boxed{S_{(T,P)} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} + S_0}$$

Donc pour une transformation isentropique $\frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}}$ est constant.

Ici $\frac{T_D^\gamma}{P_D^{\gamma-1}} = \frac{T_C^\gamma}{P_C^{\gamma-1}}$

$$\boxed{T_D = T_{chaud} \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

A.N. $= 950 \, (10)^{-\frac{0,4}{1,4}}$

$$\boxed{T_D = 492 \text{ K}}$$

Pour déterminer V_D, on retrouve $PV^\gamma = cste$

$\frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = cste$ avec $T = \frac{PV}{nR}$

$\frac{P^\gamma V^\gamma}{P^{\gamma-1}} = cste$

$$\boxed{PV^\gamma = cste}$$

Ici $P_D V_D^\gamma = P_C V_C^\gamma$

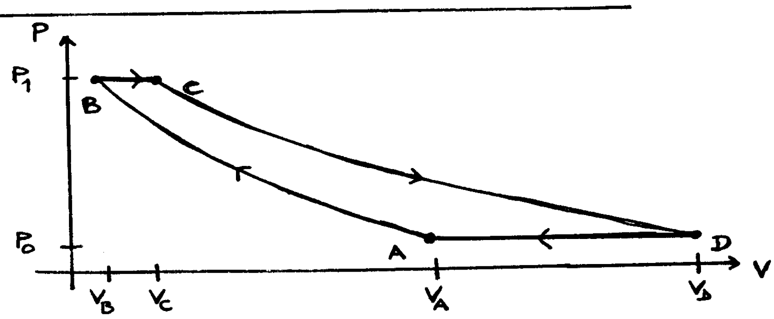
$$\boxed{V_D = V_C \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

A.N. $= 0,273 \, (10)^{\frac{1}{1,4}}$

$$\boxed{V_D = 1,41 \text{ m}^3}$$

---

9)



---

10) BC est une transformation monobare (chauffage par la source chaude)

$$Q_{BC} = m\,\Delta h$$

$$\boxed{Q_{BC} = m\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{R}{M_{air}}\,(T_{chaud} - T_{froid})}$$

$$S^{\acute{e}c}_{BC} = \int_{BC} \frac{\delta Q}{T_{frontière}}$$

$$= \frac{Q_{BC}}{T_{chaud}}$$

$$\boxed{S^{\acute{e}c}_{BC} = m\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{R}{M_{air}}\left(1 - \frac{T_{froid}}{T_{chaud}}\right)}$$

$$\Delta S = m\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{R}{M_{air}}\left(\ln\frac{T_{final}}{T_{initial}} - \frac{(\gamma-1)}{\gamma}\ln\frac{P_{final}}{P_{initial}}\right) \qquad \text{cf } 8)$$

$$\boxed{\Delta S_{BC} = m\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{R}{M_{air}}\,\ln\frac{T_{chaud}}{T_{froid}}}$$

$$S^{P}_{BC} = \Delta S - S^{\acute{e}c}_{BC}$$

$$\boxed{S^{P}_{BC} = m\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{R}{M_{air}}\left(\ln\frac{T_{chaud}}{T_{froid}} + \left(\frac{T_{chaud}}{T_{froid}}\right)^{-1} - 1\right)}$$

A.N.

$$Q_{BC} = 1\,\frac{1{,}4}{0{,}4}\,\frac{8{,}32}{0{,}029}\,(950 - 290)$$

$$\boxed{Q_{BC} = 663 \text{ kJ}}$$

$$S^{\acute{e}c}_{BC} = 663\ 10^3 / 950$$

$$\boxed{S^{\acute{e}c}_{BC} = 698 \text{ J.K}^{-1}}$$

$$S^{P}_{BC} = 1\,\frac{1{,}4}{0{,}4}\,\frac{8{,}32}{0{,}029}\left(\ln\frac{950}{290} + \frac{290}{950} - 1\right)$$

$$\boxed{S^{P}_{BC} = 494 \text{ J.K}^{-1}}$$

---

11) DA est monobare (refroidissement de T_D à T_{froid} en présence de la source froide).

Les réponses sont les mêmes que ci-dessus avec $T_{froid} \longrightarrow T_D$
$T_{chaud} \longrightarrow T_{froid}$)

$$\boxed{Q_{DA} = m\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{R}{M_{air}}\,(T_{froid} - T_D)}$$

$$\boxed{S^{\acute{e}c}_{DA} = m\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{R}{M_{air}}\left(1 - \frac{T_D}{T_{froid}}\right)}$$

$$\boxed{S^{P}_{DA} = m\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{R}{M_{air}}\left(\ln\frac{T_{froid}}{T_D} + \left(\frac{T_{froid}}{T_D}\right)^{-1} - 1\right)}$$

A.N. $Q_{DA} = 1 \, \frac{1{,}4}{0{,}4} \, \frac{8{,}32}{0{,}029} \, (290 - 492)$

$$\boxed{Q_{DA} = -203 \text{ kJ}}$$

$S^{tr}_{DA} = -203 \; 10^3 / 290$

$$\boxed{S^{tr}_{DA} = -700 \text{ JK}^{-1}}$$

$S^{P}_{DA} = 1 \, \frac{1{,}4}{0{,}4} \, \frac{8{,}32}{0{,}029} \left(\ln \frac{290}{492} + \frac{492}{290} - 1 \right)$

$$\boxed{S^{P}_{DA} = 169 \text{ JK}^{-1}}$$

---

12) La transformation CD est adiabatique (pas de transfert d'entropie).
Elle est réversible (pas de création d'entropie)

$$\boxed{S^{tr}_{CD} = 0}$$

$$\boxed{S^{P}_{CD} = 0}$$

---

13) L'énergie interne, pour un gaz parfait, ne dépend que de la température.
Ici $T_B = T_A = T_{froid}$

$\Delta U_{AB} = 0$

$= W_{AB} + Q_{AB}$

$$\boxed{Q_{AB} = -W_{AB}}$$

et

$$\boxed{\Delta S_{AB} = -m \frac{R}{M_{air}} \ln \left(\frac{P_1}{P_0} \right)}$$ (cf 8) et 10))

A.N. $= -1 \, \frac{8{,}32}{0{,}029} \ln 10$

$$\boxed{\Delta S_{AB} = -661 \text{ JK}^{-1}}$$

$S^{P}_{AB} = \Delta S_{AB} - S^{tr}_{AB}$

$= \Delta S_{AB} - \frac{Q_{AB}}{T_{froid}}$

$= \Delta S_{AB} + \frac{W_{AB}}{T_{froid}}$

$$\boxed{S^{P}_{AB} = -m \frac{R}{M_{air}} \ln \left(\frac{P_1}{P_0} \right) + \frac{W_{AB}}{T_{froid}}}$$

remarque :

On pourrait déterminer S^P_{cycle} :

$$S^P_{cycle} = S^P_{BC} + S^P_{CD} + S^P_{DA} + S^P_{AB}$$

Numériquement, on obtiendrait :

$$= 494 + 0 + 169 + \left(-661 + \frac{W_{AB}}{T_{froid}}\right)$$

$$\underset{\mathrm{J\,K^{-1}}}{S^P_{cycle}} = 2{,}0 + \frac{W_{AB}}{T_{froid}}$$

---

14)

$$Q_{froid} = Q_{DA} + Q_{AB}$$

$$= m\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{R}{M_{air}}\left(T_{froid} - T_D\right) - W_{AB}$$

$$\boxed{Q_{froid} = m\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{R}{M_{air}}\left(T_{froid} - T_{chaud}\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) - W_{AB}}$$

---

15)

$$Q_{chaud} = Q_{BC}$$

$$= m\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{R}{M_{air}}\left(T_{chaud} - T_{froid}\right)$$

$$\Delta S_{cycle} = 0$$

$$= \frac{Q_{chaud}}{T_{chaud}} + \frac{Q_{froid}}{T_{froid}} + S^P_{cycle}$$

finalement

$$S^P_{cycle} = m\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{R}{M_{air}}\left(\frac{T_{froid}}{T_{chaud}} - 1\right)$$

$$+ m\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{R}{M_{air}}\left(\frac{T_{chaud}}{T_{froid}}\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right) + \frac{W_{AB}}{T_{froid}}$$

$$\boxed{S^P_{cycle} = \underbrace{m\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{R}{M_{air}}\left(\frac{T_{froid}}{T_{chaud}} + \frac{T_{chaud}}{T_{froid}}\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2\right)}_{\text{indépendant de } W_{AB}} + \underbrace{\frac{W_{AB}}{T_{froid}}}_{\text{proportionnel à } W_{AB}}}$$

---

16) Pour diminuer S^P_{cycle}, il faut diminuer W_{AB}.
(ce qui permettra cf 3) d'augmenter l'efficacité du moteur)

---

17) La compression est isotherme
- elle est très lente pour que la température soit homogène dans le gaz, égale à la température extérieure.
Pas de $\overrightarrow{grad}\,T$ dans le système donc <u>pas d'irréversibilité thermique</u>.
- les équilibres de pression étant bien plus rapides que l'uniformisation des températures, il n'y a pas non plus de $\overrightarrow{grad}\,P$. On néglige tout frottement mécanique. Donc <u>pas d'irréversibilité mécanique</u>.

Cette transformation est <u>réversible</u>

$$W_{AB} = \int_{P_0}^{P_1} - P_{ext}\, dV$$

avec $P_{ext} = P$ (réversibilité)

$$= \int_{P_0}^{P_1} - P\, dV$$

avec $V = \frac{m}{M_{air}} \frac{R}{P} T_{froid}$

$$dV = - \frac{m}{M_{air}} R\, T_{froid} \frac{dP}{P^2}$$

$$= \frac{m}{M_{air}} R\, T_{froid} \int_{P_0}^{P_1} \frac{dP}{P}$$

$$\boxed{W_{AB} = \frac{m}{M_{air}} R\, T_{froid} \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}$$

A.N.

$$= \frac{1}{0{,}029}\, 8{,}32 \cdot 290 \cdot \ln(10)$$

$$\boxed{W_{AB} = 192\ \text{kJ}}$$

---

18)

$$\text{efficacité} = \frac{-W}{Q_{chaud}}$$

$$= 1 + \frac{Q_{froid}}{Q_{chaud}}$$

$$\eta = 1 + \frac{Q_{DA} + Q_{AB}}{Q_{BC}}$$

A.N.

$$= 1 + \frac{-203 - 192}{663}$$

$$\boxed{\eta = 40{,}5\ \%}$$

remarque

A titre indicatif, on peut tester la formule en 3)

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} - \frac{T_F\, S^P_{cycle}}{Q_C}$$

$$\text{avec } S^P_{cycle} = 2{,}0 + \frac{W_{AB}}{T_{froid}}$$

$$= 663 \quad \text{J K}^{-1}$$

$$\eta = \underbrace{1 - \frac{290}{950}}_{69{,}5\%} - \underbrace{\frac{290 \times 663}{663\ 10^3}}_{29{,}0\ \%}$$

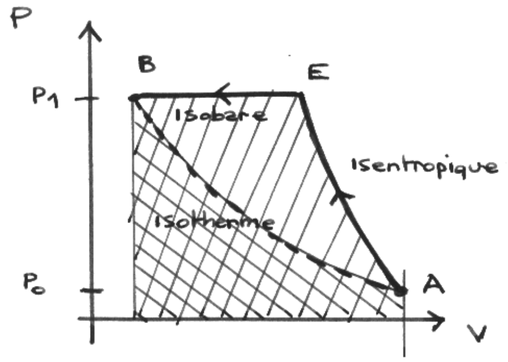
$$\eta = 40{,}5\ \%$$

19) La compression isotherme est, en toute rigueur, infiniment longue. Il faut attendre à chaque fois l'équilibre thermique avec l'extérieur avant de poursuivre la compression.

$$\text{Puissance} = \frac{\text{travail}}{\text{durée}}$$

La puissance du moteur tend vers zéro.

20)



Le travail $\int -PdV$ correspond à : (− Aire) entre la courbe et l'axe des x.

Le travail W_{AB} est donc plus important ici que pour la transformation isotherme (réversible)

---

21)

$$\frac{T_E^{\gamma}}{P_E^{\gamma-1}} = \frac{T_A^{\gamma}}{P_A^{\gamma-1}} \qquad \text{(cf 8))}$$

$$\boxed{T_E = T_{froid}\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

A.N.

$$= 290 \left(\frac{10}{1}\right)^{\frac{0,4}{1,4}}$$

$$\boxed{T_E = 560\ K}$$

---

22)

$$W_{AE} = \Delta U_{AE}$$

$$\boxed{W_{AE} = m\frac{R}{M_{air}}\frac{1}{\gamma-1}T_{froid}\left(\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)}$$

A.N.

$$= 1\ \frac{8{,}32}{0{,}029}\ \frac{1}{0{,}4}\ (560 - 290)$$

$$\boxed{W_{AE} = 194\ kJ}$$

---

23)

$$W_{EB} = \int_{EB} - P_{ext}\, dV$$

$$= -P_1\,(V_B - V_E)$$

$$= -P_1\left(\frac{nRT_{froid}}{P_1} - \frac{nRT_E}{P_1}\right)$$

$$\boxed{W_{EB} = \frac{m}{M_{air}} R\, T_{froid} \left(\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)}$$

A.N. $= 1 \, \frac{8{,}32}{0{,}029} \, (560 - 290)$

$$\boxed{W_{EB} = 77 \text{ kJ}}$$

---

24) $W_{AB} = W_{AE} + W_{EB}$

$$\boxed{W_{AB} = \frac{mR}{M_{air}} \frac{\gamma}{\gamma-1} T_{froid} \left(\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)}$$

A.N.

$$\boxed{W_{AB} = 271 \text{ kJ}}$$

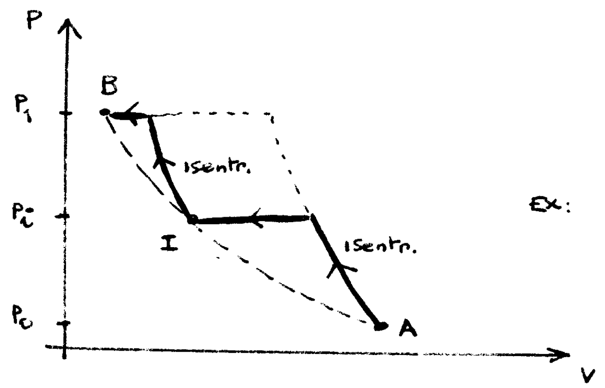
---

25) $\eta = 1 + \frac{-203 - 271}{663}$ cf 18)

$$\boxed{\eta = 28{,}5\%}$$

donc $< 40{,}5\%$ cf 18)

Au lieu d'une compression simple, <u>un compresseur à étages</u> permettrait de se rapprocher de la valeur 40,5%.



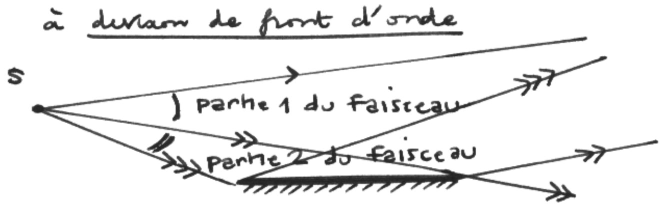
Ex: 2 étages

on cherchera à <u>optimiser</u> la valeur de $P_{intermédiaire}$.

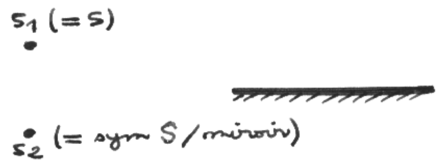
Interférences avec des miroirs plans

1) Miroir de Lloyd

Dispositif à division de front d'onde

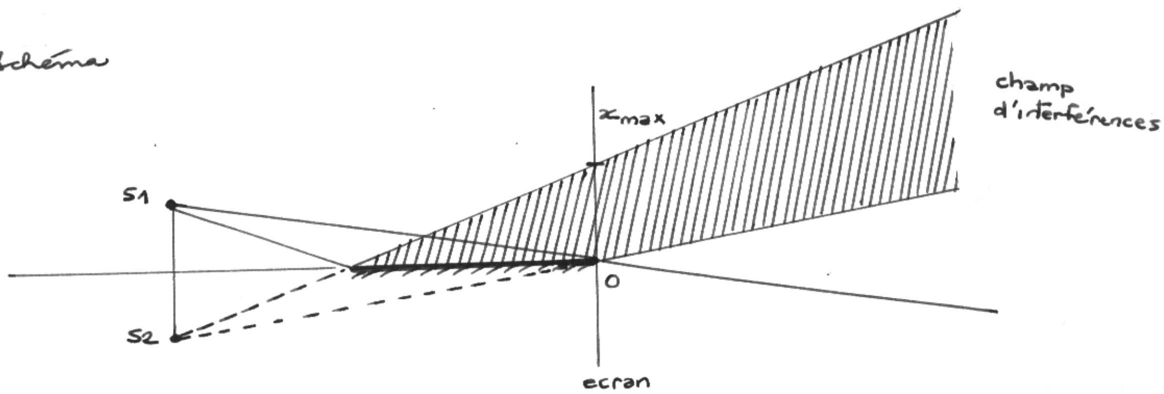


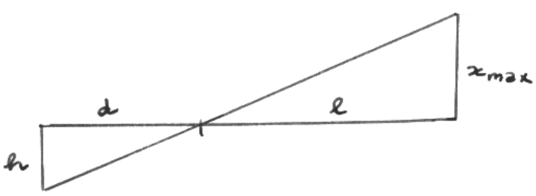
Les sources secondaires:



Les deux faisceaux issus des sources secondaires S_1 et S_2 sont en fait issus de S et possèdent donc la même intensité $I_1 = I_2$.

2) Schéma





homothétie

$$\frac{x_{max}}{l} = \frac{h}{d}$$

$$x_{min} < x < x_{max}$$

$$\boxed{0 < x < \frac{h\,l}{d}}$$

A.N.

$$x_{max} = \frac{10^{-3}\ 0{,}30}{0{,}50}$$

$$\boxed{x_{max} = 0{,}6 \text{ mm}}$$

3) Les sources sont cohérentes

(en fait une seule source S donc S_1 et S_2 reproduisent les mêmes trains d'onde)

Les sources sont synchrones

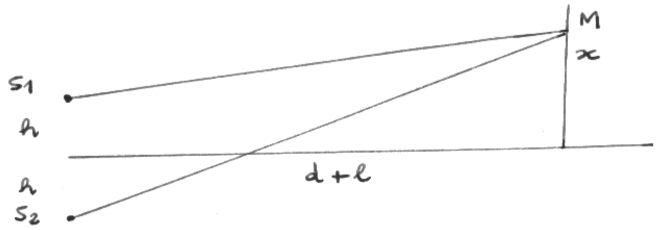
(au sens de : les sources ont la même fréquence)

Les sources sont en opposition de phase

(à cause du déphasage de π au niveau du rayon réfléchi sur le miroir)

---

4)



$$\delta' = \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{n}\,(S_2M - S_1M)$$

$$= \sqrt{(d+l)^2+(x+h)^2} - \sqrt{(d+l)^2+(x-h)^2}$$

$$= (d+l)\left(\sqrt{1+\frac{(x+h)^2}{(d+l)^2}} - \sqrt{1+\frac{(x-h)^2}{(d+l)^2}}\right)$$

avec $\frac{x}{d+l} \ll 1$ (cf x_{max}) et $\frac{h}{d+l} \ll 1$ (cf texte)

donc, au deuxième ordre :

$$= (d+l)\left[1+\frac{1}{2}\frac{(x+h)^2}{(d+l)^2} - \left(1+\frac{1}{2}\frac{(x-h)^2}{(d+l)^2}\right)\right]$$

$$= (d+l)\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{(d+l)^2}\ \underbrace{\left[(x+h)^2-(x-h)^2\right]}_{4xh}$$

$$\boxed{\delta' = \frac{2hx}{(d+l)} \quad (n=1)}$$

on retrouve la formule connue : $\delta' = \frac{ax}{D}$

Pour tenir compte du déphasage de π, on écrit alors :

$$\delta = \delta' + \frac{\lambda}{2}$$

$$\boxed{\delta_{2/1} = \frac{2hx}{d+\ell} + \frac{\lambda}{2}}$$

$$p = \frac{\delta}{\lambda}$$

$$\boxed{p = \frac{2hx}{\lambda(d+\ell)} + \frac{1}{2}}$$

---

5) Intensité (φ est compté positivement pour un retard)

$$\underline{s}_1(M,t) = s_0 \exp j\omega t \qquad I_1 = s_0^2$$

$$\underline{s}_2(M,t) = s_0 \exp j(\omega t - \varphi_{2/1}) \qquad I_2 = s_0^2 = I_1$$

$$\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2$$

$$= s_0 \exp j\omega t \,(1 + \exp -j\varphi_{2/1})$$

$$\underline{s}\,\underline{s}^* = s_0^2 \,(1 + \exp -j\varphi_{2/1})\,(1 + \exp +j\varphi_{2/1})$$

$$= s_0^2\,(1 + 1 + 2\cos\varphi_{2/1})$$

$$= 2 I_1 (1 + \cos\varphi_{2/1})$$

$$\boxed{I(M) = 2 I_1 (1 + \cos 2\pi p)}$$

Donc ici

$$I(x) = 2 I_1 \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi h}{\lambda(d+\ell)}x + \pi\right)\right)$$

$$\boxed{I(x) = 2 I_1 \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi h}{\lambda(d+\ell)}x\right)\right)}$$

En $x=0$

$$\boxed{I(x=0) = 0 \qquad \text{frange sombre}}$$

---

6) L'interfrange correspond à la période du cosinus :

$$\frac{4\pi h\, i}{\lambda(d+\ell)} = 2\pi$$

$$\boxed{i = \frac{\lambda(d+\ell)}{2h}}$$

---

7)

$$\boxed{P_{min}(x=0) = 0{,}5}$$

$$P_{max}(x=x_{max}) = \frac{2h\ x_{max}}{\lambda(d+\ell)} + 0{,}5$$

$$\boxed{P_{max}(x=x_{max}) = \frac{2\ h^2\ \ell}{\lambda\ d(d+\ell)} + 0{,}5}$$

A.N. $$= \frac{2\ (10^{-3})^2\ 0{,}30}{632{,}8\ 10^{-9}\ 0{,}50\ 0{,}80} + 0{,}5$$

$$= 2{,}87$$

Puisque $P_{min} = 0{,}5$, on aura ici

$$N_{\text{fges claires}} = E(P_{max})$$

$$\boxed{N = E\left(\frac{2h^2\ell}{\lambda\ d(d+\ell)} + 0{,}5\right)}$$

---

8) $\longrightarrow$ A.N. $N = E(2{,}87)$

$$\boxed{N = 2}$$

$\longrightarrow$ $$i = \frac{\lambda(d+\ell)}{2h}$$

A.N. $$= \frac{632{,}8\ 10^{-9}\ 0{,}80}{2\ 10^{-3}}$$

$$\boxed{i = 0{,}253\ \text{mm}}$$

$\longrightarrow$ En 4) on a trouvé

$$x = p\,\frac{\lambda(d+\ell)}{2h} - \frac{1}{2}\,\frac{\lambda(d+\ell)}{2h}$$

$$x = p\ i - \frac{1}{2}\ i$$

frange claire $p=1$

$$x_1 = \frac{i}{2}$$

$$\boxed{x_1 = 0{,}127\ \text{mm}}$$

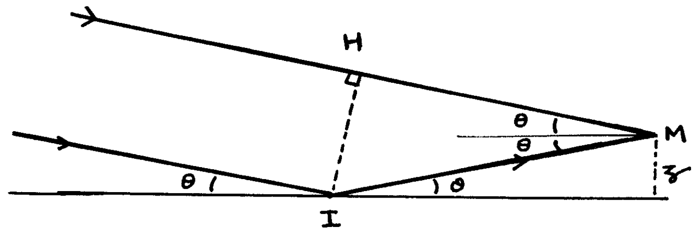
frange claire $p=2$

$$x_2 = \frac{3i}{2}$$

$$\boxed{x_2 = 0{,}380\ \text{mm}}$$

---

9)



H et I se trouvent sur une surface équiphase donc

$$\delta' = \underset{1}{n}\,(IM - \underbrace{HM}_{IM\cos 2\theta})$$

$$= \underbrace{IM}_{\frac{z}{\sin\theta}}\,(1 - \cos 2\theta)$$

$$= \frac{z}{\sin\theta}\,(1 - (1 - 2\sin^2\theta))$$

$$\boxed{\delta' = 2z\sin\theta} \qquad (K = 2)$$

---

10)

$$\delta = 2z\sin\theta + \frac{\lambda}{2}$$

$$\boxed{p = \frac{2z\sin\theta}{\lambda} + \frac{1}{2}}$$

$$I = \frac{I_{max}}{2}\,(1 + \cos 2\pi p)$$

$$\boxed{I_{(z)} = \frac{I_{max}}{2}\left(1 - \cos\frac{4\pi z\sin\theta}{\lambda}\right)}$$

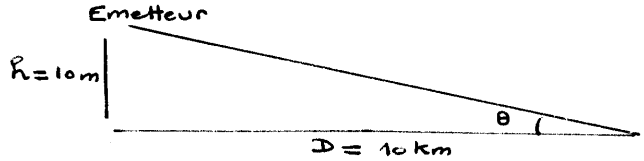
dont la période donne l'interfrange :

$$\frac{4\pi i\sin\theta}{\lambda} = 2\pi$$

$$\boxed{i = \frac{\lambda}{2\sin\theta}}$$

---

11)



→ $\lambda = \frac{c}{f}$

→ on peut faire l'approximation des petits angles

$$\sin\theta = \theta = \frac{h}{D}$$

$$\boxed{i = \frac{Dc}{2hf}}$$

A.N.

$$i = \frac{10^4 \times 3\ 10^8}{2 \times 10 \times 10^8}$$

$$\boxed{i = 1500\ m}$$

---

12) En M, on a un maximum d'interférences pour

$$\underline{z_V = \frac{i}{2} + m\,i} \qquad (m \text{ entier})$$

et un minimum pour

$$\underline{z_N = m\,i}$$

→ Ici minimum (nul) en $z=0$

premier maximum en $z = 750\ m$

La position de l'antenne du bateau est de l'ordre de quelques mètres. On se trouve dans un noeud. Reception quasi-nulle.

→ Avec $h = 700\ m$, on trouve

$$\boxed{i = 21{,}4\ m}$$

Le premier maximum se trouve alors à une hauteur de <u>10,7 m</u>.
Une antenne de réception placée sur un <u>mât de plusieurs mètres</u> permettra une bonne réception

---

13) On reprend la demonstration faite en <u>5)</u> dans le cas où les deux ondes ont des amplitudes différentes :

$$\underline{s_1} = s_{01} \exp j\omega t \qquad \text{avec} \quad I_1 = s_{01}^2$$

$$\underline{s_2} = s_{02} \exp j(\omega t - \varphi) \qquad \text{avec} \quad I_2 = s_{02}^2$$

$$\underline{s} = \underline{s_1} + \underline{s_2}$$

$$\underline{s}\,\underline{s}^* = (\underline{s_1} + \underline{s_2})(\underline{s_1} + \underline{s_2})^*$$

$$= \underline{s_1}\,\underline{s_1}^* + \underline{s_2}\,\underline{s_2}^* + \underline{s_2}\,\underline{s_1}^* + \underline{s_1}\,\underline{s_2}^*$$

$$I = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2}\left(\exp -j\varphi + \exp j\varphi\right)$$

$$\boxed{I_{(z)} = I_2 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\cos\varphi_{(z)}}$$

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$
$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$\mathcal{C} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

$$= \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)}$$

$$\boxed{\mathcal{C} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}}$$

avec $I_2 = R\, I_1$

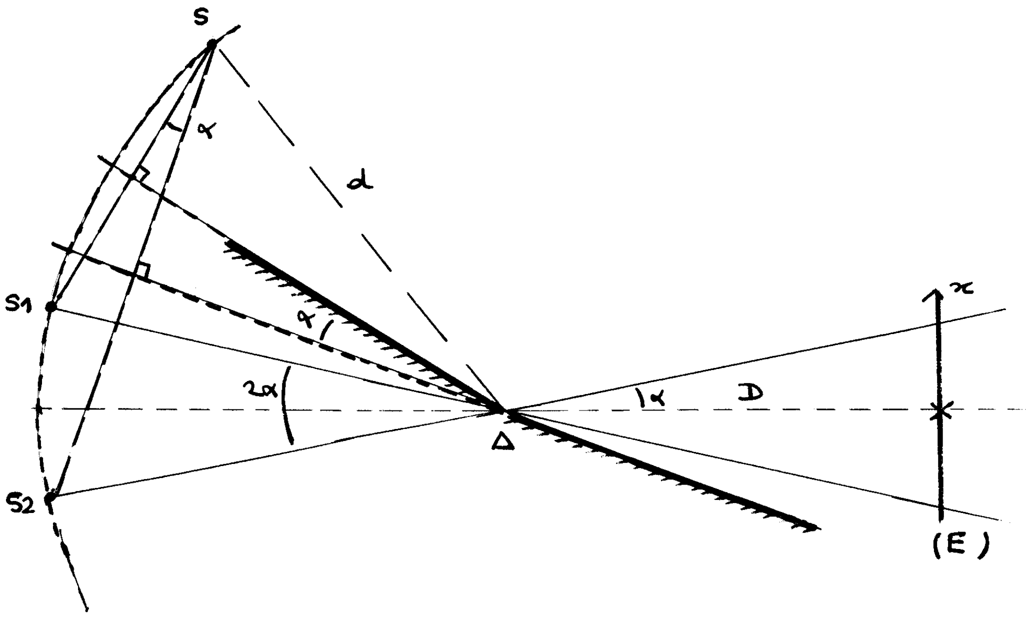
$$\boxed{\mathcal{C} = \frac{2\sqrt{R}}{1 + R}}$$

---

14) A.N. $= \dfrac{2\sqrt{0,8}}{1+0,8}$

$$\boxed{\mathcal{C} = 0,994}$$

$\mathcal{C}$ reste proche du contraste maximal ($\mathcal{C} = 1$)
La perception des ondes est donc bien contrastée.



15) L'angle $S_1 \Delta S_2$ vaut 2α (cf "angle au centre")

Donc $\delta = \dfrac{a\, x}{\text{distance}}$ (l'indice vaut 1)

$$\boxed{\delta = \frac{(2 d \sin\alpha)\ x}{d \cos\alpha + D}}$$

soit au premier ordre en α

$$\boxed{\delta = \frac{2 d \alpha\ x}{d + D}}$$

et

$$\boxed{I_{(x)} = 2 I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\ 2 d\alpha\, x}{(d+D)\,\lambda_0}\right)}$$

---

16) i est la période de $I(x)$

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0 (d+D)}{2 d \alpha}}$$

largeur du champ d'interférence

$$\ell = 2 D \tan\alpha$$

$$\boxed{\ell = 2 D \alpha}$$

A.N. $i = \dfrac{532{,}8\ 10^{-9}\ (0{,}60 + 1{,}40)}{2 \times 0{,}60 \times 3 \dfrac{\pi}{180 \times 60}}$

$$\boxed{i = 1{,}21\ mm}$$

$$\ell = 2 \cdot 1{,}4 \times 3\,\frac{\pi}{180 \times 60}$$

$$\boxed{\ell = 2{,}44\ mm}$$

remarque

$$N_{\text{franges claires}} = 2 \times E\left(\frac{\ell/2}{i}\right) + 1$$
$$= 3$$

---

17)
$$I = I_{\lambda_1} + I_{\lambda_2}$$
$$= 2I_0\left(1 + \cos\left[2\pi\delta(x)\frac{1}{\lambda_1}\right]\right) + 2I_0\left(1 + \cos\left[2\pi\delta(x)\frac{1}{\lambda_2}\right]\right)$$
$$= 2I_0\left(2 + 2\cos\left[2\pi\delta(x)\frac{\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}}{2}\right]\cos\left[2\pi\delta(x)\frac{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}}{2}\right]\right)$$
$$\boxed{I = 4I_0\left(1 + \cos\left(2\pi\delta(x)\frac{\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}}{2}\right)\cos\left(2\pi\delta(x)\frac{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}}{2}\right)\right)}$$

$$f = \frac{\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}}{2} = \frac{\Delta\lambda}{2\,\lambda^2_{moyen}}$$
$$g = \frac{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}}{2} = \frac{1}{\lambda_{moyen}}$$

---

18) L'interfrange est la période du deuxième cosinus avec

$$i = \frac{\lambda_{moyen}}{A}$$

$$\delta = A\,x$$
$$= \frac{2d\alpha}{(d+D)}\,x$$

L'intensité est modulée à cause du premier cosinus. On peut déterminer la distance entre deux coïncidences (c'est la demi-période de ce cosinus)

$$\Delta x_{\text{coïncidence}} = \frac{\lambda^2_{moyen}}{A\ \Delta\lambda}$$

Ces deux mesures donneront λ_{moyen} et $\Delta\lambda$ (donc λ_1 et λ_2)

remarque :

nombre de franges entre deux coïncidences

$$n = \frac{\Delta x}{i} = \frac{\lambda_{moyen}}{\Delta\lambda} = \frac{578}{2,1} = 275$$

19) On voit à peine 3 franges brillantes avec le dispositif. Il sera, pour le moins, difficile d'estimer la période des coïncidences (275 franges...)

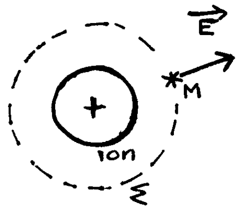
Atome

1) Le champ créé par l'ion (la sphère positive de charge $+e$) est à symétrie sphérique.

$$\vec{E} = E(r)\ \vec{u_r}$$

On le détermine en utilisant le théorème de Gauss.

- pour $r \geq a$ (ce qui ne nous intéresse pas pour cette question)

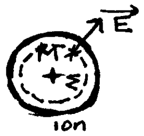


$$\oint_\Sigma \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{q_{intérieure}}{\varepsilon_0}$$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{e}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}_{r \geq a} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \vec{u_r}}$$

- pour $r \leq a$ (ce qui est utile pour la question)



$$\oint_\Sigma \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{q_{intérieure}}{\varepsilon_0}$$

$$E\ 4\pi r^2 = \frac{e\left(\frac{r}{a}\right)^3}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_{r \leq a} = \frac{e\,r}{4\pi\,\varepsilon_0\,a^3}\ \vec{u_r}$$

avec $\vec{r} = r\,\vec{u_r}$

$$\boxed{\vec{E}_{r \leq a} = \frac{e\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\,a^3}}$$

La force sur l'électron (en $r \leq a$) vaut :

$$\vec{F} = q\ \vec{E}$$

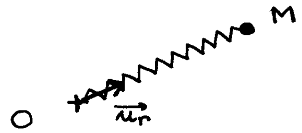
$$= -e\ \vec{E}_{ion}$$

$$= -e\ \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\ \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\ \vec{r}}$$

$$= -\ k\ \vec{r}$$

2)



Si on imagine un point M relié par un ressort à un point fixe, la force subie par M est

$$\vec{f} = -k(\ell-\ell_0)\,\vec{u_r}$$

La force subie par l'électron est la même (dans ce modèle) que s'il était relié au centre de l'ion par un ressort de longueur à vide négligeable. Alors :

$$\vec{f} = -k\,\ell\,\vec{u_r}$$
$$= -k\,\vec{r}$$

---

3) – On a besoin de connaître l'énergie potentielle de l'électron.

On sait que $E_p = q\,V$

$$= -e\,V_{\substack{\text{créé par}\\ \text{l'ion}}}$$

– Potentiel créé par l'ion (le potentiel est pris nul à l'infini)

- $r \geqslant a$ $\quad E = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$dV = -E\,dr$$

$$\boxed{V = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} + \cancel{\text{cste}}}$$

- $r \leqslant a$ $\quad E = \dfrac{e\,r}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$

$$\int_{V(r=a)}^{V(r)} dV = -\int_{r'=a}^{r} \frac{e\,r'dr'}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

$$V - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)$$

$$\boxed{\underset{(r\leqslant a)}{V} = \frac{e}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right)}$$

– Energie totale de l'électron

• énergie pour l'électron en $r=0$

$$\left.\begin{aligned} E_c &= 0 \\ E_p &= -e\,V(r=0) \\ &= -\frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \end{aligned}\right\} \quad E_{\text{minimale}} = -\frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

• énergie pour l'électron à l'infini, au repos

$$\left.\begin{aligned} E_c &= 0 \\ E_p &= -e\,V(r=\infty) \\ &= 0 \end{aligned}\right\} \quad E_{\substack{\infty \\ \text{repos}}} = 0$$

— Expression de l'énergie d'ionisation

$$E_i = E_{\substack{\infty \\ \text{repos}}} - E_{\text{minimale}}$$

$$= 0 - \left(-\frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\right)$$

$$\boxed{E_i = \frac{3\,e^2}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a}}$$

---

4) A.N. $E_i = 13{,}6$ eV

$E_i/_J = (13{,}6 \times e)$

$$a = \frac{3\,e^2}{8\pi\varepsilon_0\,\underbrace{E_i}_{13{,}6\times e}}$$

$$= \frac{3\ .\ 1{,}6\,10^{-19}}{2\,\frac{1}{9\,10^{9}}\ 13{,}6}$$

$$\boxed{a = 0{,}159 \text{ nm}}$$

remarque :

3 fois supérieur au rayon communément admis pour l'atome H

(soit $a = 0{,}53$ Å $= 0{,}053$ nm)

---

5) Le mouvement s'effectue selon l'axe x avec

$$-k\,r = m\ddot{r}$$

$$\ddot{r} + \frac{k}{m}\,r = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\nu$

$$\boxed{r = r_0 \cos(\omega_0 t)}$$

---

6)

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m a^3}}}$$

A.N. $$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(1{,}6\ 10^{-19})^2\ 9{,}10^9}{9{,}1\ 10^{-31}\ (0{,}159\ 10^{-9})^3}}$$

$$\boxed{\nu = 1{,}27\ 10^{15}\ \text{Hz}}$$

correspondant à

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$\boxed{\lambda = 0{,}237\ \mu\text{m} \quad (\text{U.V.})}$$

---

7) modèle planétaire : l'électron tourne autour du noyau comme les planètes tournent autour du soleil

---

8)

$$E = E_c + E_p$$

avec $E_p = qV$

$= -e\,V$

↳ créé par charge ponctuelle $+e$

$$= -e\,\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

De plus le principe fondamental, en projection sur $\overrightarrow{u_r}$

donne
$$\frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = -\frac{mv^2}{a}$$

soit
$$-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = -mv^2$$
$$E_p = -2E_c$$

finalement
$$E = E_c + E_p$$
$$= -\frac{E_p}{2} + E_p$$
$$E = \frac{E_p}{2} \quad (= -E_c)$$
$$\boxed{E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}}$$

---

9) L'énergie d'ionisation est
$$E_i = E_{\infty\,\text{repos}} - E_{\text{trajectoire}}$$
$$= 0 - \left(-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\right)$$
$$\boxed{E_i = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}}$$

A.N.
$$a = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 E_i}$$
(1/3 du résultat de 4))
$$\boxed{a = 0{,}053 \text{ nm}}$$

---

10) Calculons la vitesse de l'électron dans ce modèle
$$E_c = E_i$$
(cf calculs précédents)
$$v = \sqrt{\frac{2E_i}{m}}$$
$$= \sqrt{\frac{2 \times 13{,}6 \times 1{,}6\ 10^{-19}}{9{,}1\ 10^{-31}}}$$
$$\boxed{v = 2{,}2\ 10^6 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{v \ll c}$$

on peut donc ne pas tenir compte de la relativité dans ces calculs.

$$\frac{v}{c} = 7\ 10^{-3} \ll 1$$

---

11) Fréquence de rotation pour l'électron :

$$v = a\omega$$

donc
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\boxed{\nu = \frac{v}{2\pi a}}$$

$$\boxed{\nu = 6{,}57\ 10^{15}\ \mathrm{Hz}}$$

et
$$\lambda = c/\nu$$

$$\boxed{\lambda = 45{,}6\ \ 10^{-9}\ \mathrm{nm}\ (UV)}$$

---

12) $\hbar$ est une action de référence (en J.s)

Ici $P = 1\ \mathrm{kW}$ (dimension: $\frac{[\text{énergie}]}{T}$)

$\nu = 1\ \mathrm{MHZ}$ (dimension: $\frac{1}{T}$)

donc $\frac{P}{\nu^2}$ (dimension: [énergie] . T) est une action.

$$\boxed{\text{action} = \frac{P}{\nu^2}}$$

A.N. $$= \frac{10^3}{(10^6)^2}$$

$$= \underset{\text{J.s.}}{10^{-9}} \gg \hbar \quad \hookrightarrow \simeq 10^{-34}$$

L'étude de l'antenne ne relève pas de la mécanique quantique.

---

13) atome : $E_i = 13{,}6 \text{ eV}$

$= 2{,}2\ 10^{-18} \text{ J}$

$\nu \simeq 10^{15} \text{ Hz}$

$$\boxed{\text{action} = \frac{E_i}{\nu}}$$

A.N. $\simeq \dfrac{10^{-18}}{10^{15}}$

$\simeq 10^{-33} \text{ J.s}$

$\simeq \hbar \quad (10^{-34} \text{ J.s})$

<u>L'étude de l'atome relève bien de la physique quantique.</u>