DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

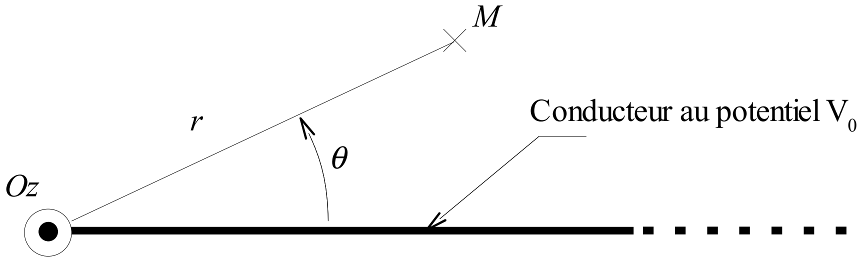
Sujet

Demi-plan conducteur en électrostatique

Données:

En coordonnées cylindriques: $div\,\vec{a}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,a_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(a_z)$

On considère un conducteur mince modélisé par un demi-plan dont l'épaisseur sera considérée comme nulle.



On se propose de déterminer le potentiel V et le champ électrostatique $\vec{E}$, dans l'espace vide autour du demi plan, près du bord de ce demi plan.

I. Détermination du potentiel dans le vide

Le potentiel du conducteur est noté V_0 .

On travaille en coordonnées cylindriques $(r\geq 0,\theta,z)$. Le demi-plan correspond à $\theta=0 \ \ (\text{ou}\,2\pi)$.

On cherche le potentiel au voisinage de l'axe Oz sous la forme $V(r,\theta,z)=V_0+f(r)\times g(\theta)$ où f et g sont des fonctions de r et θ telles que le potentiel V tend vers V_0 quand on se rapproche du conducteur.

1. Par un raisonnement précis justifier que les points du conducteur peuvent être considérés comme étant tous au même potentiel noté ici V_0 .
2. La solution recherchée pour $V(r,\theta,z)$ dans le vide ne fait pas intervenir z . Justifier.
3. Sur un dessin, en expliquant rapidement, proposer l'allure qualitative des équipotentielles dans un plan z = constante. En déduire qualitativement le tracé de quelques lignes de champ $\vec{E}$. Pour ce schéma, on prendra $V_0>0$.
4. Rappeler les deux équations de Maxwell de l'électrostatique. Préciser leur nom.
5. En utilisant la forme proposée pour le potentiel ci-avant, exprimer E_r , E_θ , E_z : composantes du champ électrostatique en coordonnées cylindriques en faisant intervenir f et g .
6. Déduire de l'une des équations de Maxwell l'équation qui relie nécessairement

r, f, f', f'', g, g'' . Quelle équation (donner son nom) pour le potentiel électrostatique vient-on de retrouver ici (écrite en coordonnées cylindriques pour le problème étudié).

7. Mettre la relation obtenue sous la forme : $H(r)=K(\theta)$.

8. On veut déterminer $g(\theta)$. Préciser les conditions aux limites pour $g(\theta)$ en $\theta=0$ et en $\theta=2\pi$. Étudier la solution selon le signe de K et en déduire le signe à adopter pour K . Déterminer la forme possible pour $g(\theta)$ (infinité de solutions possibles). On indique alors que l'équipotentielle V_0 doit obligatoirement être limitée au seul demi-plan. Finalement exprimer $g(\theta)$ à une constante multiplicative près et tracer $g(\theta)$ en fonction de θ .

9. Expliciter alors l'équation vérifiée par $f(r)$, en chercher des solutions sous la forme : $f(r)=r^{\alpha}$. Après avoir justifié que **:** $f(0)=0$, choisir la valeur convenable pour α et donner l'expression du potentiel (avec une constante arbitraire).

II. Détermination des densités de charge sur le demi-plan

10. Déterminer (à la constante arbitraire précédente près) $\sigma_1(r)$ et $\sigma_2(r)$: densités surfaciques de charge sur chaque face du demi-plan conducteur, $\sigma_1(r)$ pour $\theta=0^+$ et $\sigma_2(r)$ pour $\theta=2\pi^-$. Le comportement de σ_1 et σ_2 pour r proche de 0 vous rappelle-t-il un phénomène électrostatique bien connu ?

11. Lorsqu'un disque conducteur mince, chargé, de rayon a est seul dans l'espace, la densité surfacique de charge sur le disque est de la forme: $\sigma(r)=(\sigma_1+\sigma_2)=\frac{\gamma}{\sqrt{a^2-r^2}}$ (r : distance au centre du disque). L'expression de $\sigma(r)$ utilisée ici est-elle compatible avec les résultats obtenus à la question précédente ?

Expérience Delphi

Données :

Masse de l'électron : $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\, kg$.

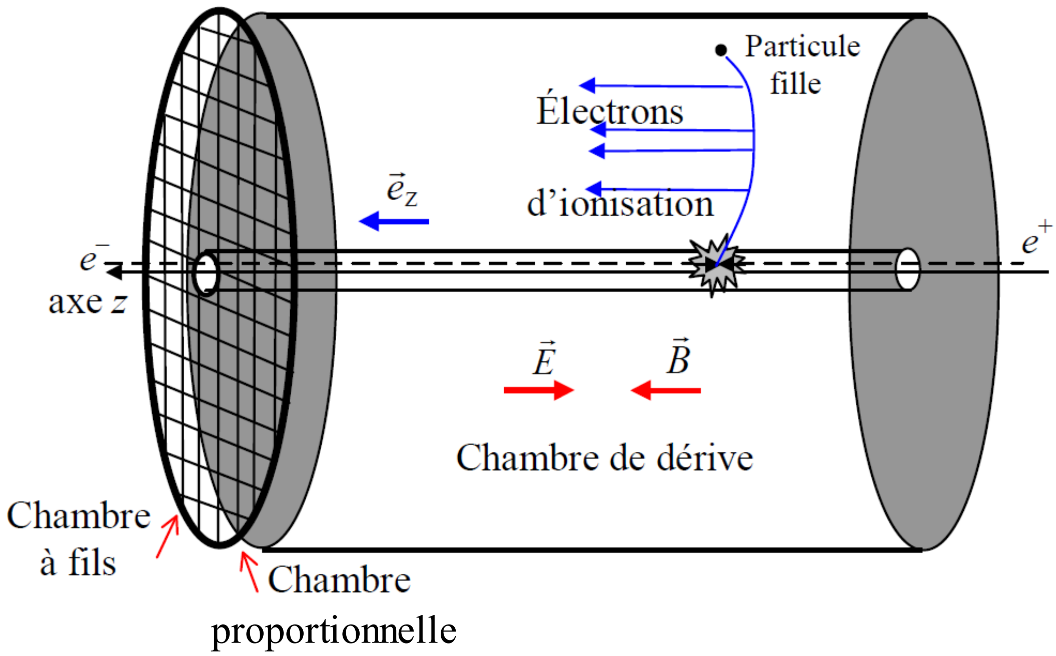
Charge élémentaire : $e = 1{,}60 \times 10^{-19}\, C$.

Constante d'Avogadro : $\mathcal{N} = 6{,}02 \times 10^{23}\, mol^{-1}$.

Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 1/(36\pi) \times 10^{-9}\, F.m^{-1}$.

On réalise des collisions à grande vitesse entre des électrons e^- et des anti-électrons e^+ (positrons). Les collisions produisent d'autres particules chargées (qualifiées de « filles ») que l'on veut identifier. On tente pour cela de reconstituer la trajectoire des particules produites.

Le dispositif (voir figure) comporte trois parties ou chambres.



L'ensemble comporte un axe de symétrie de révolution (appelé dans la suite « axe z »).

A l'intérieur de la chambre dite « de dérive », les collisions électrons-positrons ont lieu à proximité de l'axe z (voir sur la figure les faisceaux d' e^- et d' e^+ , le lieu des collisions étant marqué d'une « étoile »). Cette chambre est remplie d'argon sous faible pression. Le mouvement des particules filles dans l'enceinte gazeuse produit des électrons d'ionisation dont la détection dans la chambre à fils permet de déterminer les coordonnées du point où l'ionisation a eu lieu. On pourra déduire ensuite la nature des particules produites par les collisions...etc

Dans toute cette étude on utilisera la mécanique classique non relativiste et le poids des particules sera négligé.

I. Chambre d'ionisation

On s'intéresse au mouvement d'un électron dans la chambre de dérive. L'électron noté e_i possède une masse m_e et une charge $-e$. Dans cette enceinte, cylindrique de longueur L, règnent un champ magnétique $\vec{B}=B\vec{u}_z$ et un champ électrique $\vec{E}=E\vec{u}z$ permanents et uniformes, tous deux parallèles à l'axe z. On se place en coordonnées cartésiennes dans un référentiel $Oxyz$ de base $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$. Le vecteur $\vec{u}_z$ est le vecteur directeur de l'axe de symétrie du détecteur (« axe z ») et l'origine O du référentiel est sur l'entrée de la chambre de dérive à droite (voir figure)

Le champ électrique $\vec{E}=E\vec{u}z$ est obtenu en imposant une différence de potentiel $U=V(z=L)-V(z=0)$ entre les deux extrémités de la chambre distantes de L.

En plus de la force électromagnétique, le gaz contenu dans la chambre de dérive impose à l'électron e_i une force de frottement fluide $\vec{F}=-\mu\vec{v}$. On appelle $\vec{v}_0$ la vitesse de e_i au moment de son émission par ionisation d'un atome du gaz et le vecteur unitaire $\vec{u}_y$ est choisi de telle façon que $v_{0y}=\vec{v}_{0.}\vec{u}_y=0$

Pour les applications numériques, on prendra:

$L=2{,}1\,m$

$\mu=9{,}6\times10^{-20}\,kg.s^{-1}$

$U=63\text{kV}$

1. Exprimer et calculer numériquement E dans la chambre (avec $\vec{E}=E\,u\,z$).
2. Exprimer la force électromagnétique $\vec{F}_{EM}$ subie dans la chambre de dérive par un électron e_i dont on notera la vitesse $\vec{v}$ (avec $\vec{v}=v_x\vec{u}_x+v_y\vec{u}_y+v_z\vec{u}_z$).
3. En prenant comme paramètres m_e, e, B, μ et E, établir les trois équations différentielles régissant l'évolution des composantes v_x, v_y, v_z de la vitesse de e_i dans la chambre de dérive.
4. Exprimer v_z en fonction du temps t et déterminer $v_{\lim}=\lim_{t\to\infty}v_z(t)$. On posera $\tau=\dfrac{m_e}{\mu}$.
5. Calculer la valeur numérique de $v_{\lim}$. En négligeant $v_{0z}=\vec{v}_0\vec{u}_z$ devant $v_{\lim}$, exprimer et calculer numériquement le temps T qu'il faut attendre pour que $\forall t>T$, $\dfrac{|v_{\lim}-v_z(t)|}{|v_{\lim}|}<1\%$.
6. Déduire de deux des équations différentielles précédentes, l'équation différentielle vérifiée par la fonction complexe $\underline{w}(t)=v_x(t)+i\;v_y(t)$. Résoudre cette équation en tenant compte de la condition initiale sur $\underline{w}(t)$ puis en déduire les expressions de $v_x(t)$ et $v_y(t)$. On posera $\omega_e=\dfrac{eB}{m_e}$.
7. Après une phase transitoire très brève, quel type de mouvement adopte e_i ? Montrer alors que la mesure de la durée Δt de ce mouvement, dans la chambre de dérive, permet d'obtenir la

coordonnée z du point de la trajectoire de la particule fille ou s'est produite l'ionisation à l'origine de e_i (on négligera le déplacement suivant $\vec{u}_z$ entre $t=0$ et $t=T$).

II. Chambre proportionnelle

À la sortie de la chambre de dérive, e_i doit produire un signal sur un détecteur qui permet d'obtenir les deux autres coordonnées pour la reconstruction de la trajectoire de la particule fille. La charge d'un électron étant trop faible pour obtenir un signal détectable, on utilise une chambre dite « proportionnelle » pour produire un phénomène d'avalanche.

Cette chambre est constituée de deux grilles perpendiculaires à l'axe z distantes de L' et entre lesquelles on applique une différence de potentiel U' . La chambre proportionnelle est remplie du même gaz que celui contenu dans la chambre de dérive.

Pour les applications numériques, on prendra:

$L'=1\,cm$

$U'=1500\,V$

8. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle d'un électron dans un champ électrostatique.

9. Exprimer et calculer numériquement l'énergie que l'on communique à un électron avec une différence de potentiel U' .

10. Sachant que l'énergie molaire de première ionisation de l'argon vaut $E_i=1520\,kJ.mol^{-1}$,et en admettant que seulement $50\,\%$ de l'énergie précédemment calculée permet d'ioniser les atomes d'argon, quel est le nombre d'ionisations produites par un électron e_i ?

Les électrons « produits » par ces ionisations, appelés électrons secondaires, provoquent eux aussi de nouvelles ionisations : il se produit une avalanche qui permet d'obtenir environ 10^5 électrons pour un électron.

III. Chambre à fils

La détection du signal est effectuée dans la chambre à fils. L'avalanche d'électrons arrive sur un fil métallique qui va influencer un autre fil métallique parallèle au précédent. Cette charge permet de générer un signal électrique.

A. Un fil

On considère que chaque fil est un cylindre conducteur de rayon a et de longueur h .

On considère un fil métallique cylindrique, seul dans l'espace, de longueur h , de rayon $a \ll h$, portant une charge uniforme. La charge linéique est notée $\lambda=q/h$.

On utilise des coordonnées cylindriques (r,θ,z) autour de l'axe de symétrie du fil et on néglige les effets de bord (fil quasiment infini).

11. En utilisant des arguments précis, simplifier les expressions du potentiel V_{fil} et du champ $\vec{E}_{fil}$ créés par ce fil dans l'espace.

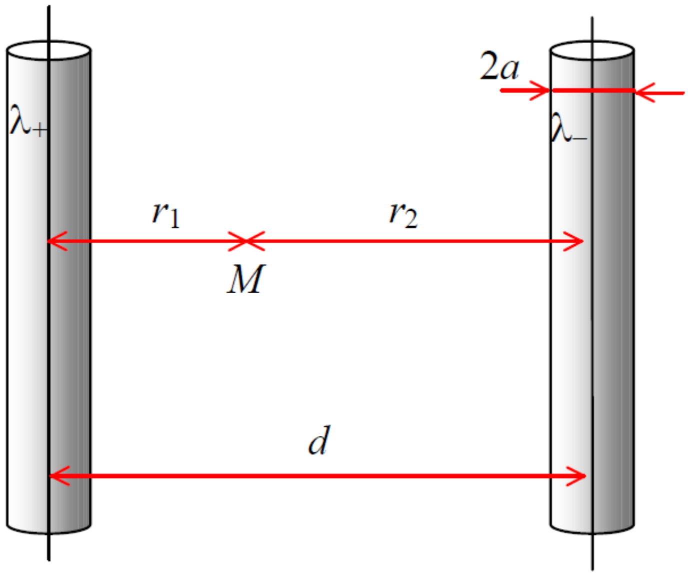
12. Établir l'expression de $\vec{E}_{fil}$ à l'extérieur du fil ($r>a$) puis l'expression correspondante de

V_{fil} ($r>a$).

13.Que sait-on de $\vec{E}_{fil}$ et V_{fil} à l'intérieur du fil ($r<a$)?

B. Deux fils

On considère à présent deux fils identiques au précédent, d'axes parallèles et séparés d'une distance d , mais portant des charges linéiques opposées $\lambda_+=q/h=\lambda$ et $\lambda_-=-q/h=-\lambda$ (voir figure).



Dans le cas étudié ici où $a\ll d$, la répartition de charge sur chaque fil est assimilée à une répartition uniforme car la perturbation apportée par la présence de l'autre fil est négligeable.

14.Établir l'expression du potentiel électrique en un point M extérieur aux fils en fonction des distances r_1 et r_2 entre ce point et chaque axe et des constantes du problème. On prendra le potentiel nul lorsque $r_1=r_2$.

15.Montrer que la capacité formée par une longueur h de ces deux fils s'écrit sous la forme $C=\dfrac{\alpha h}{\ln\left(\dfrac{d}{a}\right)}$ où l'on précisera l'expression de la constante α .

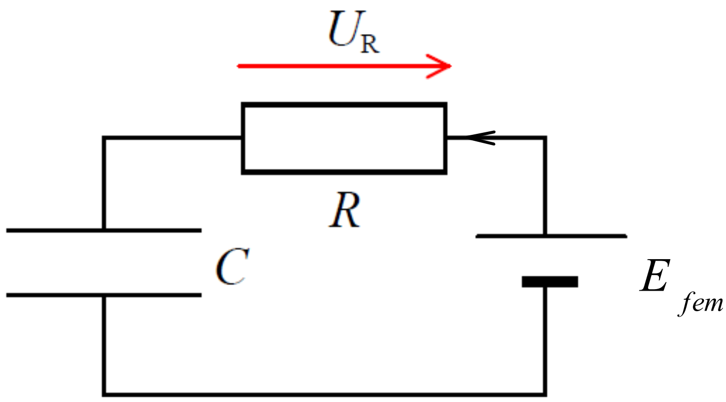
16.Application numérique: calculer la valeur de cette capacité C pour $h=1,0\times10^{-3}m$, $d=3,0\times10^{-6}m$ et $a=0,2\times10^{-6}m$.

C. Circuit de détection

On place les deux fils en influence de la question précédente dans le circuit de la figure suivante comprenant une résistance R et un générateur de force électromotrice constante $E_{fem}=4,0\,V$ (voir figure). En l'absence d'avalanche, en régime permanent, on appelle q_0 la charge totale prise par l'armature positive. Lorsqu'une avalanche se produit, cette charge devient $q_1<q_0$. On rappelle qu'une avalanche permet d'obtenir $N=10^5$ électrons.

17.Calculer les valeurs numériques de q_0 et q_1 .

18.Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension U_R après l'avalanche. Résoudre cette équation en choisissant $t=0$ pour l'arrivée de l'avalanche sur l'armature positive. Représenter $U_R(t)$ pour $t<0$ et $t>0$.



19.Expliquer la nécessité de provoquer une avalanche à partir d'un électron de dérive.

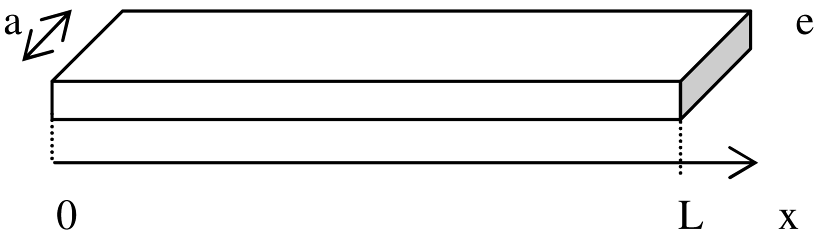
20.Comment un tel dispositif permet-il d'identifier les coordonnées x et y de la particule fille au moment de l'ionisation de l'argon dans la chambre de dérive ?

Les chambres proportionnelles à fils ont été inventées et mises au point à la fin des années 1960 par le physicien français GEORGES CHARPAK et lui valurent le prix NOBEL en 1992.

Comportement thermique d'un transistor

I. Comportement thermique d'une carte électronique

On étudie le transfert thermique dans une carte électronique modélisée (voir figure) par un conducteur parallélépipédique d'épaisseur faible e, de longueur L et de largeur a ($e \ll a$). On note μ sa masse volumique, λ sa conductivité thermique et c sa capacité thermique massique.



La longueur L est suffisamment grande pour que l'on adopte une modélisation unidimensionnelle des transferts thermiques. On note donc la température $T(x,t)$ le long de la plaque à l'instant t.

A. Transfert conductif

Dans un premier temps, on suppose qu'il n'y a pas de perte thermique par conducto-convection sur les surfaces latérales.

1) Équation de la chaleur

Le vecteur densité de courant thermique suit ici la loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda \, \overrightarrow{grad}\, T(x,t)$.

1. Déterminer l'unité de λ. Justifier.

2. Montrer que $\vec{j}_Q = j_Q(x,t)\vec{u}_x$ avec $\vec{u}_x$ vecteur unitaire de l'axe x.

3. Effectuer un bilan d'énergie sur un système élémentaire contenu entre les abscisses x et $x+dx$ de la plaque et en déduire une relation entre $\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

4. En déduire l'équation aux dérivées partielles qui régit $T(x,t)$. On désignera par D la diffusivité thermique dont on rappellera l'expression et l'unité.

2) Contact avec deux sources de chaleur idéales

On suppose ici que la plaque conductrice est en contact à son extrémité $x=0$ avec un thermostat à la température T_0 (constante et uniforme); il en est de même en $x=L$ avec un thermostat à la température T_1. On se place de plus en régime permanent.

5. Déterminer la loi de température le long de la plaque et le flux thermique à travers la plaque.

6. En développant clairement l'analogie thermo-électrique, définir et exprimer la résistance thermique R_{th} de la plaque en fonction des données. Donner son unité.

B. Transfert conducto-convectif

Une surface S à la température T, en contact avec de l'air à la température ambiante T_a, échange par conducto-convection avec celui-ci une puissance thermique P_C (sortant algébriquement de la surface S) telle que : $P_C = \alpha S(T - T_a)$.

7. Quelle est l'unité de α ? Montrer que cet échange conducto-convectif est décrit par une résistance thermique de conducto-convection R_{cc} .

On reprend le problème de la carte électronique mais on tient compte de ces échanges conducto-convectifs supplémentaires sur la surface latérale. On pose $\delta^2 = \frac{\lambda e}{2\alpha}$. On est toujours en régime permanent.

8. Donner la dimension de δ .

9. Déterminer (justifier soigneusement) l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ en régime permanent.

10. En déduire la nouvelle répartition de température $T(x)$ en fonction de δ , L , T_a , T_0 et T_1).

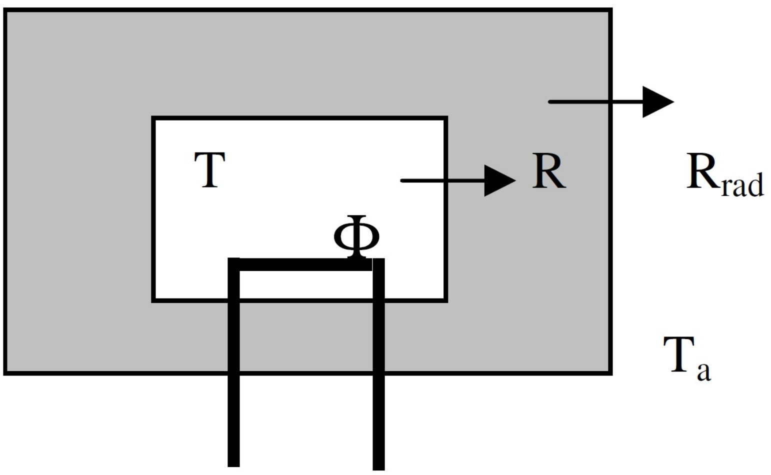
II. Comportement thermique d'un transistor de puissance

A. Régime stationnaire

Afin d'optimiser les performances d'un transistor de puissance, il est important de maintenir sa température de fonctionnement dans des limites raisonnables. On choisit pour cela d'utiliser un radiateur, directement lié au boîtier, afin d'augmenter les transferts thermiques avec l'air extérieur. Le but de cette question est de choisir le radiateur le mieux adapté aux conditions d'utilisation.

On note Φ le flux thermique que doit dissiper le transistor de puissance en régime permanent. Ce flux thermique passe du transistor vers l'air ambiant. On désigne par R la résistance thermique à l'interface transistor radiateur et par R_{rad} la résistance thermique de conducto-convection à l'interface radiateur-air (figure). Les températures de l'air ambiant et du transistor sont respectivement T_a et T (supposée uniforme).

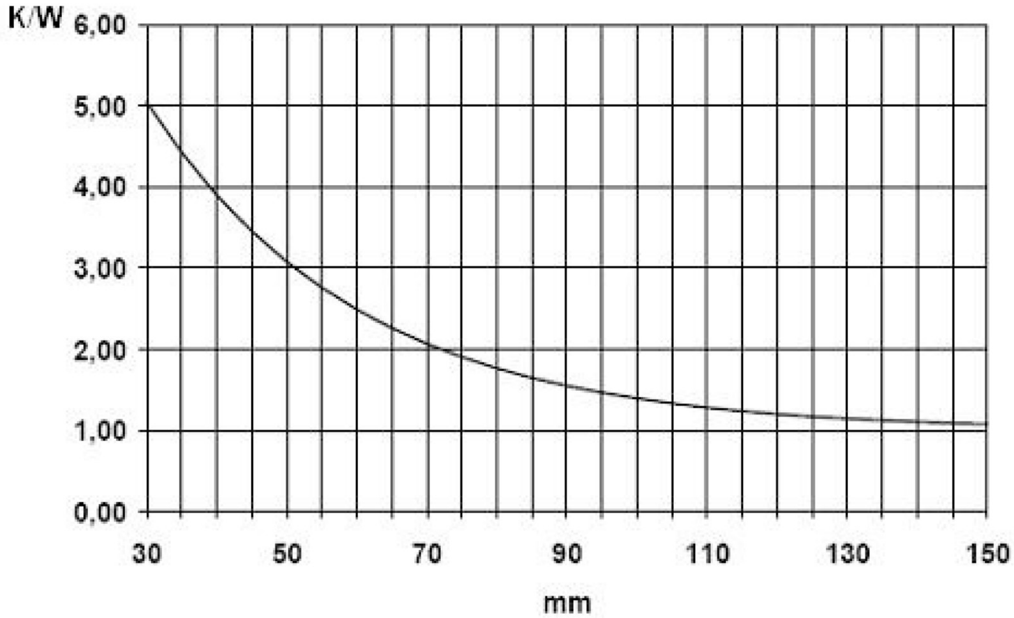
11. La conductivité thermique du radiateur est supposée très grande (infinie). En déduire que le radiateur est à température uniforme. En déduire que la résistance de conduction du radiateur peut être considérée comme nulle. On désignera par T_{rad} la température (inconnue) du radiateur.



12. Écrire la relation entre Φ , R , R_{rad} , T , T_a .

13.Le catalogue de composants d'un fournisseur donne la courbe suivante (voir figure) exprimant l'évolution de la résistance thermique des radiateurs disponibles en fonction de leur longueur (exprimée en mm). Déterminer la dimension utile du radiateur que l'on doit commander.

AN : $\Phi=40\,W$, $T_a=293\,K$, $T=413\,K$, $R=0{,}5\,K\,W^{-1}$.



14.Calculer T_{rad} en utilisant les valeurs numériques précédentes.

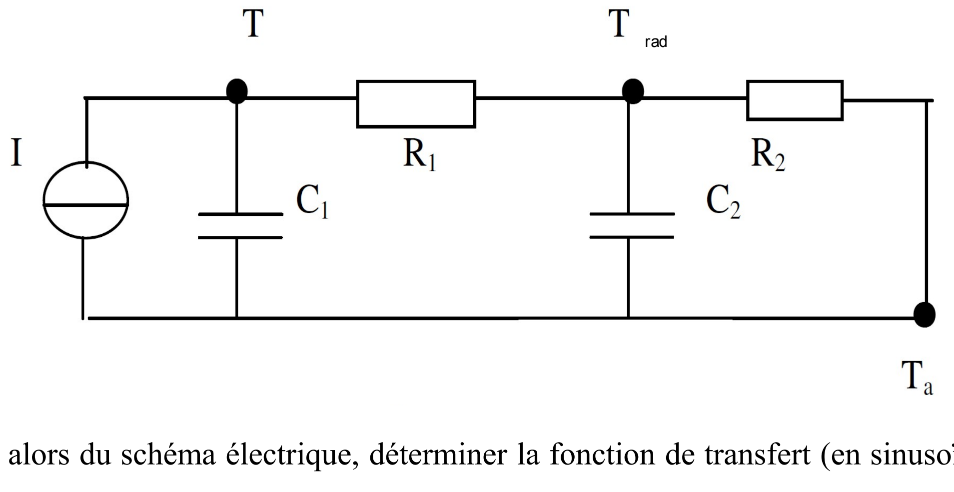
B. Analyse en régime transitoire

On tient compte maintenant des capacités thermiques respectives C et C_{rad} du transistor et du radiateur.

15.Rappeler l'unité de C et C_{rad}

16.Écrire le bilan énergétique pour le transistor. Écrire le bilan énergétique pour le radiateur. On obtient les deux équations différentielles qui régissent l'évolution de $T(t)$ et $T_{rad}(t)$ en fonction de C , C_{rad} , Φ , R , R_{rad} .

17.Justifier soigneusement que l'on puisse décrire le système thermique étudié par le circuit électrique équivalent de la figure suivante; pour cela indiquer clairement les équivalents thermiques correspondants des divers éléments électriques introduits.



18.En partant alors du schéma électrique, déterminer la fonction de transfert (en sinusoïdal) définie par: $\underline{H}(p)=\underline{H}(j\omega)=\dfrac{(\underline{T}-T_a)}{\underline{\Phi}}$.

19.On se place dans l'approximation $R R_{rad} C C_{rad} \ll 1$. Simplifier alors $\underline{H}(p)$ et écrire l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$ avec Φ indépendant du temps. En déduire la constante de temps τ caractéristique de l'évolution temporelle de la température $T(t)$ du transistor.

A.N. : $C=100\,J.K^{-1}$ $C_{rad}=200\,J.K^{-1}$

20.Discuter a posteriori la validité de l'hypothèse simplificatrice.

Réponses

Demi-plan conducteur en électrostatique

1) Dans un conducteur en équilibre électrostatique, le courant est nul, donc $\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$

soit : $-\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \vec{0}$

$\boxed{\text{V est uniforme (noté ici } V_0\text{)}}$

---

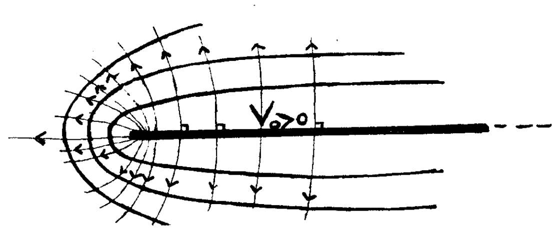
2) Il s'agit d'un demi-plan. Il n'y a pas de bords selon z donc

$\boxed{\text{invariance selon } z \quad V = V(r, \theta)}$

---

3) En supposant $V_0 > 0$, le potentiel va diminuer quand on s'éloigne.

Les lignes de champ partent du conducteur (sens des potentiels décroissants) et sont orthogonales aux équipotentielles.



---

4) $\boxed{\text{équation de Maxwell-Gauss : } \operatorname{div}_M \vec{E} = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}}$

$\boxed{\text{Équation de Maxwell-Faraday : } \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}}$

---

5) On cherche une <u>solution à variables séparées</u> :

$$V(r, \theta) - V_0 = f(r) \times g(\theta)$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$$

$$(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z}) \quad \left| \begin{array}{l} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -f'(r) \times g(\theta) \\ E_\theta = -\frac{\partial V}{r\partial \theta} = -\frac{f(r)}{r} \times g'(\theta) \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E_r = -f'(r)\ g(\theta) \\ E_\theta = -\frac{f(r)}{r}\ g'(\theta) \\ E_z = 0 \end{array}}$$

---

6) Dans le vide, $\rho = 0$ et l'équation M-G s'écrit

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(E_\theta) = 0$$

$$-g(\theta)\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r f(r)) - \frac{1}{r}\frac{f(r)}{r}\frac{d}{d\theta}(g'(\theta)) = 0$$

$$g(\theta)\ \frac{d}{dr}(r f'(r)) + \frac{f(r)}{r}\ g''(\theta) = 0$$

$$\boxed{g(\theta)\ \left(f'(r) + r f''(r)\right) + g''(\theta)\ \frac{f(r)}{r} = 0}$$

On a écrit $\quad \operatorname{div} \vec{E} = 0$

$$\operatorname{div}(-\overrightarrow{grad}\, V) = 0$$

$$-\Delta V = 0$$

On vient donc de retrouver :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{l'équation de Laplace} \\ \Delta V = 0 \end{array}}$$

---

7) En séparant ce qui dépend de r et ce qui dépend de θ, on obtient :

$$\boxed{\frac{r f'(r) + r^2 f''(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}}$$

$$H(r) = K(\theta)$$

---

8) $\rightarrow$ Il faut $\quad H(r) = K(\theta) \quad \forall r\ \forall \theta$

donc ceci implique que :

$$\underbrace{H(r)}_{\text{ne dépend pas de } \theta} = \underbrace{K(\theta)}_{\text{ne dépend pas de } r} = \underbrace{K}_{\text{constante}} \text{ donc}$$

→ on résout $\boxed{-\dfrac{g''(\theta)}{g(\theta)} = K}$

avec les conditions aux limites suivantes :

<u>$0<\theta<2\pi$</u> $\quad V = V_0 + f(r)\, g(\theta)$ $\quad \to V_0$ si $\theta \to 0$

$\to V_0$ si $\theta \to 2\pi$

car le potentiel est continu

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{C.L.} & g(\theta=0) = 0 \\ & g(\theta=2\pi) = 0 \end{array}}$$

→ signe de K

- si on choisit K négatif ($K = -k^2$)

$$g''(\theta) - k^2 g(\theta) = 0$$

$$g(\theta) = A \exp(k\theta) + B \exp(-k\theta)$$

et avec les C.L. A et B nuls.

Donc à rejeter.

- si on choisit K nul

$$g''(\theta) = 0$$

$$g(\theta) = A\theta + B$$

et avec les C.L. A et B nuls

Donc à rejeter

- <u>K est donc positif</u> ($K = k^2$)

→ solutions :

$$g''(\theta) + k^2 g(\theta) = 0$$

$$g(\theta) = A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$$

C.L. $\quad 0 = A$

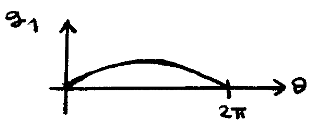
$\quad\quad\; 0 = A\cos(k\,2\pi) + B \sin(k\,2\pi)$

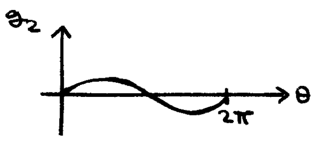
donc $A = 0$

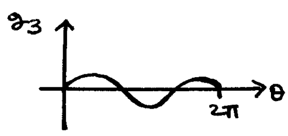
$B \sin(2\pi\sqrt{K}) = 0$ soit $2\pi\sqrt{K} = m\pi \quad m \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{g_m(\theta) = B_m \sin\left(\frac{m}{2}\theta\right)}$$

→ exemples :







Puisque $g(\theta)$ ne peut s'annuler qu'en $\theta = 0$ et en $\theta = 2\pi$

il faut choisir $m = 1$

$$\boxed{g(\theta) = \text{Cste} . \sin \frac{\theta}{2}}$$

(V doit être à variation monotone le long d'une ligne de champ)

---

9) $$\boxed{K = \frac{1}{4}}$$

L'équation différentielle vérifiée par $f(r)$ est alors :

$$\frac{r f'(r) + r^2 f''(r)}{f(r)} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{r^2 f''(r) + r f'(r) - \frac{1}{4} f(r) = 0}$$

On reporte $f(r) = r^{\alpha}$

$$r^2 \alpha (\alpha - 1) r^{\alpha - 2} + r \alpha r^{\alpha - 1} - \frac{1}{4} r^{\alpha} = 0$$

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \frac{1}{4} = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f(r) = A \sqrt{r} + \frac{B}{\sqrt{r}}}$$

quand $r \to 0$, on doit retrouver le potentiel du bord du plan, soit $V \to V_0 \quad \forall \theta$

ce qui nécessite

$$\lim_{r \to 0} f(r) = 0$$

donc B doit être nul.

(on remarquera que si $B \neq 0$ $f(r)$ donc $|V| \to \infty$ si $r \to 0$, ce qui n'a pas de sens physique).

Finalement, A désignant une constante arbitraire

$$\boxed{V = V_0 + A \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}}$$

---

10) Le champ dans le vide est donc

$$\boxed{\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{A}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ E_\theta &= -\frac{\partial V}{r \partial \theta} = -\frac{A}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}}$$

Pour déterminer la densité de charge surfacique, on utilise la relation de continuité (1 : demi-plan
2 : vide)

$$\vec{E_2} - \vec{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$$

$$\underset{\substack{\text{vide}\\ \text{au voisinage}}}{\vec{E}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{ext}$$

$$\boxed{\sigma = \varepsilon_0\, \vec{E}_{vide} \cdot \vec{n}_{ext}}$$

→ face supérieure du demi plan

$$\theta = 0$$

$$\vec{E}_{vide} = -\frac{A}{2\sqrt{r}}\vec{u_\theta}$$

$$\vec{n}_{ext} = \vec{u_\theta}$$

$$\boxed{\sigma_1 = -\varepsilon_0 \frac{A}{2\sqrt{r}}}$$

→ face inférieure du demi plan

$$\theta = 2\pi$$

$$\vec{E}_{vide} = \frac{A}{2\sqrt{r}}\vec{u_\theta}$$

$$\vec{n}_{ext} = -\vec{u_\theta}$$

$$\boxed{\sigma_2 = -\varepsilon_0 \frac{A}{2\sqrt{r}}}$$

($\sigma_2 = \sigma_1$: ce qui était prévisible par symétrie)

Si $r \to 0$, $|\sigma_1| = |\sigma_2| \to \infty$. On retrouve <u>l'effet de pointe</u>.
Le champ est plus important au voisinage des pointes.

---

11) On pose ε distance du bord (le "r" précédent)

$$\sigma = \frac{\gamma}{\sqrt{a^2-(a-\varepsilon)^2}}$$

$$= \frac{\gamma}{\sqrt{2a\varepsilon - \varepsilon^2}} \qquad \text{avec } \varepsilon \ll a$$

$$\simeq \frac{\gamma/\sqrt{2a}}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Le comportement en $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ est analogue au comportement en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ de 10).

Expérience Delphi : chambre à projection temporelle

1) Le champ $\vec{E}$ étant uniforme :

$$\vec{E} = E\,\vec{u_z} \quad \text{avec}$$

$$E = -\frac{dV}{dz}$$

$$\int_{V(z=0)}^{V(z=L)} dV = -E\int_0^L dz$$

$$\underbrace{V(z=L) - V(z=0)}_{U} = -E\,L$$

$$\boxed{E = -\frac{U}{L} \quad (<0)}$$

A.N. $= -\dfrac{63\ 10^3}{2,1}$

$$\boxed{E = -30\ 10^3\ \mathrm{V\,m^{-1}}}$$

---

2) Force de Lorentz :

$$\vec{F}_{EM} = q\,(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$$

$$\begin{array}{c} q = -e \\ (\vec{u_x},\vec{u_y},\vec{u_z}) \end{array} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F}_{EM} = & -e\,v_y\,B\,\vec{u_x} \\ & +e\,v_x\,B\,\vec{u_y} \\ & -e\,E\,\vec{u_z} \end{aligned}}$$

---

3) On applique le principe fondamental à l'électron étudié :

$$\vec{F}_{EM} - \mu\vec{v} = m_e\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boxed{\begin{aligned} /x \quad & -e\,v_y B - \mu\,v_x = m_e\frac{dv_x}{dt} \\ /y \quad & e\,v_x B - \mu\,v_y = m_e\frac{dv_y}{dt} \\ /z \quad & -eE - \mu\,v_z = m_e\frac{dv_z}{dt} \end{aligned}}$$

---

4) Selon z, on obtient :

$$v_z + \frac{m_e}{\mu}\frac{dv_z}{dt} = -\frac{e}{\mu}E$$

$\frac{m_e}{\mu}$ est un temps (temps de relaxation) noté τ

$-\frac{e}{\mu}E$ est la vitesse limite (quand $\frac{dv_z}{dt}=0$) notée v_{lim}

$$\boxed{\begin{aligned}\tau &= \frac{m_e}{\mu}\\ v_{lim} &= -\frac{e}{\mu}E\end{aligned}}$$

L'équation s'écrit

$$v_z + \tau\frac{dv_z}{dt} = v_{lim}$$

$$v_z = A\,e^{-t/\tau} + v_{lim}$$

C.I. en $t=0$

$$v_{0z} = A + v_{lim}$$

finalement :

$$\boxed{v_z = v_{lim} + (v_{0z} - v_{lim})\,e^{-t/\tau}}$$

(on peut vérifier :

$t \to \infty \quad v_z \to v_{lim}$)

---

5) A.N.

$$v_{lim} = -\frac{e}{\mu}E$$

$$= -\frac{1{,}6\ 10^{-19}}{9{,}6\ 10^{-20}} \times -30\ 10^{3}$$

$$\boxed{v_{lim} = 50\ 10^{3}\ m s^{-1}}$$

A.N. écart relatif par rapport à v_{lim}

$$\left|\frac{v_{lim} - v_z(t)}{v_{lim}}\right| = \left|\frac{v_{0z} - v_{lim}}{v_{lim}}\right| e^{-t/\tau}$$

$$= e^{-t/\tau} \quad \text{(en négligeant } |v_{0z}| \ll |v_{lim}|\text{)}$$

on veut :

$$e^{-t/\tau} < \frac{1}{100}$$

$$-t/\tau < -\ln 100$$

$$t > \underbrace{\tau \ln 100}_{T}$$

$$\boxed{T = 2\tau \ln 10}$$

$$\boxed{T = 4{,}6\ \tau}$$

(ordre de grandeur connu)

$$\tau = \frac{m_e}{\mu} = \frac{9{,}11 \; 10^{-31}}{9{,}5 \; 10^{-20}} = 9{,}5 \; 10^{-12}\,s$$

$$T = 4{,}6\;\tau$$

$$\boxed{T = 4{,}37 \; 10^{-11}\,s}$$

---

6)

(1) $\quad -e v_y B - \mu v_x = m_e \frac{dv_x}{dt}$

(2) $\quad e v_x B - \mu v_y = m_e \frac{dv_y}{dt}$

on fait (1) + i(2)

$$eB\underbrace{(i v_x - v_y)}_{i(v_x + i v_y)} - \mu (v_x + i v_y) = m_e \frac{d}{dt}(v_x + i v_y)$$

$$i e B \underline{w} - \mu \underline{w} = m_e \frac{d}{dt}(\underline{w})$$

$$\boxed{\frac{d\underline{w}}{dt} = \frac{1}{m_e}(ieB - \mu)\,\underline{w}}$$

$$\frac{d\underline{w}}{dt} = \left(i\omega_e - \frac{1}{\tau}\right)\underline{w}$$

L'équation caractéristique donne

$r = i\omega_e - \frac{1}{\tau}$

$$\boxed{\underline{w} = \underline{A}\;\exp\left[\left(i\omega_e - \frac{1}{\tau}\right)t\right]}$$

constante a priori complexe

C.I.

en $t = 0$

$$\underline{w}_0 = v_{x_0} + \underbrace{i v_{y_0}}_{\text{nul}} = \underline{A}$$

donc :

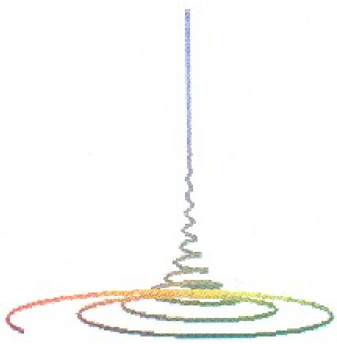
$$\underline{w} = v_{x_0}\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\,\exp(i\omega_e t)$$

dont la partie réelle donne v_x et la partie imaginaire v_y

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= v_{x_0}\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\cos(\omega_e t) \\ v_y &= v_{x_0}\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\sin(\omega_e t) \end{aligned}}$$

---

remarque : trajectoire (2 simulations)



→ En l'absence de frottement et en l'absence de champ E, la trajectoire est une hélice à base circulaire avec $v_x = v_{x_0} \cos(\omega_e t)$, $v_y = v_{x_0} \sin(\omega_e t)$, $v_z = v_{z_0}$

→ le champ E crée une accélération selon z de sorte que le pas de l'"hélice" varie.

→ le frottement crée de l'amortissement selon z ($v_z \to v_{lim}$ et le pas tend à redevenir constant) et selon x et y (le "rayon" de l'"hélice" diminue)

7) Si $t \gg \tau$ (on a vu précédemment que pour $T = 4{,}6\,\tau$ $\exp(-\frac{t}{\tau}) < \frac{1}{100}$)

on a $\exp(-\frac{t}{\tau}) \to 0$.

alors :
$$v_z = v_{lim} + (v_{0z} - v_{lim})\,e^{-t/\tau} \longrightarrow v_{lim}$$
$$v_x = v_{x_0}\,\exp(-\tfrac{t}{\tau})\,\cos(\omega_e t) \longrightarrow 0$$
$$v_y = v_{x_0}\,\exp(-\tfrac{t}{\tau})\,\sin(\omega_e t) \longrightarrow 0$$

Le mouvement devient rectiligne uniforme selon $\vec{u_z}$ avec $\vec{v} = v_{lim}\,\vec{u_z}$

En négligeant le déplacement pendant le régime transitoire (avant $t = T$), on peut donc écrire que la distance parcourue pendant Δt est $L - z_i$ (z_i : cote où s'est produite l'ionisation)

$$(L - z_i) = v_{lim}\,\Delta t$$

$$\boxed{z_i = L - v_{lim}\,\Delta t}$$

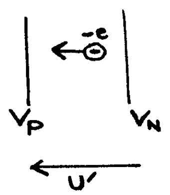
---

8) $$\boxed{E_p = (-e)\,V}$$

V potentiel électrostatique.

---

9)



P désigne la plaque positive

N " " négative

Pour l'électron
$$E_c + E_p = \text{constante}$$
$$\Delta E_c = -\,\Delta E_p$$
$$= -\,(-e)\,(V_P - V_N)$$

$$\boxed{\Delta E_c = e\,U'}$$

A.N. $= 1{,}6\ 10^{-19} \times 1500$

$$\boxed{\Delta E_c = 2{,}4\ 10^{-16}\ J}$$

10) L'énergie d'ionisation pour un atome vaut $\frac{E_i}{\mathcal{N}}$

le nombre d'ionisations est donc : (avec 50% = $\frac{1}{2}$)

$$\boxed{N = \frac{1}{2} \frac{\Delta E_c}{E_i} \mathcal{N}}$$

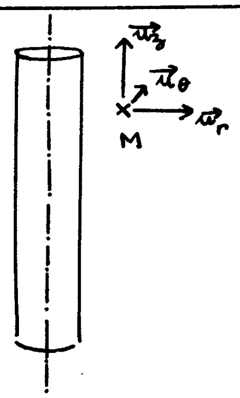
A.N. $$= \frac{1}{2} \frac{2{,}4\ 10^{-16}}{1{,}52\ 10^{6}} 6{,}02\ 10^{23}$$

$$= 47{,}53$$ donc :

$$\boxed{N \approx 47}$$

---

11)



Il y a invariance du problème en translation selon z, en rotation selon θ donc

$$V = V(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$$

$$\boxed{V = V(r)}$$

puis $$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\ V$$

$$= -\frac{dV(r)}{dr} \vec{u_r}$$

$$\boxed{\vec{E} = E(r)\ \vec{u_r}}$$

remarque.

Pour $\vec{E}(M)$, on pourrait aussi utiliser :

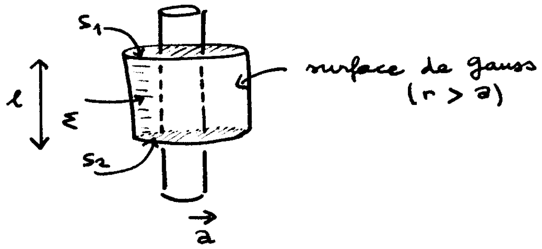
- le plan $M, \vec{u}_r, \vec{u}_z$ est un plan de symétrie
- le plan $M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ est un plan de symétrie

donc $\vec{E}(M)$ est suivant $\vec{u_r}$

$$\vec{E} = E(r, \underbrace{\cancel{\theta}, \cancel{z}}_{\text{invariances.}})\ \vec{u_r}$$

---

12) On utilise le théorème de Gauss.



$$\oiint \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\underbrace{\iint_{S_1} + \iint_{S_2}}_{\substack{\text{nul} \\ \vec{E} \perp \vec{dS}}} + \iint_{\Sigma} \vec{E}\,\vec{dS}$$

$$E\, 2\pi r\, \ell = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}_{(r>a)} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\vec{u_r}}$$

Puis, pour déterminer V :

$$E = -\frac{dV}{dr}$$

$$dV = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

$$\boxed{V_{(r>a)} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) + K}$$

On ne peut choisir pour cette distribution infinie V nul à l'infini. On peut décider de faire V nul en r_0. Alors V s'écrira $\boxed{V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}}$, ce qui est moins choquant dans la mesure où intervient dans le ln une grandeur sans dimension.

---

13) A l'intérieur du fil conducteur, en équilibre électrostatique, on sait que le courant $\vec{j}$ est nul donc

$$\boxed{\vec{E}(r<a) = \vec{0}}$$

Donc le potentiel est uniforme à l'intérieur

$$\boxed{\begin{aligned} V(r<a) &= \text{cste} \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(a) + K \end{aligned}}$$

---

14) En M, extérieur aux 2 fils, en travaillant par superposition

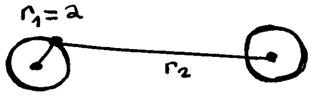
$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r_1) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r_2) + K'$$
$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + K'$$

Il est donc possible de faire $V=0$ dans le plan médiateur.
On choisit finalement $K'=0$

$$\boxed{V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

---

15) Par continuité, sur le fil 1, on trouve V_1 (donc pour $r_1 = a$ et pour $r_2 \approx d$



remarque

r_2 semble pouvoir prendre n'importe quelle valeur entre $d-a$ et $d+a$.
En fait, cette difficulté apparente est résolue en se rendant compte que $d \gg a$.
Si on n'était pas dans ce cas, la répartition de charge ne serait plus à symétrie cylindrique sur chaque fil et la formule vu en 13) serait à reconsidérer.

$$V_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a}$$

de même: $$V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{d}$$

et $$V_1 - V_2 = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a}$$
$$= \frac{q/h}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a} \qquad (\text{avec } q = q_1)$$

La capacité de ce condensateur (condensateur de deuxième espèce car il n'y a pas ici un conducteur qui entoure l'autre) est donnée par $q_1 = C\,(V_1 - V_2)$

$$\boxed{C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{a}\right)}\,h}$$

$(\alpha = \pi\varepsilon_0)$

---

16) A.N. $$= \frac{\pi\,\frac{1}{36\pi}\,10^{-9}}{\ln\left(\frac{3{,}0}{0{,}2}\right)}\,10^{-3}$$

$$\boxed{C = 10{,}3\ 10^{-15}\ \text{F}}$$

---

17) En l'absence d'avalanche, le condensateur est chargé sous la tension E_{fem}.

$$\boxed{q_0 = C\,E_{fem}}$$

A.N. $= 10{,}3\ 10^{-15} \times 4$

$$\boxed{q_0 = 41{,}0\ 10^{-15}\,C}$$

En presence d'avalanche, la charge est devenue :

$$\boxed{q_1 = q_0 - N e}$$

A.N. $= 41{,}0\ 10^{-15} - 10^{5} \times 1{,}6\ 10^{-19}$

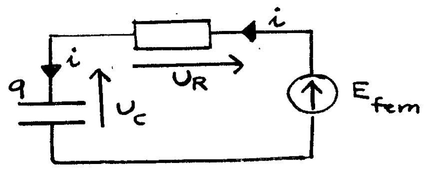
$$\boxed{q_1 = 25{,}0\ 10^{-15}\,C}$$

---

18) Pour $t<0$, le condensateur est chargé et le courant dans le circuit est nul.

$$\boxed{u_{R(t<0)} = 0}$$

Pour $t>0$ (avec en $t=0^+$, $U_{C_0} = \frac{q_1}{C}$)



$$U_R + U_C = E_{fem}$$

$$\frac{dU_R}{dt} + \frac{dU_C}{dt} = 0$$

avec $i = C\,\frac{dU_C}{dt}$

et $i = \frac{U_R}{R}$

$$\boxed{\frac{dU_R}{dt} + \frac{1}{RC}U_R = 0}$$

$U_R = A\,e^{-t/\tau}$ (avec $\tau = RC$)

En $t=0^+$, $U_{C_0} = \frac{q_1}{C}$ donc $U_{R_0} = E_{fem} - \frac{q_1}{C}$

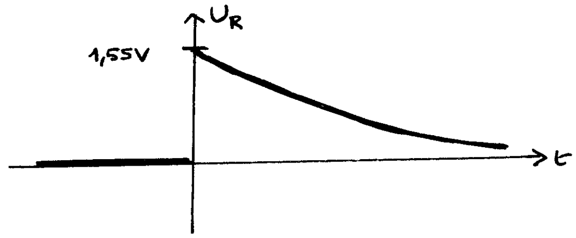
$$U_R = \left(E_{fem} - \frac{q_1}{C}\right) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$= \frac{q_0 - q_1}{C} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$\boxed{U_R = \frac{Ne}{C} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$$

A.N. $$= \frac{10^5 \; 1{,}6 \; 10^{-19}}{10{,}3 \; 10^{-15}} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$U_R/_V = 1{,}55 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$



---

19) Sans avalanche, le signal vaudrait (cf $N = 1$) en $t = 0^+$,

15,5 µV

et serait noyé dans le "bruit".

---

20) La chambre à fils permet d'identifier le x et y finaux. Si la distance parcourue pendant la phase transitoire dans la chambre d'ionisation est négligeable, alors <u>la trajectoire de l'electron se fait uniquement selon z</u>.

Et donc $x_{final} = x_{ionisation}$

$y_{final} = y_{ionisation}$

Comportement thermique d'un transistor

1) $\vec{j_Q} = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\, T$

en $W m^{-2}$ — en $K m^{-1}$

donc $\boxed{\lambda \text{ est en } W\, m^{-1} K^{-1}}$

---

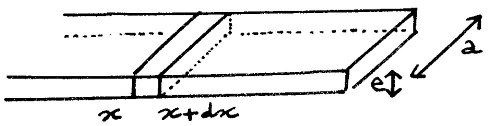
2) Ici, $T = T(x,t)$ donc le gradient sera selon $\vec{u_x}$

$$\vec{j_Q} = \underbrace{-\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}}_{j_Q(x,t)} \vec{u_x}$$

$$\boxed{\vec{j_Q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u_x}}$$

---

3)



$(S = ae)$

Bilan, par exemple à pression constante pour la tranche entre x et $x+dx$, pour la durée élémentaire entre t et $t+dt$.

$$d^2H = \delta^2 Q_{reçue}$$

$$dm\, c \frac{\partial T}{\partial t} dt = j_Q(x,t)\, S\, dt - j_Q(x+dx)\, S\, dt$$

$$\mu S\, dx\, c \frac{\partial T}{\partial t} dt = - \frac{\partial j_Q}{\partial x} dx\, S\, dt$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_Q}{\partial x}$$

On obtient donc finalement :

$$\boxed{\frac{\partial j_Q}{\partial x} = - \mu c \frac{\partial T}{\partial t}}$$

---

4) $$-\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = - \mu c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{D = \frac{\lambda}{\mu c}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = 0}$$

dimension :
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t}$$
$$\frac{[\theta]}{[L]^2} = \frac{1}{[D]}\frac{[\theta]}{[T]}$$
donc
$$[D] = [L]^2 [T]^{-1}$$
$$\boxed{D \text{ en } m^2 s^{-1}}$$

---

5) En régime permanent : $T = T(x)$

On doit résoudre :
$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$
$$T = A x + B$$
C.L. $\begin{cases} T_0 = A \times 0 + B \\ T_1 = A \times L + B \end{cases}$

donc :
$$\boxed{T = \frac{T_1 - T_0}{L} x + T_0}$$

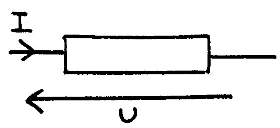
Le vecteur courant thermique volumique vaut alors :
$$\vec{j} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u_x}$$
$$\vec{j} = -\lambda \frac{T_1 - T_0}{L} \vec{u_x}$$

Le flux thermique (compté positivement dans le sens de $\vec{u_x}$) est
$$\phi = j S$$
$$\boxed{\phi = -\lambda \frac{T_1 - T_0}{L} a e}$$

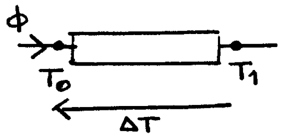
---

6) Analogie thermo-électrique

élec	therm
I	ϕ
$\Delta V = U$	ΔT
R_{elec}	R_{therm}



au lieu de $U = R I$



on a :
$$\Delta T = R_{th} \phi$$
$$T_0 - T_1 = R_{th} \phi$$

donc $\boxed{R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{ae}}$

unité : $\boxed{R_{th} \text{ en } K \cdot W^{-1}}$

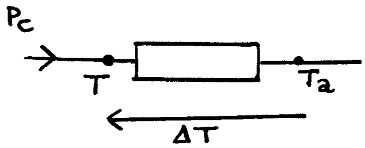
---

7)

$$P_c = \alpha\, S\, (T - T_a)$$

$$\underset{W}{\uparrow} \qquad \underset{m^2}{\uparrow} \qquad \underset{K}{\uparrow}$$

$$\boxed{\alpha \text{ en } W\, m^{-2}\, K^{-1}}$$



Donc :

$$P_c = \alpha S \,\Delta T$$

$$R_{cc} = \frac{\Delta T}{P_c}$$

$$\boxed{R_{cc} = \frac{1}{\alpha S}}$$

---

8)

$$[\delta]^2 = \frac{[\lambda]\,[e]}{[\alpha]}$$

$$= \frac{[\text{Puissance}]\, L^{-1}\, \theta^{-1}\, L}{[\text{Puissance}]\, L^{-2}\, \theta^{-1}}$$

$$= L^2$$

$$\boxed{\delta \text{ est une longueur}}$$

---

9)

$$d^2H = \delta^2 Q_{\text{reçue}}$$

$$= \delta^2 Q_{\text{reçue par conduction}} + \delta^2 Q_{\text{reçue par conductoconvection}}$$

déjà étudié ↓ ↓ déjà étudié

$$\mu\, a\, e\, dx\, c \frac{\partial T}{\partial t} dt = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx\, ae\, dt - \alpha\,(T - T_a)\, dS_{\text{latérale}}\, dt$$

$$\alpha\,(T - T_a)\, 2(a+e)\, dx\, dt$$

Mais puisque l'on se place en régime permanent, $d^2H = 0$
et l'on obtient :

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2}\, a\, e = 2\alpha\,(T - T_a)\,(a+e)$$

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{2\alpha(a+e)}{\lambda a e}(T-T_a)}$$

avec $e \ll a$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{2\alpha}{\lambda e}(T-T_a)$$

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}(T-T_a) = 0}$$

---

10) solution : $(T-T_a) = A\,e^{\frac{x}{\delta}} + B\,e^{-\frac{x}{\delta}}$

C.L. $\longrightarrow$ $(T_o - T_a) = A + B$

$\longrightarrow$ $(T_1 - T_a) = A\,e^{\frac{L}{\delta}} + B\,e^{-\frac{L}{\delta}}$

d'où $$A = \frac{(T_1-T_a) - (T_o-T_a)\,e^{-L/\delta}}{(e^{L/\delta} - e^{-L/\delta})}$$

$$B = -\frac{(T_1-T_a) - (T_o-T_a)\,e^{L/\delta}}{(e^{L/\delta} - e^{-L/\delta})}$$

$$(T-T_a) = \frac{1}{2\,sh(L/\delta)}\Big[(T_1-T_a)e^{x/\delta} - (T_o-T_a)\,e^{(x-L)/\delta} - (T_1-T_a)e^{-x/\delta} + (T_o-T_a)\,e^{(L-x)/\delta}\Big]$$

$$(T-T_a) = \frac{1}{2\,sh(L/\delta)}\Big[(T_1-T_a)\,2\,sh(x/\delta) + (T_o-T_a)\,2\,sh\big(\tfrac{L-x}{\delta}\big)\Big]$$

$$\boxed{(T-T_a) = (T_1-T_a)\,\frac{sh(x/\delta)}{sh(L/\delta)} + (T_o-T_a)\,\frac{sh((L-x)/\delta)}{sh(L/\delta)}}$$

---

11) $\rightarrow$ Le flux thermique traversant le radiateur est non nul et fini

or $\underset{\text{fini}}{\vec{J_Q}} = -\underset{\text{infini}}{\lambda}\,\overrightarrow{grad}\,T$

donc il faut que $\overrightarrow{grad}\,T = \vec{0}$

Le radiateur est à <u>température uniforme</u>

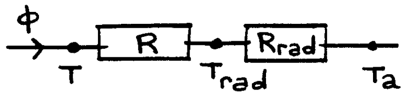
$\rightarrow$ La résistance thermique du radiateur vérifie

$$\underset{\text{nul}}{\Delta T} = R_{th}\,\underset{\text{fini}}{\phi}$$

donc il faut que $R_{th} = 0$

---

12) Le schéma du transistor en thermique se ramène alors à :



$$\boxed{(T - T_a) = (R + R_{rad})\,\phi}$$

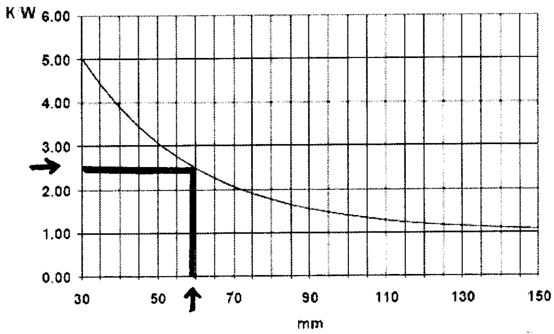
---

13) A.N.

$$R_{rad} = \frac{T - T_a}{\phi} - R$$

$$= \frac{413 - 293}{40} - 0{,}5$$

$$\boxed{R_{rad} = 2{,}5 \text{ K W}^{-1}}$$



D'après le graphe, la dimension utile du radiateur est donc

$$\boxed{\text{dimension utile : } 60 \text{ mm}}$$

---

14) On a

$$T - T_{rad} = R\,\phi$$

$$\boxed{T_{rad} = T - R\phi}$$

A.N.

$$= 413 - 0{,}5 \times 40$$

$$\boxed{T_{rad} = 393 \text{ K}}$$

---

15)

$$\boxed{C \text{ et } C_{rad} \text{ en J K}^{-1}}$$

---

16) Bilan thermique pour le transistor pendant dt

(le transistor produit une puissance ϕ et évacue de la chaleur par la résistance thermique R.

$$dH = \delta Q_{reçu} + \delta Q_{source}$$

$$C\,\frac{dT}{dt}\,dt = -\,\frac{T-T_{rad}}{R}\,dt + \phi\,dt$$

Bilan thermique pour le radiateur pendant dt
(le radiateur reçoit de la chaleur par R et évacue de la chaleur par R_{rad})

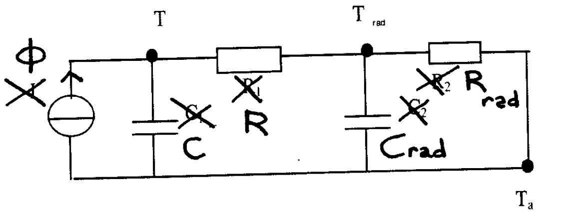
$$C_{rad}\,\frac{dT_{rad}}{dt}\,dt = \frac{T-T_{rad}}{R}\,dt - \frac{T_{rad}-T_a}{R_{rad}}\,dt$$

D'où les deux équations :

$$\boxed{\begin{aligned} C\,\frac{dT}{dt} &= \phi - \frac{T-T_{rad}}{R} \\ C_{rad}\,\frac{dT_{rad}}{dt} &= \frac{T-T_{rad}}{R} - \frac{T_{rad}-T_a}{R_{rad}} \end{aligned}}$$

---

17)



On a indiqué sur la figure les équivalents thermiques.
La loi des nœuds (en termes de tension) donne en T

$$\phi + C\,\frac{d}{dt}(T_a - T) + \frac{1}{R}(T_{rad} - T) = 0$$

et en T_{rad}

$$\frac{1}{R}(T - T_{rad}) + C_{rad}\,\frac{d}{dt}(T_a - T_{rad}) + \frac{1}{R_{rad}}(T_a - T_{rad}) = 0$$

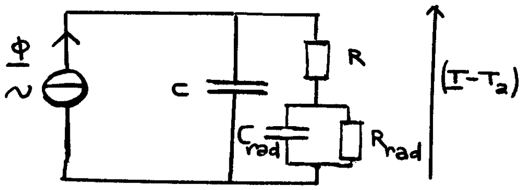
ce qui correspond bien aux équations précédentes.

---

18) On cherche :

$$\underline{H}(p) = \frac{(\underline{T} - T_a)}{\underline{\Phi}}$$

on peut déterminer cela en partant des équations différentielles précédentes mais le texte propose de repartir du schéma (on n'utilise pas ici la loi des nœuds en terme de potentiel comme précédemment)



$$\frac{(\underline{T}-T_a)}{\underline{\Phi}} = \underline{Z} \text{ ou } \frac{1}{\underline{Y}}$$

avec
$$\underline{Y} = jC\omega + \cfrac{1}{R + \cfrac{1}{jC_{rad}\omega + \frac{1}{R_{rad}}}}$$

$$= jC\omega + \cfrac{1}{R + \cfrac{R_{rad}}{jC_{rad}R_{rad}\omega + 1}}$$

$$= jC\omega + \frac{1 + jC_{rad}R_{rad}\omega}{R + jC_{rad}R_{rad}R\omega + R_{rad}}$$

$$= \frac{jC\omega(R+R_{rad}) - \omega^2 C C_{rad} R_{rad} R + 1 + jC_{rad}\omega R_{rad}}{(R+R_{rad}) + jC_{rad}R_{rad}R\omega}$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{(R+R_{rad}) + jC_{rad}R_{rad}R\omega}{1 + j\omega\left(C(R+R_{rad}) + C_{rad}R_{rad}\right) - \omega^2 C C_{rad} R_{rad} R}}$$

---

19) avec $\omega^2 C C_{rad} R_{ad} R \ll 1$

$$\underline{H} \simeq \frac{(R+R_{rad}) + jC_{rad}R_{rad}R\omega}{1 + j\omega(CR + CR_{rad} + C_{rad}R_{rad})}$$

$$\frac{(\underline{T}-T_a)}{\underline{\Phi}} = \underline{\hspace{3cm}}$$

L'equa diff est donc (avec $p \Leftrightarrow \frac{d}{dt}$) :

$$(\underline{T}-T_a) + \frac{d}{dt}(\underline{T}-T_a)\;(CR + CR_{rad} + C_{rad}R_{rad}) = (R+R_{rad})\phi + C_{rad}R_{rad}R\frac{d\phi}{dt}$$

si ϕ = cste :

$$\boxed{(T-T_a) + (CR + CR_{rad} + C_{rad}R_{rad})\frac{dT}{dt} = (R+R_{rad})\phi}$$

C'est un système du premier ordre avec

$$\boxed{\tau = (CR + CR_{rad} + C_{rad}R_{rad})}$$

Application numérique :

$$\tau = (CR + CR_{rad} + C_{rad}R_{rad})$$

$$= 100\,(0{,}5 + 2{,}5) + 200 \times 2{,}5$$

$$\boxed{\tau = 800\,s}$$

(13 min 20 s)

2c) → L'équa diff était :

$$(T - T_a) + \tau\frac{dT}{dt} = \underbrace{(R + R_{rad})\,\phi}_{\text{noté } (T_{lim} - T_a)}$$

de solution :

$$(T - T_a) = (T_{lim} - T_a)\,(1 - e^{-t/\tau})$$

→ Si on ne néglige pas $RR_{rad}CC_{rad}\,\omega^2$, l'équa diff est :

$$(T - T_a) + \tau\frac{dT}{dt} + \underbrace{(RR_{rad}CC_{rad})\frac{d^2T}{dt^2}}_{\text{terme négligé auparavant}} = (T_{lim} - T_a)$$

- On avait précédemment pour l'équation caractéristique la solution $r = -\frac{1}{\tau} = -1{,}25\;10^{-3}$ (s^{-1})
- Ici les deux solutions, après calculs, sont

$$r_1 = -1{,}30\;10^{-3}$$
$$r_2 = -30{,}7\;10^{-3}$$

La solution fait intervenir e^{r_1t} et e^{r_2t} mais puisque $|r_2| \gg |r_1|$, la solution en e^{r_2t} tend très vite vers zéro et il reste la solution en e^{r_1t}. Le système se comporte comme un système du premier ordre avec

$$r_1 \approx -\frac{1}{\tau}$$
