

# DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

**calculatrice: autorisée**

**durée: 4 heures**

## Sujet

<u>Mécanique:</u>	
<u>disque roulant sur un plan horizontal</u> .....	2
I. <u>Première phase du mouvement</u> .....	2
II. <u>Deuxième phase du mouvement</u> .....	3
<u>Électronique:</u>	
<u>filtrage</u> .....	4
I. <u>Fonction de transfert</u> .....	4
II. <u>Exemple du RLC série</u> .....	4
III. <u>Réponse à une entrée sinusoïdale</u> .....	5
IV. <u>Réponse à une entrée triangulaire</u> .....	5
<u>Ondes:</u>	
<u>cavité laser</u> .....	7
I. <u>Cavité avec miroirs parfaits</u> .....	7
II. <u>Cavité avec miroirs non parfaits</u> .....	7
<u>Gravitation:</u>	
<u>divers</u> .....	10
I. <u>Généralités</u> .....	10
II. <u>Mouvement dans un tunnel</u> .....	10
III. <u>Cavité sphérique vide dans la terre</u> .....	10
IV. <u>Navette spatiale</u> .....	10
V. <u>Impesanteur</u> .....	11

## Mécanique: disque roulant sur un plan horizontal

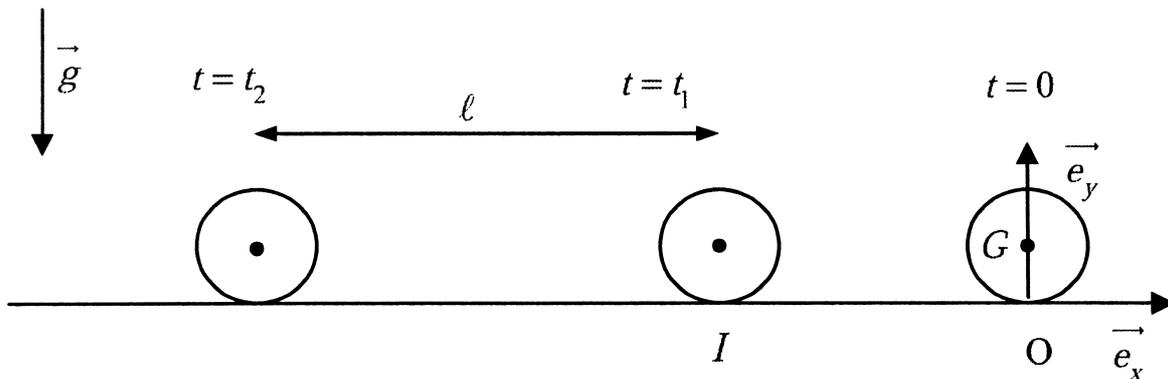
Soit un référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe un repère cartésien orthonormé direct  $Oxyz$ ,  $Oy$  étant vertical, les vecteurs unitaires correspondant aux 3 axes sont notés  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$ ,  $\vec{u}_z$ .

Soit un disque homogène pesant de masse  $m$ , de rayon  $r$  et d'épaisseur négligeable devant  $r$ . Le centre d'inertie du disque est noté  $G$ ; le moment d'inertie du disque relativement à un axe perpendiculaire au plan de celui-ci passant par  $G$  est  $J = \frac{1}{2} m r^2$ .

Dans la suite du problème, on va considérer le mouvement de ce solide dans le plan  $xOy$ . Initialement, ce disque est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe passant par  $G$  et dirigé suivant  $\vec{u}_z$ : on pose donc  $\vec{\Omega} = \omega_0 \vec{u}_z$ ,  $\vec{\Omega}$  désignant ainsi le vecteur vitesse de rotation instantanée du disque à l'instant  $t=0$  ( $\omega_0 > 0$ ). Dans ces conditions, le disque est déposé sur le plan horizontal  $zOx$ , il s'ensuit un mouvement de roulement avec glissement s'effectuant dans le plan  $xOy$ , dans le sens contraire à celui de l'axe  $Ox$ .

On note  $X = X(t)$  l'abscisse du point  $G$  à un instant quelconque [ on supposera  $X(0) = 0$ ;  $\frac{dX}{dt}(0) = 0$  ].

Le coefficient de frottement du disque sur le plan est  $f$ . On notera  $\vec{R}_I = T \vec{u}_x + N \vec{u}_y$ , l'action du plan sur le disque, action s'appliquant au point de contact  $I$  ( voir schéma ).



### I. Première phase du mouvement

1. Exprimer, en fonction de  $r$ ,  $\omega_0$ ,  $\vec{u}_x$ , la vitesse de glissement initiale du disque sur le plan; en déduire le signe de  $T$  au départ.
2. On note  $\omega = \omega(t)$  la vitesse de rotation du disque à un instant quelconque  $t > 0$ . Donner l'expression de  $\vec{\sigma}_G$ , moment cinétique barycentrique du disque. Par application du théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique en  $G$ , établir une relation liant  $m$ ,  $r$ ,  $T$  et  $\frac{d\omega}{dt}$ .

3. En projetant la résultante dynamique du disque sur les vecteurs  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ , donner les expressions de  $N$  et  $T$  en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $\frac{d^2 X}{dt^2}$ .
4. Compte tenu du fait que le mouvement s'effectue avec glissement et compte tenu de la question 1, déduire l'expression de l'accélération du centre de masse  $G$ .
5. Déterminer les expressions de  $\frac{dX}{dt}$ ,  $X$ ,  $\frac{d\omega}{dt}$ ,  $\omega$  en fonction du temps.
6. Déterminer l'expression de la vitesse de glissement à un instant  $t$ . Celle-ci s'annule à l'instant  $t_1$  dont on déterminera l'expression.
7. Préciser les valeurs de  $\frac{dX}{dt}(t_1)$  et  $\omega(t_1)$ .

## II. Deuxième phase du mouvement

8. Pour  $t > t_1$  on suppose que le mouvement s'effectue sans glissement. Donner la relation de roulement sans glissement liant  $r$ ,  $\frac{dX}{dt}$ ,  $\omega$ .
  9. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique à un instant  $t$  quelconque avec  $t > t_1$  en fonction de  $m$ ,  $\frac{dX}{dt}$ .
  10. Expliquer pourquoi cette énergie demeure constante au cours de cette phase du mouvement.
  11. De l'instant  $t_1$  à un instant  $t_2 > t_1$  le centre de masse se déplace d'une longueur  $\ell$ . Déterminer l'expression de  $t_2 - t_1$  en fonction de  $\ell$ ,  $r$ ,  $\omega_0$ .
-

# Électronique: filtrage

## I. Fonction de transfert

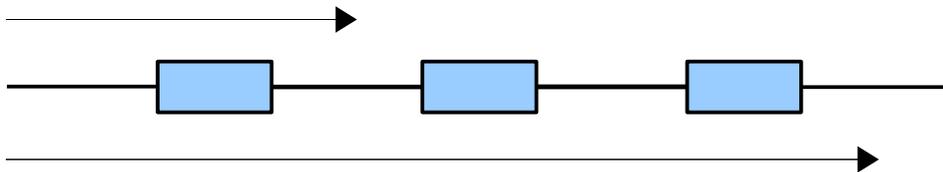
On considère un filtre de fonction de transfert : 
$$\underline{H}(p) = \frac{H_0}{1 + Q\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)}$$
, de pulsation propre  $\omega_0$  (correspondant à une fréquence propre  $f_0 = 2\text{kHz}$ ), de coefficient de qualité  $Q = 10$ . On prendra  $H_0 = 10$ . La notation  $p$  désigne ici  $p = j\omega$  avec  $\omega$  pulsation du signal (correspondant à une fréquence du signal notée  $f$ ).

1. Rappeler les unités dans le système international de  $\omega$ , de  $f$  et donner la relation entre  $\omega$  et  $f$ .
2. Écrire la fonction de transfert en fonction de  $H_0$ ,  $Q$ ,  $f_0$ ,  $f$ .
3. Déterminer le comportement en HF (haute fréquence) et en BF (basse fréquence) du filtre pour en déduire si le filtre est passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande.
4. On pose  $\underline{H} = G(f) \exp(j\varphi(f))$  avec  $G(f) > 0$  (gain). Donner l'expression de  $G(f)$ ,  $\tan(\varphi(f))$  et  $\cos(\varphi(f))$ .

## II. Exemple du RLC série

On se propose de vérifier qu'un filtre RLC série permet de retrouver le même comportement en fréquence.

5. On envisage trois résistances placées en série:  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  alimentées par une tension d'entrée continue  $U_e$ . On veut déterminer la tension de sortie  $U_s$  aux bornes de  $R_1$ . Démontrer avec soin l'expression de cette tension et retrouver ainsi la formule dite « des diviseurs de tension ».



6. En partant de la loi d'Ohm en convention récepteur pour une bobine  $u = L \frac{di}{dt}$  et pour un condensateur  $i = C \frac{du}{dt}$ , retrouver en justifiant, l'expression des impédances complexes pour une bobine et pour un condensateur. (On travaille avec les grandeurs complexes associées et on montre qu'une dérivée se transforme symboliquement en une multiplication par  $p$ ).
7. Retrouver alors, en utilisant les résultats des deux questions précédentes, pour un RLC série aux bornes de  $R$ , l'expression de la fonction de transfert.

8. En travaillant par identification avec 
$$\underline{H}(p) = \frac{H_0}{1 + Q\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)}$$
 déterminer  $H_0$ ,  $Q$  et  $\omega_0$  en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $C$ .

### III. Réponse à une entrée sinusoïdale

On envoie sur le filtre étudié au départ un signal sinusoïdal  $\underline{u}_e(t) = U_{max} \exp(j 2 \pi f_e t)$  avec  $U_{max} = 1,0 V$ .

9. Déterminer la tension de sortie  $u_s(t)$  dans le cas  $f_e = f_0 = 2 kHz$  (A.N.: Calculer l'amplitude) et tracer sur le même graphe l'allure de  $u_s(t)$  et de  $u_e(t)$ .
10. On se place dans le cas  $f_e = 20 kHz$ . On supposera que l'on peut faire ici l'approximation  $\frac{f_e}{f_0} \gg 1$ .

- Quelle est alors l'expression approchée du gain  $G$ . Montrer que la phase  $\varphi$  a une valeur proche de  $-\frac{\pi}{2}$ .
- La fonction de transfert se comporte alors comme  $\underline{H}(p) = \frac{1}{\tau p}$ . Donner la dimension de  $\tau$ . Exprimer  $\tau$  en fonction de  $H_0$ ,  $Q$ ,  $\omega_0$ . Calculer la valeur numérique de  $\tau$ .
- Déterminer la tension de sortie  $u_s(t)$  en utilisant l'expression approchée de la fonction de transfert (A.N.: Calculer l'amplitude). Tracer sur le même graphe l'allure de  $u_s(t)$  et de  $u_e(t)$ .

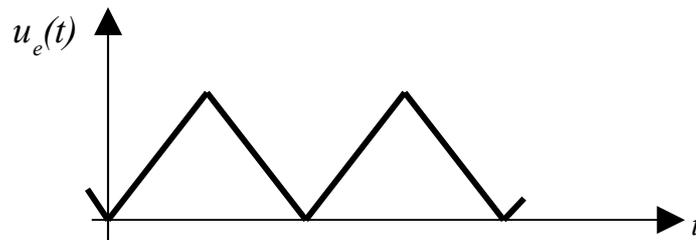
11. On se place dans le cas  $f_e = 0,10 kHz$ . On supposera que l'on peut faire ici l'approximation  $\frac{f_e}{f_0} \ll 1$ .

- Justifier que la fonction de transfert se comporte alors comme  $\underline{H}(p) = \tau' p$ .
- Exprimer  $\tau'$  en fonction de  $H_0$ ,  $Q$ ,  $\omega_0$ . Calculer la valeur numérique de  $\tau'$ .
- Déterminer la tension de sortie  $u_s(t)$  en utilisant l'expression approchée de la fonction de transfert (A.N.: Calculer l'amplitude). Tracer sur le même graphe l'allure de  $u_s(t)$  et de  $u_e(t)$ .

### IV. Réponse à une entrée triangulaire

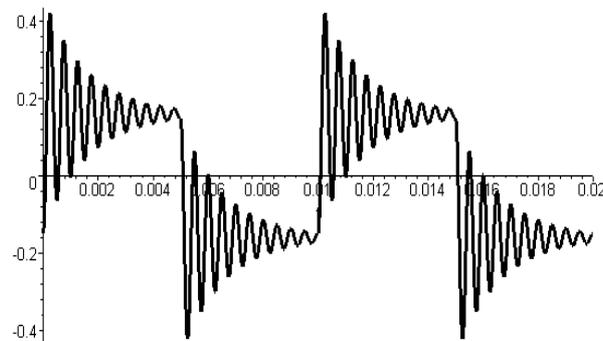
On envoie sur le filtre une tension triangulaire  $u_e(t)$  variant entre 0 et  $E_0$  de fréquence  $f_e$  avec  $E_0 = 10 V$ . On donne la décomposition en série de Fourier de cette tension:

$$\underline{u}_e(t) = E_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2*i+1)^2} \exp(j 2 \pi (2*i+1) f_e t) \right).$$



12. Quelle est la valeur moyenne de ce signal notée  $\langle u_e(t) \rangle$  ou tension continue dans ce signal. Quel traitement le filtre étudié va-t-il opérer sur cette tension continue? Justifier. On pourra penser à représenter  $e_{alt}(t) = u_e(t) - \langle u_e(t) \rangle$  et donner l'expression littérale de  $e_{alt}(t)$  entre  $t=0$  et  $t=1/(2f_e)$  (fonction affine).
13. On étudie le cas  $f_e = 2\text{kHz}$ . Justifier que le filtre ne laisse passer que le fondamental et déterminer le signal  $u_s(t)$  (et A.N.) obtenu en sortie.
14. On étudie le cas  $f_e = 20\text{kHz}$ . Pourquoi est-il possible d'utiliser ici la fonction de transfert approchée  $\underline{H}(p) = \frac{1}{\tau p}$ . En déduire que la tension de sortie vérifie:  

$$u_s(t) - u_s(t=0) = \frac{1}{\tau} \int_{t=0}^t e_{alt}(t_1) dt_1$$
 On donne  $u_s(t=0) = 0$ . Déterminer  $u_s(t = \frac{1}{4f_e})$ .  
 Tracer l'allure de  $u_e(t)$ ,  $e_{alt}(t)$  et  $u_s(t)$  sur un même graphe et donner la valeur numérique de l'amplitude crête à crête (entre deux sommets) de  $u_s(t)$ .
15. On étudie le cas  $f_e = 100\text{Hz}$ . On obtient la courbe suivante:



Pourquoi n'est-il pas possible d'utiliser ici la fonction de transfert approchée  $\underline{H}(p) = \tau' p$ . Quelle est, sans faire alors aucune approximation, l'équation différentielle du deuxième ordre entre  $u_s(t)$  et  $u_e(t)$ . Retrouver la solution particulière (avec second membre) de cette équation différentielle entre  $t=0$  et  $t = \frac{1}{2f_e}$ . Le résultat obtenu est-il conforme au graphe fourni?

## Ondes: cavité laser

Données:

- La vitesse de la lumière dans le vide est notée  $c=3,00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ .
- Coefficient de réflexion et de transmission en amplitude: lorsque une onde lumineuse de signal  $\underline{E}_i(x, t)$  rencontre une interface en  $x=x_0$ , elle donne naissance à une onde réfléchie  $\underline{E}_r(x, t)$  et une onde transmise  $\underline{E}_{tr}(x, t)$  vérifiant  $\underline{E}_r(x_0, t)=r \underline{E}_i(x_0, t)$  et  $\underline{E}_{tr}(x_0, t)=t \underline{E}_i(x_0, t)$
- Rappel mathématique: pour tout complexe  $z$  vérifiant  $|z|<1$  on a  $\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z}$
- Pour les applications numériques, on prendra :  $d=30 \text{ cm}$  et  $R=98\%$

### I. Cavité avec miroirs parfaits

On considère le système optique constitué de deux miroirs plans parfaitement réfléchissants, parallèles entre eux, distants de  $d$ . Le premier miroir est en  $x=0$  et le second en  $x=d$ . Une onde lumineuse monochromatique se propage entre les deux miroirs dans la direction orthogonale aux miroirs avec une célérité  $c$ . L'onde se réfléchit successivement sur les deux miroirs. On note l'onde totale:  $\underline{E}(x, t)=E_0 \exp j(\omega t - kx) + \underline{E}'_0 \exp j(\omega t + kx)$ . On suppose  $E_0$  connu, grandeur réelle. On désigne par  $\omega$  la pulsation et par  $k$  le module du vecteur d'onde.

1. Rappeler la relation entre  $\omega$ ,  $k$  et  $c$ .
2. Commenter la signification physique des deux termes dans l'écriture proposée pour l'onde dans la cavité.
3. L'onde doit être nulle en  $x=0$  à tout instant. Quelle grandeur peut-on alors déterminer? Donner l'expression réelle, après simplification de  $E(x, t)$ .
4. L'onde doit être nulle aussi en  $x=d$  à tout instant. En déduire les valeurs possibles pour  $k$  en fonction d'un nombre entier  $n$ .
5. En déduire que seules certaines fréquences sont admissibles dans cette cavité. Donner les valeurs possibles. Ce sont les fréquences des modes de la cavité.
6. Déterminer l'intervalle de fréquence  $\Delta \nu_C$  entre deux modes de la cavité. Application numérique: calculer  $\Delta \nu_C$  en  $\text{GHz}$ .
7. Représenter graphiquement sur le même graphe (avec  $0 < x < d$ ) les amplitudes en fonction de  $x$  des trois premiers modes.
8. Calculer  $n$  pour la longueur d'onde  $\lambda=633 \text{ nm}$  (laser hélium-néon). Quelle est la couleur correspondant à cette radiation?

### II. Cavité avec miroirs non parfaits

Les miroirs ne sont pas parfaitement réfléchissants. On note  $r$ , supposé réel, le facteur de réflexion en amplitude,  $\tau$  le facteur de transmission en amplitude et  $R=r^2$  le facteur de réflexion en intensité de chacun des miroirs ( $R < 1$ ). Pour quelque raison que ce soit, une onde de fréquence  $\nu$  prend naissance dans la cavité. On l'écrit  $\underline{E} = E_0 \exp(j\omega t)$  en  $x=0$ . L'onde est une onde plane qui se propage vers l'autre miroir, situé en  $x=d$ , puis qui se réfléchit et se transmet partiellement et successivement sur chaque miroir.

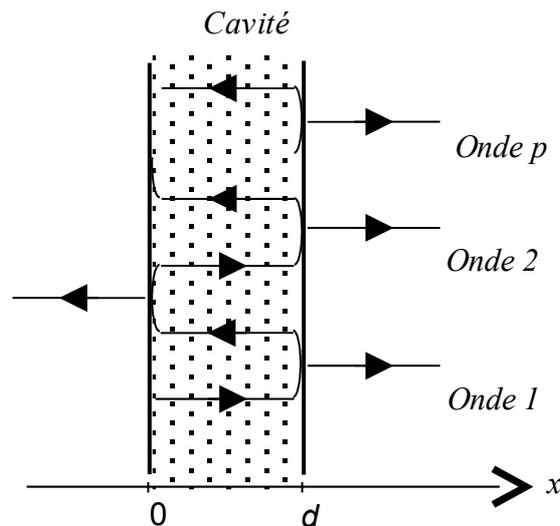
9. Quelles seraient les valeurs de  $r$  et de  $\tau$  dans le cas d'un miroir parfaitement réfléchissant.

On se place du côté  $x > d$  et on repère les ondes émergent successivement de la cavité.

10. Donner l'expression de la première onde  $\underline{E}_1(x, t)$  transmise en  $x > d$  en fonction de  $E_0$ ,  $\tau$ ,  $k$ ,  $\omega$ ,  $t$ ,  $x$ .

11. Donner l'expression de la deuxième onde  $\underline{E}_2(x, t)$  transmise en  $x > d$  en fonction de  $E_0$ ,  $\tau$ ,  $r$ ,  $k$ ,  $\omega$ ,  $t$ ,  $x$ ,  $d$ . Quelle est la relation entre  $\underline{E}_2(x, t)$  et  $\underline{E}_1(x, t)$ . Le déphasage retard de  $\underline{E}_2(x, t)$  par rapport à  $\underline{E}_1(x, t)$  est noté  $\Phi$ . Quelle est l'expression de  $\Phi$  ?

12. Exprimer finalement  $\underline{E}_p(x, t)$  en fonction de  $\underline{E}_1(x, t)$  et des autres données.



*Réflexions et transmissions successives  
d'une onde lumineuse.*

*Les décalages transversaux sont fictifs et  
ont pour seul but de faciliter la lecture*

13. Le système ne fonctionne de façon satisfaisante que si les ondes transmises à la sortie du miroir peuvent interférer de manière constructive. Quelle condition  $\Phi$  doit-il remplir. Quelle est la fréquence des ondes susceptibles d'être émises avec une amplitude maximale ?

14. En additionnant toutes les ondes transmises  $x > d$ , déterminer l'expression, après simplification, de l'onde émergente  $\underline{E}_p(x, t)$ .

On s'intéresse à l'intensité  $I$  de l'onde lumineuse. Elle est proportionnelle à l'amplitude au carré. On prendra comme définition ici, en laissant tomber ce facteur de proportionnalité:  $I = \underline{E} \underline{E}^*$  où  $\underline{E}^*$  désigne le complexe conjugué de  $\underline{E}$ .

15. Quelle est l'intensité de l'onde initiale  $\underline{E} = E_0 \exp(j\omega t)$ . On la désignera par  $I_0$ .
16. Montrer que l'intensité de l'onde émergente peut s'écrire sous la forme  $I = I_{max} \frac{1}{1 + m \sin^2(\Phi/2)}$  et exprimer  $m$  en fonction de  $R$ . Application numérique: calculer  $m$ .
17. Donner avec soin l'allure du tracé de  $\frac{I}{I_{max}}$  en fonction de  $\Phi$  ( ceci revient aussi à tracer  $\frac{I}{I_{max}}$  en fonction de la fréquence  $\nu$  ). Préciser la hauteur des maxima et des minima. Application numérique.
18. Déterminer  $\Delta\Phi_{1/2}$  la largeur à mi-hauteur des pics d'intensité et  $\Delta\nu_{1/2}$  ( puisque  $m \gg 1$  on peut supposer  $\Delta\Phi_{1/2} \ll 1$  ). Pour faire le calcul, travailler sur le premier pic, au voisinage de  $\Phi = 0$ . Application numérique: calculer  $\Delta\nu_{1/2}$ .
19. Calculer  $\frac{\Delta\nu_{1/2}}{\Delta\nu_C}$ . Que peut-on en déduire ?
-

# Gravitation: divers

## I. Généralités

Dans tout le problème, la Terre est assimilée à un corps sphérique homogène de rayon  $R$ , de centre  $O$  et de masse volumique homogène  $\rho$ . On néglige tous les effets de la rotation de la terre sur elle-même et on se place dans le référentiel géocentrique que l'on supposera galiléen. On désigne par  $G$  la constante universelle de gravitation de Newton.

1. Donner l'expression de la masse de la terre  $M$ .
2. En partant d'analogies électrostatiques que l'on précisera avec soin, retrouver le théorème de Gauss gravitationnel.
3. En justifiant par les symétries et les invariances, que peut-on dire quant au champ gravitationnel, noté  $\vec{G}(P)$ , créé par la terre, en un point  $P$ .
4. Démontrer alors l'expression de  $\vec{G}(P)$  pour  $r > R$  (utiliser  $M$  pour exprimer le résultat)
5. Démontrer l'expression de  $\vec{G}(P)$  pour  $r < R$  (utiliser  $\rho$  pour exprimer le résultat)

## II. Mouvement dans un tunnel.

Un tunnel cylindrique d'axe  $Ox$  traverse la terre en passant par le centre  $O$  de la terre. On suppose que le tunnel ne modifie pas le champ de gravitation dans la terre. Un mobile ponctuel  $P$  de masse  $m$  est abandonné sans vitesse initiale en  $P_0$  tel que  $\overrightarrow{OP_0} = R\vec{u}_x$ . On suppose que le mobile se déplace sans frottement dans le tunnel.

6. Déterminer  $x(t)$  en utilisant le principe fondamental. Donner l'expression de la période du mouvement.

## III. Cavité sphérique vide dans la terre.

On suppose qu'existe au sein de la terre une cavité sphérique vide de centre  $O'$  (différent de  $O$ ) et de rayon  $R'$  avec  $R' < R$ . On donne  $\overrightarrow{OO'} = D\vec{u}_x$ . La masse volumique (de la partie non vide) est désignée par  $\rho$ . Cette répartition crée le même champ que deux sphères homogènes: l'une de masse  $\rho$  et l'autre de masse  $-\rho$ .

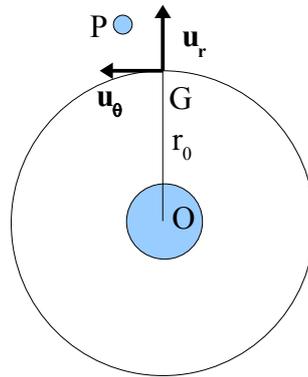
7. Démontrer l'expression du champ de gravitation en tout point  $P$  à l'intérieur de la cavité sphérique vide.

## IV. Navette spatiale

Une navette spatiale assimilée à un point  $G$  décrit une orbite circulaire de rayon  $r_0$  autour de la terre dans un plan  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ .

8. Démontrer l'expression donnant la vitesse angulaire  $\Omega_0$  du satellite avec  $\vec{\Omega}_0 = \Omega_0 \vec{u}_z$ .

## V. Impesanteur



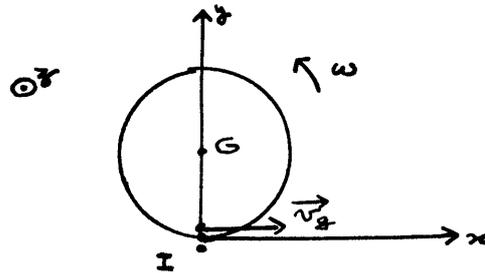
Une navette spatiale est en orbite circulaire autour de la terre. La navette contient dans la soute un satellite  $P$  ( de masse  $m$  assimilé à un point matériel ) libéré de ses fixations afin de le préparer au lancement. Le satellite est dit en état d'impesanteur. On veut étudier le mouvement du satellite dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié à la navette. Ce référentiel a pour origine  $G$  ( le centre de masse de la navette) et des axes liés à la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  (voir figure). On a  $\vec{GP} = x\vec{u}_r + y\vec{u}_\theta + z\vec{u}_z$  et  $\vec{OP} = r_0\vec{u}_r + \vec{GP}$  .

9. Quelles sont les forces qui s'exercent dans  $\mathcal{R}$  sur le point matériel  $P$  . Donner leur expression vectorielle en fonction de  $G$  ,  $m$  ,  $M$  ,  $r_0$  ,  $\vec{OP}$  ,  $\|\vec{OP}\|$  ,  $z$  ,  $\vec{u}_z$  et  $\vec{v}$  ( vitesse de  $P$  dans  $\mathcal{R}$  )

10. Écrire les équations différentielles du mouvement en  $x$  ,  $y$  ,  $z$  en utilisant la notation  $\Omega_0$  ( on a  $\frac{x}{r_0} \ll 1$  ,  $\frac{y}{r_0} \ll 1$  et  $\frac{z}{r_0} \ll 1$  ).

Réponses

## Mécanique



1) Vitesse de glissement :

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_{\text{glissement}} &= \vec{v}_{I \in \text{disque}} / \mathcal{R} - \vec{v}_{I \in \text{sol}} / \mathcal{R} \\
 &= \vec{v}_G + \vec{IG} \wedge \vec{\Omega} - \vec{0} \\
 &= \dot{x} \vec{u}_x + r \vec{u}_y \wedge \omega \vec{u}_z \\
 \vec{v}_{\text{glissement}} &= \underbrace{(\dot{x} + r\omega)}_{v_g} \vec{u}_x
 \end{aligned}$$

en  $t=0$

$$\vec{v}_{g0} = (0 + r\omega_0) \vec{u}_x$$

$$v_{g0} = r\omega_0 > 0$$

En présence de glissement, la loi de Coulomb donne

$$\vec{R} \cdot \vec{v}_g \leq 0$$

soit  $T \cdot v_g \leq 0$

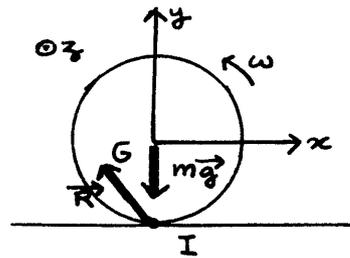
donc ici au départ puisque  $v_{g0} > 0$

$$T_{t=0} \leq 0$$

3) L'axe  $Gz$  est un axe de révolution. L'expression du moment cinétique barycentrique se résume au terme selon  $\vec{\Omega}$

$$\vec{\sigma}_G = J_{Gz} \vec{\Omega}$$

$$\vec{\sigma}_G = \frac{1}{2} m r^2 \omega \vec{u}_z$$



On applique le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique. Le moment du poids est nul.

$$\vec{GI} \wedge \vec{R} = \frac{d\vec{L}_G}{dt}$$

$$(-r \vec{u}_y) \wedge (T \vec{u}_x + N \vec{u}_y) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m r^2 \omega \vec{u}_z \right)$$

$$r T \vec{u}_z = \frac{1}{2} m r^2 \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z$$

$$T = \frac{1}{2} m r \frac{d\omega}{dt}$$

3) Théorème du centre de masse :

$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}_G$$

$$T = m \frac{d^2 X}{dt^2}$$

$$N - mg = 0$$

donc

$$N = mg$$

4) La loi de Coulomb en cas de glissement donne

$$\left| \frac{T}{N} \right| = f$$

Ici  $N = mg$  et  $T$  négatif. Donc

$$T = -f mg$$

d'où (cf 3)

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -f g$$

L'accélération est constante.

5)

$$\frac{dX}{dt} = -f g t + \cancel{A} \quad (\text{cf. conditions initiales})$$

$$X = -f_g \frac{t^2}{2} + \cancel{B}$$

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -f_g t \\ X &= -\frac{1}{2} f_g t^2 \end{aligned}$$

et on utilise 3)

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{2T}{mr} \\ &= \frac{2X - f_m g}{mr} \end{aligned}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2f_g}{r}$$

L'accélération angulaire est constante :

$$\omega = -\frac{2f_g}{r} t + A$$

C.I.  $\omega_0 = \quad \quad \quad A$

$$\omega = \omega_0 - \frac{2f_g t}{r}$$

6) On a vu en 1)

$$\begin{aligned} v_{\text{glissement}} &= \dot{X} + r\omega \\ &= -f_g t + r\omega_0 - 2f_g t \end{aligned}$$

$$v_{\text{glissement}} = r\omega_0 - 3f_g t$$

La vitesse de glissement s'annule en  $t_1$

$$t_1 = \frac{r\omega_0}{3f_g}$$

7) En reportant  $t_1$  :

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_{t_1} = -\frac{r\omega_0}{3}$$

$$\omega(t_1) = \frac{\omega_0}{3}$$

8) On suppose non glissement pour  $t > t_1$

$$v_{\text{glissement}} = 0$$

$$\dot{X} = -r\omega$$

9) En utilisant le deuxième théorème de König

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m v_G^2 + E_c \text{ dans le référentiel barycentrique} \\ &= \frac{1}{2} m \left( \frac{dX}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2 \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \frac{1}{2} m r^2 \end{aligned}$$

$$E_c = \frac{3}{4} m \left( \frac{dX}{dt} \right)^2$$

10) On écrit le théorème de la puissance cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = \underbrace{mg \vec{v}_G}_{\text{nul car } mg \perp \vec{v}_G} + \underbrace{R \vec{v}_{I \in \text{Dague}}}_{\text{nul car non glissement}}$$

donc

$$E_c = \text{constante}$$

11) de 10) et 9) on tire

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \text{constante} \\ &= -\frac{r\omega_0}{3} \\ \int_{x_1}^{x_2} dX &= -\frac{r\omega_0}{3} \int_{t_1}^{t_2} dt \\ \underbrace{x_2 - x_1}_{= \ell} &= -\frac{r\omega_0}{3} (t_2 - t_1) \\ \text{car } x_2 < x_1 \end{aligned}$$

finalement :

$$t_2 - t_1 = \frac{3\ell}{r\omega_0}$$

## Électronique

1)

$\omega$ en rad s <sup>-1</sup>
$f$ en Hz
$\omega = 2\pi f$

2)

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

 $(H_0 \text{ réel positif})$ 

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)}$$

3) En haute fréquence ( $f \rightarrow \infty$ )  $\underline{H} \approx 0$   
 En basse fréquence ( $f \rightarrow 0$ )  $\underline{H} \approx 0$

filtre passe-bande
--------------------

4) En écrivant le dénominateur sous forme exponentielle :

$$1 + jQ \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) = \sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2} \exp(j\alpha)$$

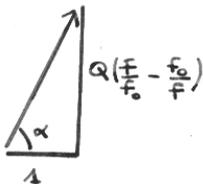
avec  $\alpha = \arg \left( 1 + jQ \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right)$

donc  $\underline{H} = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}} \exp(-j\alpha)$

$$G(f) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}}$$

$$\varphi(f) = -\alpha$$

$$\varphi(f) = -\arg \left( 1 + jQ \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right)$$



il faut, pour définir un angle, donner deux lignes trigonométriques

$$\tan \varphi = -\tan \alpha$$

$$\tan \varphi(f) = -Q \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)$$

$$\cos \varphi = \cos \alpha$$

$$\cos \varphi(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}}$$

remarque :

$$\cos \alpha > 0$$

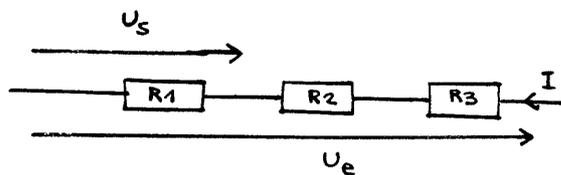
donc  $\alpha$  est entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$  (mod  $2\pi$ )

et l'on peut ici écrire

$$\alpha = \arctan \left[ Q \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right]$$

$$\varphi = -\alpha$$

5)



L'intensité, en l'absence de dérivations, est la même dans les trois résistances.

$$U_s = R_1 I$$

$$U_e = (R_1 + R_2 + R_3) I$$

donc en faisant le rapport :

$$\frac{U_s}{U_e} = \frac{R_1}{\sum_i R_i}$$

6) Pour une bobine, en travaillant avec les complexes associés,

$$\underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt}$$

or on travaille en  $\exp(j\omega t)$  donc  $\frac{d}{dt} = j\omega$

$$\underline{u} = L j\omega \underline{i}$$

$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = jL\omega$$

impédance complexe d'une bobine.

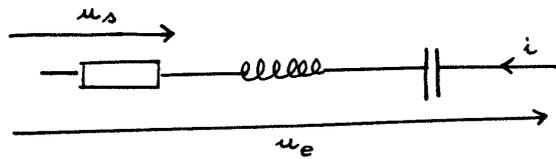
Pour un condensateur

$$\begin{aligned} \underline{i} &= C \frac{d\underline{u}}{dt} \\ &= C j\omega \underline{u} \quad \text{et donc} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{1}{j\omega C}}$$

impédance complexe d'un condensateur

7) Pour un RLC série, aux bornes de R :



$$\boxed{H = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\begin{aligned} \text{8) } H &= \frac{1}{1 + j\frac{\omega L}{R} + \frac{1}{j\omega RC}} \\ &= \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)} \end{aligned}$$

à identifier avec

$$\frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Il faut donc que :

$$H_0 = 1$$

$$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R} \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ Q &= \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} \end{aligned}}$$

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned}}$$

2)

$$H(f_e) = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{f_e}{f_0} - \frac{f_0}{f_e} \right)} \quad (\text{avec } f_e = f_0)$$

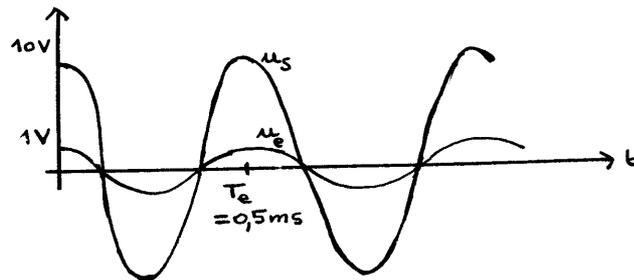
$$\underline{H} = H_0$$

$$u_s = H_0 u_e$$

$$u_s = H_0 U_{\max} \cos(2\pi f_e t)$$

A.N.  $= 10 \cdot 1,0 \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 t)$

$$u_s / V = 10 \cos(4000\pi t)$$



10)  $f_e \gg f_0$

→

$$G(f_e) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{f_e}{f_0} - \frac{f_0}{f_e} \right)^2}}$$

$$\approx \frac{H_0}{Q \frac{f_e}{f_0}}$$

$$G(f_e) \approx \frac{H_0 f_0}{Q f_e}$$

$$\tan \varphi(f_e) = -Q \left( \frac{f_e}{f_0} - \frac{f_0}{f_e} \right)$$

$$\approx -Q \frac{f_0}{f_e} \gg 1$$

et :

$$\cos \varphi(f_e) \approx \frac{f_0}{Q f_e} \ll 1$$

$$\varphi(f_e) \approx -\frac{\pi}{2}$$

→ finalement, ceci revient à faire :

$$H(f) = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)}$$

$$\underline{H}(f) \approx \frac{H_0}{jQ \frac{f}{f_0}}$$

$$R = \frac{H_0}{j\omega Q} = \frac{H_0 \omega_0}{P Q}$$

$$\underline{H}(P) = \frac{1}{P Z}$$

avec

$$Z = \frac{Q}{H_0 \omega_0}$$

$$\text{A.N.} = \frac{10}{10 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot 10^3}$$

$$Z = 0,08 \text{ ms}$$

dimension de Z

$$[H] = [P]^{-1} [Z]^{-1}$$

$$\text{pas de dimension} = [\omega]^{-1} [Z]^{-1}$$

$$[Z] = T$$

→

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{j\omega_e Z}$$

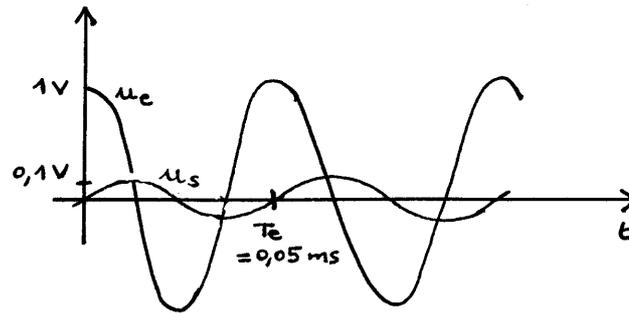
$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{U_{\max} \exp(j2\pi f_e t)}{j2\pi f_e Z}$$

$$= -j \frac{U_{\max}}{2\pi f_e Z} \exp(j2\pi f_e t)$$

$$u_s = \frac{U_{\max}}{2\pi f_e Z} \sin(2\pi f_e t)$$

$$\text{A.N.} = \frac{1,0}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-5}} \sin(2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 t)$$

$$u_s/v = 0,10 \sin(40 \cdot 10^3 \pi t)$$



11)  $f_e \ll f_0$

→ On obtient

$$G_{(f_e)} \approx \frac{H_0}{Q} \frac{f_0}{f_e}$$

$$\varphi_{(f_e)} \approx \frac{\pi}{2}$$

$$H(f) \approx j \frac{H_0}{Q} \frac{f}{f_0}$$

$$\approx \frac{p H_0}{Q \omega_0}$$

$$H(p) \approx z' p$$

→

avec

$$z' = \frac{H_0}{Q \omega_0}$$

A.N.

$$= \frac{10}{10 \times 2\pi \times 2 \times 10^3}$$

$$z' = 0,08 \text{ ms}$$

→

$$\frac{u_s}{u_e} = j \omega_e z'$$

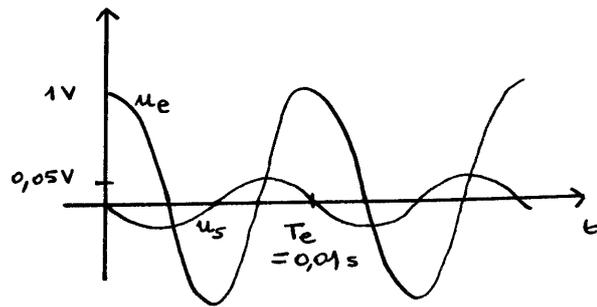
$$u_s = j 2\pi f_e z' U_{\text{MAX}} \exp(j 2\pi f_e t)$$

$$u_s = - 2\pi f_e z' U_{\text{MAX}} \sin(2\pi f_e t)$$

A.N.

$$= - 2\pi \times 100 \times 8 \times 10^{-5} \times 1,0 \text{ mV} (2\pi \times 100 t)$$

$$u_{s/V} = - 0,05 \text{ mV} (200 \pi t)$$



12) →

$$\langle u_e \rangle = \frac{E_0}{2}$$

puisque les fonctions trigonométriques ont une valeur moyenne nulle.

→

$$H(f) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

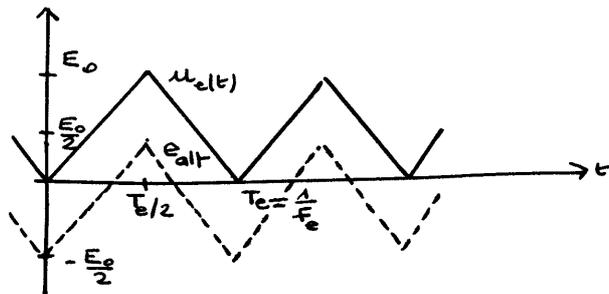
$$H(0) = 0$$

donc ce filtre supprime les tensions continues.

→ finalement, on peut considérer - puisque le continu est éliminé -  

$$e_{alt}(t) = u_e(t) - \langle u_e(t) \rangle$$

$$= u_e(t) - \frac{E_0}{2}$$



→ Entre 0 et  $T_e/2$

$$e_{alt} = A + B t$$

$$\left. \begin{array}{l} t=0 \quad -\frac{E_0}{2} = A \\ t=T_e/2 \quad \frac{E_0}{2} = A + B \frac{1}{2f_e} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = -\frac{E_0}{2} \\ B = 2f_e E_0 \end{array}$$

$$e_{alt} \left( 0 < t < \frac{T_e}{2} \right) = -\frac{E_0}{2} (1 - 4f_e t)$$

- 13) Le filtre étudié est un filtre pass-bande à bande étroite ( $Q=10$ ) centré sur  $f=f_0$ . Il y a donc une résonance marquée pour  $f_0$ .
- Le signal étudié, triangulaire, possède les harmoniques  $f_e = f_0$ ,  $3f_e$ ,  $5f_e$ ... etc. Le continu ne passe pas, le fondamental ( $f=f_e=f_0$ ) est sur la résonance. Les autres fréquences correspondent à des signaux très amortis.

Finalement, on peut approximer la réponse du filtre au traitement par le filtre du seul fondamental (cf question 9)

$$e_{\text{fondamental}} = -\frac{4E_0}{\pi^2} \exp(j 2\pi f_e t)$$

$$u_s = -H_0 \frac{4E_0}{\pi^2} \cos(2\pi f_e t)$$

$$\text{A.N.} \quad = -10 \frac{4 \times 10}{\pi^2} \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 t)$$

$$u_s / V = -40,5 \cos(4000\pi t)$$

- 14) On étudie l'action du filtre sur  $e_{\text{alt}}(t)$ .  
Les fréquences présentes sont  $f_e = 10 f_0$ ,  $3f_e = 30 f_0$ ,  $5f_e = 50 f_0$ ... etc.  
Pour toutes ces fréquences:  $\frac{f}{f_0} \gg 1$ , on a donc (cf question 10)

$$\frac{u_s \text{ harmonique}}{e_{\text{harmonique étudié}}} = \frac{1}{6p}$$

$$6p u_s \text{ harm} = e_{\text{harm}}$$

soit :

$$6 \frac{du_s \text{ harm}}{dt} = e_{\text{harm}}$$

cette relation est valable pour chaque fréquence

$$\frac{du_s}{dt} = \frac{1}{6} e_{\text{alt}} dt$$

$$\int_{u_s(t=0)}^{u_s(t)} du_s = \frac{1}{6} \int_{t=0}^t e_{\text{alt}} dt$$

on intègre sur  $\frac{1}{4}$  période (cf 13)

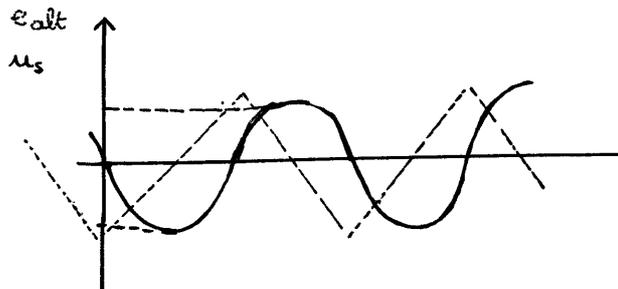
$$u_s(T_e/4) - u_s(0) = \frac{1}{6} \int_0^{T_e/4} -\frac{E_0}{2} (1 - 4f_0 t) dt$$

on obtient un arc de parabole.

$$u_s(T_c/4) = u_s(0) + \frac{1}{6} \times -\frac{E_0}{2} \left( \frac{T_c}{4} - 4f_c \frac{1}{2} \left( \frac{T_c}{4} \right)^2 \right)$$

$$u_s(T_c/4) = u_s(0) - \frac{E_0}{16 f_c T_c} \quad \frac{T_c}{8}$$

Le tracé en supposant  $u_s(0) = 0$  (voir texte) est obtenu en



réfléchissant à l'intégrale de  $e_{alt}$ . Le résultat (le continu ne passe pas) doit être une tension de valeur moyenne nulle. C'est le cas en faisant  $u_s(0) = 0$ .

$$U_{SCC} = 2 \frac{E_0}{16 f_c T_c}$$

$$U_{SCC} = \frac{E_0}{8 f_c T_c}$$

$$A.N. = \frac{10}{8 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-5}}$$

$$U_{SCC} = 0,75 \text{ V}$$

15) Si toutes les fréquences du signal :  $f_c, 3f_c, 5f_c \dots$  etc étaient très inférieures à  $f_0$ , on pourrait utiliser  $H = \delta'p$  et le signal de sortie serait la dérivée du signal d'entrée.

Ce n'est pas le cas. Les fréquences, au voisinage de la résonance, seront notamment celles de signaux très amplifiés.

→ Equadiff pour le signal de sortie (sans approximation)

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{H_0}{1 + Q \left( \frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right)}$$

$$\frac{u_s}{u_e} + \frac{Q}{\omega_0} p \frac{u_s}{u_e} + Q \omega_0 \frac{u_s}{u_e} = H_0 \frac{u_s}{u_e}$$

on multiplie par P

$$P \underline{u}_S + \frac{Q}{\omega_0} P^2 \underline{u}_S + Q \omega_0 \underline{u}_S = H_0 P \underline{u}_e$$

L'équa diff est donc :

$$\frac{du_S}{dt} + \frac{Q}{\omega_0} \frac{d^2 u_S}{dt^2} + Q \omega_0 u_S = H_0 \frac{du_e}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2 u_S(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_S(t)}{dt} + \omega_0^2 u_S = \frac{H_0 \omega_0}{Q} \frac{du_e(t)}{dt}}$$

On cherche la solution pour la première demi-période

$$0 < t < \frac{T_e}{2} (5\text{ms}) \quad u_e = \frac{E_0}{T_e/2} t$$

$$= 2 E_0 f_e t$$

$$\frac{d^2 u_S(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_S(t)}{dt} + \omega_0^2 u_S = \frac{H_0 \omega_0}{Q} \frac{du_e}{dt} \quad \overbrace{2 E_0 f_e}^{2 E_0 f_e}$$

solution particulière :

$$u_S = \frac{H_0}{Q \omega_0} \frac{du_e}{dt}$$

$$\boxed{u_S = \frac{H_0}{Q} \frac{du_e}{dt}}$$

$$\boxed{u_S = \frac{H_0 E_0 f_e}{\pi Q F_0}}$$

A.N.

$$= \frac{10 \cdot 10 \cdot 100}{\pi \cdot 10 \cdot 2000}$$

$$\boxed{u_S = 0,16 \text{ V}}$$

sur le graphe fourni,  $u_S$  oscille bien autour de la valeur 0,16V pendant la première demi-période.

## Ondes

1)

$$\omega = kc$$

On peut retrouver par exemple avec

$$\lambda = cT$$

$$\frac{2\pi}{k} = c \frac{2\pi}{\omega} \dots \text{etc}$$

2)

$$\underline{E}(x, t) = E_0 \exp j(\omega t - kx) + \underline{E}'_0 \exp j(\omega t + kx)$$

la somme des  
ondes progressives  
vers les  $x$  croissants.

la somme des  
ondes progressives  
vers les  $x$  décroissants.

3) En  $x=0$ 

$$\underline{E}(0, t) = E_0 \exp j\omega t + \underline{E}'_0 \exp j\omega t = 0$$

donc

$$\underline{E}'_0 = -E_0$$

Alors

$$\underline{E}(x, t) = E_0 \exp(j\omega t) \left( \exp(-jkx) - \exp(jkx) \right) = -2j \sin(kx) \exp(j\omega t)$$

$$\underline{E}(x, t) = \underbrace{2E_0}_{E_{\text{MAX}}} \sin(kx) \sin(\omega t)$$

4) L'onde doit aussi s'annuler sur le miroir en  $x=d$ .

$$\sin(kd) = 0$$

$$kd = n\pi$$

$$k = \frac{n\pi}{d} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

5)

$$\frac{\omega}{c} = \frac{n\pi}{d}$$

avec

$$\omega = 2\pi\omega$$

Les fréquences possibles sont :

$$\omega = n \frac{c}{2d}$$

6)

$$\Delta\omega_c = \frac{c}{2d}$$

A.N.

$$= \frac{3 \cdot 10^8}{2 \times 0,3}$$

$$= 0,5 \cdot 10^9 \text{ Hz}$$

$$\Delta\omega_c = 0,5 \text{ GHz}$$

7) mode 1 :  $\frac{E_1}{E_{\text{MAX}}} = \sin \frac{\pi x}{d} \sin \omega t$

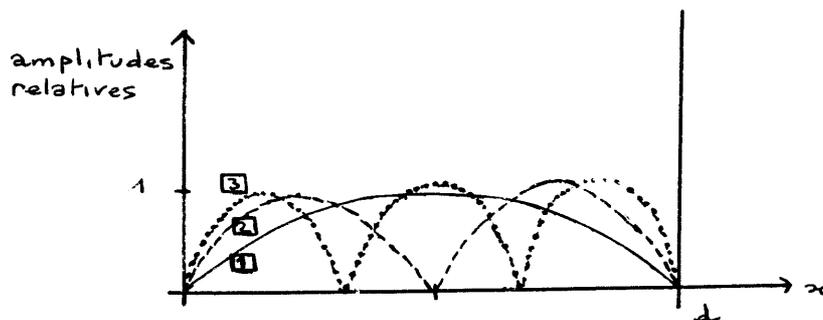
amplitude de  $\frac{E_1}{E_{\text{MAX}}} = \left| \sin \frac{\pi x}{d} \right|$

mode 2 :  $\frac{E_2}{E_{\text{MAX}}} = \sin \frac{2\pi x}{d} \sin \omega t$

amplitude de  $\frac{E_2}{E_{\text{MAX}}} = \left| \sin \frac{2\pi x}{d} \right|$

mode 3 :  $\frac{E_3}{E_{\text{MAX}}} = \sin \frac{3\pi x}{d} \sin \omega t$

amplitude de  $\frac{E_3}{E_{\text{MAX}}} = \left| \sin \frac{3\pi x}{d} \right|$



8) laser hélium-neon (laser "courant")

lumière "rouge"

$$k = \frac{n\pi}{d}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{d}$$

$$d = n \frac{\lambda}{2}$$

(nombre entier de "fuseaux")

$$\begin{aligned} n &= \frac{2d}{\lambda} \\ \text{A.N.} \quad &= \frac{2 \cdot 0,30}{633 \cdot 10^{-9}} \\ &= 947867 \end{aligned}$$

$n$  est un nombre entier proche de 950.000

9) Pour un miroir parfait, déphasage de  $\pi$  à la réflexion

$$r = -1$$

et pas d'onde transmise:

$$t = 0$$

10) L'onde 1 a parcouru au total une distance  $x$  dans le vide et a subi une transmission en  $x=d$ .

$$\underline{E} = E_0 \exp(j\omega t)$$

$$\underline{E}_1 = \tau E_0 \exp_j(\omega t - kx)$$

11) L'onde 2 a parcouru au total  $(d+d+x)$ , a subi une réflexion en  $x=d$ , puis une réflexion en  $x=0$ , puis une transmission en  $x=d$

$$\underline{E}_2 = r^2 \tau E_0 \exp_j(\omega t - k(2d+x))$$

$$\underline{E}_2 = r^2 \exp(-jk2d) \underline{E}_1$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_R \exp -j\phi$

$$\phi = 2kd$$

12) De la même façon:

$$\begin{aligned} \underline{E}_3 &= R \exp -j\phi \underline{E}_2 \\ &= R^2 \exp -2j\phi \underline{E}_1 \end{aligned}$$

$$\underline{E}_P = R^{P-1} \exp[-(P-1)j\phi] \underline{E}_1$$

13) Il y a interférence constructive si toutes les ondes sont en phase.

$$\phi = n 2\pi$$

$$2kd = n 2\pi$$

$$k = \frac{n\pi}{d}$$

(cf question 4)

$$\omega = \frac{n c}{2d}$$

(cf question 5)

On retrouve les modes possibles de la cavité.

14)

$$\begin{aligned} \underline{E}_R(x,t) &= \underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 + \dots + \underline{E}_P + \dots \\ &= \underline{E}_1 (1 + R \exp(-j\phi) + R^2 \exp(-2j\phi) + \dots + R^{P-1} \exp(-(P-1)j\phi) + \dots) \end{aligned}$$

$$\underline{E}_R(x,t) = \underline{E}_1 \sum_{n=0}^{\infty} R^n \exp(-jn\phi)$$

$$\underline{E}_R(x,t) = \underline{E}_1 \frac{1}{1 - R \exp(-j\phi)}$$

15)

$$\begin{aligned} I_0 &= (E_0 \exp(j\omega t)) (E_0 \exp(j\omega t))^* \\ &= E_0 \exp(j\omega t) \cdot E_0 \exp(-j\omega t) \end{aligned}$$

$$I_0 = E_0^2$$

16)

$$I = \underline{E}_1 \underline{E}_1^* \left( \frac{1}{1 - R \exp(-j\phi)} \right) \left( \frac{1}{1 - R \exp(j\phi)} \right)$$

$$= \delta^2 E_0^2 \frac{1}{1 + R^2 - 2R \cos \phi}$$

$$= \delta^2 E_0^2 \frac{1}{1 + R^2 - 2R(1 - 2 \sin^2 \frac{\phi}{2})}$$

$$= \delta^2 I_0 \frac{1}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

$$I = \frac{I_0 \delta^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

on pose

$$I_{\max} = \frac{I_0 \bar{b}^2}{(1-R)^2}$$

$$m = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

$$\frac{I}{I_{\max}} = \frac{1}{1 + m \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

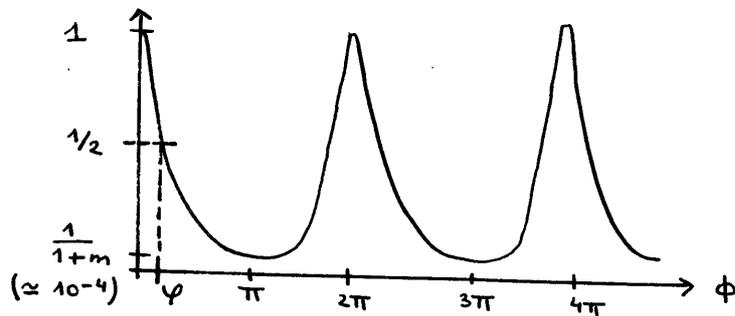
A.N.

$$m = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

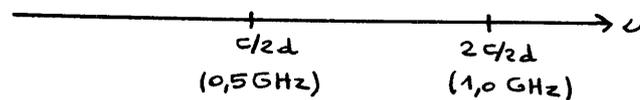
$$= \frac{4 \cdot 0,98}{(1-0,98)^2}$$

$$m = 9800$$

17) Tracé de  $I/I_{\max}$



(les pics sont en réalité bien plus fins  
les minima sont bien plus faibles)



18) Largeur des pics à mi-hauteur.

On doit résoudre, en nous intéressant au premier pic par exemple,

$$\frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$m \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1$$

Puisque  $\varphi$  sera très petit  $\varphi \ll 1$

$$m \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 1$$

$$\varphi = \frac{2}{\sqrt{m}}$$

Largeur d'un pic à mi hauteur :

$$\Delta\phi_{1/2} = \frac{4}{\sqrt{m}}$$

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{c}{\pi d} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\text{A.N.} = \frac{3 \cdot 10^8}{\pi \cdot 93} \frac{1}{\sqrt{9800}}$$

$$\Delta\nu_{1/2} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ GHz}$$

19)

$$\frac{\Delta\nu_{1/2}}{\Delta\nu_c} = \frac{\frac{c}{\pi d} \frac{1}{\sqrt{m}}}{\frac{c}{2d}}$$

$$\frac{\Delta\nu_{1/2}}{\Delta\nu_c} = \frac{2}{\pi \sqrt{m}}$$

$$\text{A.N.} = \frac{2}{\pi \sqrt{9800}}$$

$$\frac{\Delta\nu_{1/2}}{\Delta\nu_c} = 6 \cdot 10^{-3}$$

Les raies sont très fines ou les raies sont bien séparées.  
On pourra sélectionner un seul mode pour la raie laser.

Gravitation

1)

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

2)

$$\begin{aligned} \vec{E} &\Leftrightarrow \vec{g} \\ q &\Leftrightarrow m \\ \frac{1}{\epsilon_0} &\Leftrightarrow -4\pi G \end{aligned}$$

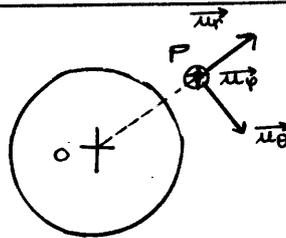
$$\text{cf: } \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \Leftrightarrow -\frac{Gmm'}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{intérieure}}}{\epsilon_0}$$

devient :

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{intérieure}}$$

3)



$(P, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est un plan de symétrie

$(P, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$  " " " "

donc  $\vec{g}(P)$  appartenant aux plans de symétrie

$$\vec{g}(P) = g \vec{u}_r$$

avec a priori  $g = g(r, \theta, \phi)$

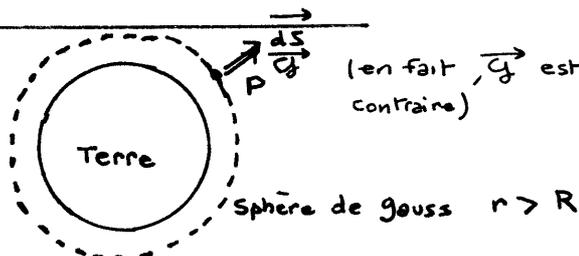
invariance en rotation.

Finalement dans ce problème à symétrie sphérique :

$$\vec{g}(P) = g(r) \vec{u}_r$$

(qui sera négatif)

4)



La surface de Gauss est une sphère de rayon  $r > R$

$$\oiint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \text{ minterieure}$$

$$\oiint g(r) dS = -4\pi G M$$

$$g(r) 4\pi r^2 = -4\pi G M$$

$$g(r) = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\vec{g}(r > R) = -\frac{GM}{r^2} \vec{u}_r$$

5) La surface de Gauss est une sphère de rayon  $r < R$

$$\oiint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \text{ minterieure}$$

$$\oiint g(r) dS = -4\pi G \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

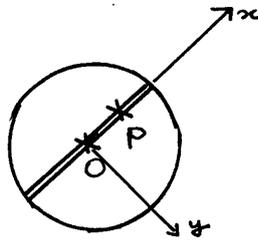
$$g(r) 4\pi r^2 = -4\pi G \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$g(r) = -\frac{4}{3}\pi G \rho r$$

$$\vec{g}(r < R) = -\frac{4}{3}\pi G \rho r \vec{u}_r$$

$$\vec{g}(r < R) = -\frac{4}{3}\pi G \rho \vec{r}_{OP}$$

6)



On écrit le principe fondamental

$$m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\vec{g} = \vec{a}$$

$$-\frac{4}{3}\pi G \rho \vec{OP} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u}_x$$

$$/x \quad -\frac{4}{3}\pi G \rho x = \ddot{x}$$

$$/y \text{ ou } z \quad 0 = 0$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{4}{3}\pi G \rho}_{\omega^2} x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

On obtient après résolution

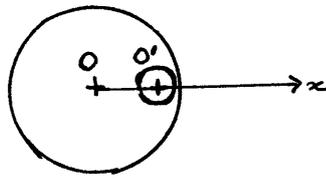
$$x = R \cos(\omega t)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

avec

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G \rho}$$

7)



La boule de centre O et de masse volumique  $\rho$  crée dans la sphère de rayon  $R'$  un champ

$$\vec{g}_+(P) = -\frac{4}{3}\pi G \rho \vec{OP}$$

La boule de centre O' et de masse volumique  $-\rho$  crée

$$\vec{g}_-(P) = \frac{4}{3}\pi G \rho \vec{O'P}$$

le champ dans la cavité vide est :

$$\begin{aligned} \vec{g}(P) &= \vec{g}_+(P) + \vec{g}_-(P) \\ &= -\frac{4}{3}\pi G \rho (\vec{OP} - \vec{O'P}) \\ &= -\frac{4}{3}\pi G \rho \vec{OO'} \end{aligned}$$

$$\vec{g}(P) = -\frac{4}{3}\pi G \rho D \vec{ux}$$

(champ uniforme)

8) On écrit le principe fondamental à la navette

$$m_{navette} \vec{g} = m_{navette} \vec{a}$$

$$\vec{g} = \vec{a}$$

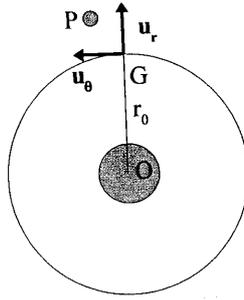
$$-\frac{GM}{r_0^2} \vec{ur} = -\Omega_0^2 r_0 \vec{ur}$$

(M : masse de la terre)

donc

$$\Omega_0 = \left(\frac{GM}{r_0^3}\right)^{1/2}$$

9)



De le référentiel en rotation :

- force de gravitation sur le satellite :

$$\vec{F}_{grav} = - \frac{GMm}{\|\vec{OP}\|^3} \vec{OP}$$

- force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{coriolis} = - 2m \vec{\Omega}_0 \wedge \vec{v}$$

$$\vec{F}_{coriolis} = - 2m \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}} \vec{u}_z \wedge \vec{v}$$

- force d'inertie centrifuge

$$\vec{F}_{centrifuge} = m \Omega_0^2 \vec{HP}$$

$$= m \Omega_0^2 (\vec{OP} - \vec{OH})$$

$$\vec{F}_{centrifuge} = m \frac{GM}{r_0^3} (\vec{OP} - z \vec{u}_z)$$

10) Principe fondamental :

$$GMm \left( \vec{OP} \left( \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{\|\vec{OP}\|^3} \right) - \frac{z}{r_0^3} \vec{u}_z \right) - 2m \Omega_0 \vec{u}_z \wedge \vec{v} = m \vec{a}$$

$$\begin{matrix} r_0 + x \\ y \\ z \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \\ 0 \end{matrix}$$

avec  $\vec{OP} = \vec{OG} + \vec{GP}$

$$\begin{matrix} r_0 + x \\ y \\ z \end{matrix}$$

$$\|\vec{OP}\|^3 = ((r_0 + x)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

$$= r_0^{-3} \left( \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{z}{r_0}\right)^2 \right)^{-3/2}$$

au premier ordre en  $\frac{x}{r_0}$ ,  $\frac{y}{r_0}$ ,  $\frac{z}{r_0}$

$$\approx r_0^{-3} \left( 1 - \frac{3x}{r_0} \right)$$

donc

$$\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{\|\vec{OP}\|^3} \approx \frac{1}{r_0^3} \left( 1 - 1 + \frac{3x}{r_0} \right)$$

$$= \frac{1}{r_0^3} \frac{3x}{r_0}$$

et toujours au premier ordre, le principe fondamental devient :

$$\Omega_0^2 \left( \vec{OP} - \frac{3x}{r_0} \vec{u}_z \right) - 2\Omega_0 (-\dot{y}\vec{u}_x + \dot{x}\vec{u}_y) = \vec{a}$$

$$\downarrow$$

$$\approx r_0 \vec{u}_r$$

finalement

$\vec{u}_r$	$3 \Omega_0^2 x$	$+ 2 \Omega_0 \dot{y}$	$= \ddot{x}$
$\vec{u}_\theta$			$- 2 \Omega_0 \dot{x} = \ddot{y}$
$\vec{u}_z$	$- \Omega_0^2 z$		$= \ddot{z}$