DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Moteurs électrostatiques....2
- I.Principe d'un moteur électrostatique de type condensateur plan....2
- II.Actionneur électrostatique à plaques parallèles....4
- III.Actionneur électrostatique linéaire....5
- IV.Étude dynamique du micro-moteur linéaire....6

Variomètre à affichage électronique....8
- I.Étude du système de capacités différentielles....8
- II.Oscillateur à pont de Wien....9
  - A.Étude du quadripôle....9
  - B.Étude du filtre de Wien....9
  - C.Montage oscillateur....10
- III.Étude globale du capteur....11

Laiton....12
- I.Oxydation d'un laiton....13
- II.Détermination de la composition d'un laiton....14
- III.Séparation du cuivre et du zinc....14

Moteurs électrostatiques

On peut créer des actionneurs électromécaniques (qui convertissent l'énergie électrique en énergie mécanique) à l'aide des champs électriques. Toutefois, vu les niveaux d'énergies mis en jeu dans les phénomènes électrostatiques, seuls des micro- moteurs sont développés industriellement.

Pour les applications numériques on prendra comme valeur de la permittivité du vide $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi\, 10^9} F.m^{-1}$ Lorsque l'isolant (diélectrique) utilisé n'est pas le vide, sa permittivité est modifiée et vaut $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ avec $\varepsilon_r \geq 1$: permittivité relative. Dans toutes les applications et tous les calculs effectués dans le vide on emploie ε_0 . Lorsque l'isolant n'est pas le vide, il suffit de remplacer ε_0 par le produit $\varepsilon_r \varepsilon_0$ dans toutes les formules et dans tous les calculs.

On négligera également dans tout le problème l'action de la pesanteur et on néglige tout frottement.

I. Principe d'un moteur électrostatique de type condensateur plan.

On considère un condensateur plan constitué de deux armatures métalliques très fines, de surfaces intérieures S séparées par un diélectrique de permittivité ε_0 (*figure* 1). Les armatures sont dans des plans parallèles au plan xOz . La distance entre les deux armatures est notée e et elle est supposée petite par rapport aux dimensions transversales des armatures. On peut donc négliger les effets de bord et considérer que le champ créé par les armatures dans la région considérée est le même que si les armatures étaient des plans illimités.

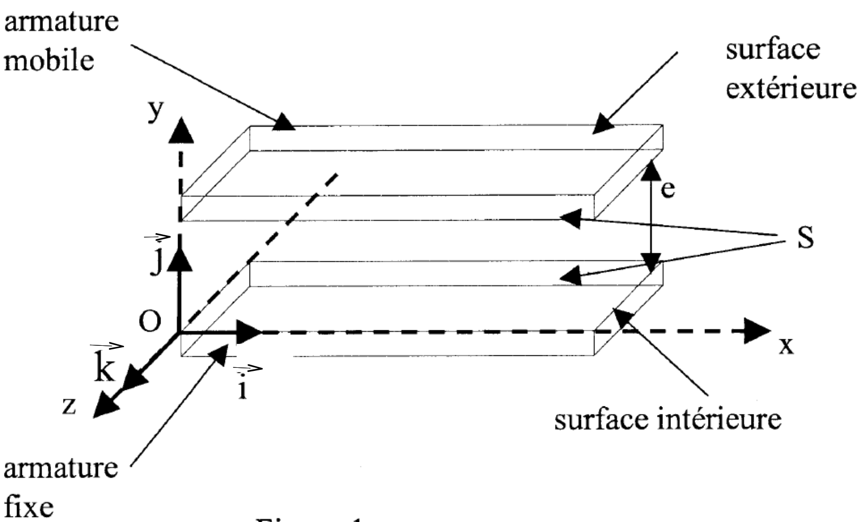


Figure 1.

L'armature située dans le plan xOz est fixe, l'autre est mobile en translation dans la direction de l'axe Oy

Les armatures portent des charges opposées. Les deux surfaces intérieures sont chargées uniformément avec une densité surfacique de charge $-\sigma$ pour l'armature mobile et $+\sigma$ pour l'armature fixe. Les deux surfaces extérieures sont supposées non chargées.

Dans la région située entre les deux armatures le vecteur champ électrique est noté $\vec{E}$. Au-dessus et en-dessous du condensateur, il est noté $\vec{E}_{ext}$.

1. Rappeler l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface.
2. En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer l'expression de $\vec{E}$ en fonction de σ , ε_0 . Préciser le vecteur unitaire. Démontrer de même l'expression de $\vec{E}_{ext}$.
3. En déduire l'expression de la capacité C du condensateur plan en fonction de ε_0 , S et e .
4. Soit un élément de surface dS de la surface interne de l'armature fixe. Quelle est la charge dq de cet élément de surface. Quel est le champ auquel est soumis dq de la part de l'autre armature
5. En déduire, en fonction des données, l'expression vectorielle de la force $\vec{F}'$ à laquelle est soumise l'armature fixe de la part de l'armature mobile. La force est-elle attractive ou répulsive ? On désigne par $\vec{F}$ la force à laquelle est soumise l'armature mobile de la part de l'armature fixe. Exprimer $\vec{F}$.
6. Application numérique. Déterminer $\|\vec{F}\|$ avec $\|\vec{E}\|=10^6\,V.m^{-1}$ et $S=1\,cm^2$.
7. Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique u_E en un point situé entre les plaques, en fonction de $\vec{E}$ et ε_0 . En déduire l'expression de l'énergie électrostatique totale U_E emmagasinée entre les armatures en fonction de ε_0 , S , e et de la tension U entre les plaques. (U est défini comme le potentiel de l'armature fixe par rapport à l'armature mobile).
8. On envisage une méthode énergétique pour retrouver l'expression de $\vec{F}=F\vec{j}$. On imagine pour cela (« expérience de pensée ») qu'un opérateur déplace l'armature mobile de $\vec{dl}=dy\,\vec{j}$ de manière quasistatique en exerçant donc une force $-\vec{F}$ (juste opposée à la force électrostatique) sur cette armature mobile ($\vec{j}$: vecteur unitaire de l'axe Oy). Les armatures du condensateur restent reliées au générateur de tension U .
   - Écrire le travail élémentaire de l'opérateur (énergie mécanique élémentaire reçue par le condensateur de la part de l'opérateur) en faisant intervenir l'inconnue F .
   - Quelle est l'expression de la charge élémentaire algébrique dQ qui a traversé le générateur de l'armature mobile vers l'armature fixe. Quelle est l'énergie électrique élémentaire reçue par le condensateur de la part du générateur au cours de ce transfert de charge.
   - Quelle est la variation élémentaire d'énergie électrostatique du condensateur.
   - En faisant un bilan d'énergie montrer que $F=\left(\frac{d\,U_E}{d\,y}\right)_{U\,constant}$
   - Comparer le résultat ainsi obtenu à celui déjà obtenu précédemment.
9. On insère entre les deux armatures un diélectrique liquide de permittivité relative ε_r .Ce diélectrique remplit tout l'espace situé entre les deux armatures. Quelle est la conséquence de cette modification sur la valeur de F ?

II. Actionneur électrostatique à plaques parallèles.

A partir du condensateur plan de la *figure* 1 , on peut réaliser des actionneurs électrostatiques utilisés couramment dans les systèmes mettant en œuvre des micro-pompes, des membranes déformables ou des micro-interrupteurs. L'armature fixe est reliée au bâti et l'armature mobile est reliée à un ressort de raideur constante k' . Ce ressort est lui-même relié au bâti fixe à son autre extrémité. Les deux armatures sont reliées à une source de tension réglable U . La permittivité du milieu inter-armature est celle du vide. Il est rappelé que l'action de la pesanteur est négligée.

L'armature mobile ne peut que se translater dans la direction de l'axe Oy . La position qui correspond au contact entre les deux armatures est choisie comme origine de l'axe Oy . En l'absence de tension d'alimentation ($U=0$) et à l'équilibre (repos du ressort), la distance inter-armatures est y_0 .

On admet que, en présence de la tension U , l'armature mobile subit une force électrostatique $\vec{F}=F\vec{j}=-\frac{1}{2}K\frac{U^2}{y^2}\vec{j}$. Des butées interdisent à l'armature mobile d'entrer en contact avec l'armature fixe.

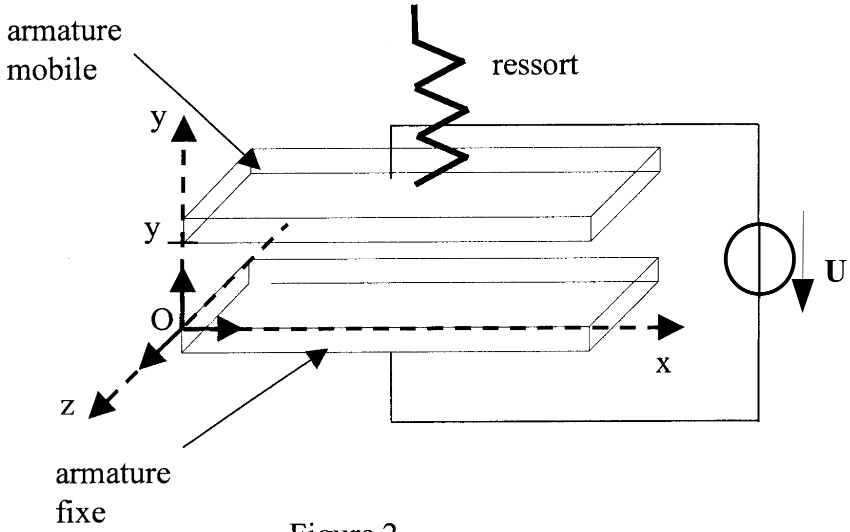


Figure 2.

10.Déterminer l'expression de la force de rappel mécanique $\vec{F_r}=F_r\vec{j}$ qu'exerce le ressort sur l'armature mobile, en fonction de k' , y_0 , y et $\vec{j}$. Tester la pertinence de la formule proposée dans les deux cas particuliers $y=y_0$ et $y\rightarrow 0^+$.

11.On applique la tension U constante. Quelle est la relation à l'équilibre ($y=y_{eq}$) entre F_r et F .

12.Pour y variant de 0^+ à y_0 tracer sur un même graphique l'allure de F_r et l'allure de $(-F)$ dans trois cas de fonctionnements différents obtenus pour trois valeurs différentes de U^2 strictement positives. Le premier graphique correspondra au cas où aucun point d'équilibre ne peut être obtenu, le deuxième au cas où un seul point d'équilibre peut être obtenu, enfin le troisième au cas où deux points d'équilibre peuvent être obtenus.

13.On suppose désormais que la tension d'alimentation U ne peut être que positive ou nulle. Déterminer la valeur notée U_{max} de la tension U pour laquelle n'existe qu'une position d'équilibre. Montrer qu'on a alors $y_{eq}=2y_0/3$. Quelle est la stabilité de cette position d'équilibre correspondant à $U=U_{max}$?

14. On suppose $0<U<U_{max}$; quel est le nombre de positions d'équilibre dans ce cas? Étudier leur stabilité. Même question pour $U>U_{max}$.

15. On donne: $K=9.10^{-16} F.m$. On souhaite réaliser un actionneur dont l'épaisseur au repos y_0 vaut $3\,mm$. Comment doit-on choisir le ressort de manière à obtenir un point d'équilibre stable pour toute valeur de la tension U entre 0 et $100\,V$?

16. Le diélectrique situé entre les deux armatures de l'actionneur a une permittivité égale à celle du vide. Quelle est la surface interne de chacune des deux armatures? On exprimera le résultat en mm^2 .

III. Actionneur électrostatique linéaire.

A partir du principe d'un condensateur plan (*figure* 1), on peut réaliser un actionneur électrostatique linéaire en insérant entre les deux armatures fixes rectangulaires une tranche mobile de diélectrique solide, parallélépipédique de permittivité relative ε_r (*figure* 3). L'air est assimilé au vide.

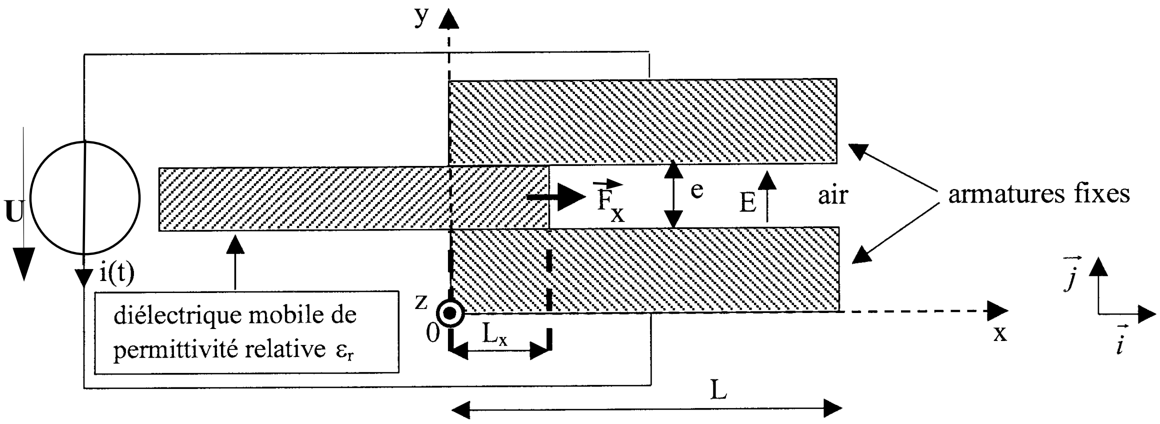


Figure 3.

Si on applique une différence de potentiel U aux bornes des deux armatures conductrices il se crée une force $\vec{F}$ qui tend à faire pénétrer le diélectrique mobile entre les deux armatures.

L'épaisseur du diélectrique mobile est égale à la distance e entre les deux armatures fixes. On note L la largeur d'une armature et L_x la largeur de recouvrement entre le diélectrique mobile et les armatures fixes. S représente comme précédemment la surface interne totale de chacune des deux armatures et S_x représente la partie de la surface interne d'une armature en contact avec le diélectrique mobile lorsque la largeur de recouvrement est L_x . On note aussi L_z la profondeur des armatures et du diélectrique selon z . Donc $S=L L_z$ et $S_x=L_x L_z$.

17. Les deux plans internes des armatures fixes sont chargés sur toute la surface S , le condensateur global peut être considéré comme une association de deux condensateurs parfaits. De quel type d'association s'agit-il ? On limite le domaine d'étude aux positions telles que x (abscisse de la face droite du diélectrique mobile)soit compris entre 0 et L . Déterminer

l'expression de la capacité $C(x)$ du condensateur en fonction de x , L , L_z , e , ε_0 et ε_r pour tout x compris entre 0 et L .

18.De même, quelle serait l'expression de $C(x)$ dans le cas $L<x<2L$?

Dans la suite, on suppose que $0<x<L$.

19.Déterminer l'expression de l'énergie électrostatique $U_E(x)$ localisée entre les deux armatures.

20.La résultante des forces qui s'exercent sur le diélectrique mobile est $\vec{F}=F\vec{i}$ avec $F=\left(\frac{dU_E}{dx}\right)_{U\,constant}$. Déterminer l'expression de F en fonction de la tension U et de e , ε_0 , ε_r et L_z .

21.Application numérique: $U=200\text{V}$; $e=3\,\mu m$; $L_z=50\,\mu m$; $L=0{,}1\,mm$. Déterminer numériquement F pour $\varepsilon_r=1$, $\varepsilon_r=7$ (Mica); $\varepsilon_r=12$ (Silicium). Commenter éventuellement les résultats.

IV. Étude dynamique du micro-moteur linéaire.

On considère le micro-moteur de la *figure* 3 . Il est alimenté par une source de tension $u(t)$. La masse du diélectrique mobile est $M=1{,}5\ 10^{-11}kg$.

22.La capacité, à l'instant t , du condensateur formé par l'actionneur dépend de la valeur de x au même instant: $C(x)=A+B.x$ avec $A=8{,}84.10^{-14}F$ et $B=8{,}83.10^{-8}F.m^{-1}$ pour toutes les valeurs de x comprises entre $x=0$ et une valeur maximale $x=x_{max}$. Dans quel intervalle x peut-il varier ($0<x<L$ ou $L<x<2L$) pour que la capacité soit en accord avec l'expression proposée ici. Justifier.

La résistance et l'inductance du circuit électrique qui alimente le micro-moteur sont supposées nulles. Le micro-moteur est équivalent du point de vue électrique à un condensateur parfait.

23.Un dispositif de blocage impose la condition $x(t<0)=0$; on alimente le micro- moteur par une source de tension constante $u(t)=U=200\text{V}$, et on libère, à l'instant $t=0$, le diélectrique mobile. Déterminer l'expression de $x(t)$ .Tracer la courbe $x(t)$ pour x variant de 0 à x_{max} . Déterminer et calculer numériquement la durée globale de l'opération.

24.Déterminer l'expression $i(t)$ de l'intensité du courant fourni par la source. Déterminer et calculer la valeur maximale i_{max} de $i(t)$.

25.On suppose maintenant que, grâce à un dispositif de blocage, le diélectrique mobile part d'une nouvelle position initiale $x=0{,}9\,L$, sa vitesse initiale étant à nouveau nulle. En agissant sur la tension $u(t)$, peut-on remettre en mouvement le diélectrique mobile pour qu'il retourne vers la position $x=0$? Justifier la réponse avec le plus de précision possible.

26.Quel élément mécanique simple pourrait-on ajouter au dispositif pour qu'il existe une position d'équilibre stable pour le diélectrique mobile en présence de tension. On choisira les caractéristiques de telle façon la position d'équilibre stable du système corresponde à $x=0$ pour une tension $u(t)$ nulle.

27.Trouver la condition pour que, avec cette modification, la butée, placée cette fois en $x=L$, ne soit pas percutée par le diélectrique mobile lorsque $u(t)=Cte=200\,V$, x et $\mathring{x}$ étant nuls à $t=0$.

Variomètre à affichage électronique

Un variomètre est un instrument de mesure de la vitesse verticale d'un engin volant. Cet appareil est indispensable aux pilotes des aéronefs sans moteur (planeurs, deltaplanes et parapentes) puisqu'il leur sert à détecter les courants d'air ascendants qui permettent à ces aéronefs de se maintenir en l'air ou de gagner de l'altitude.

Les variomètres de faible taille utilisent un capteur basé sur des condensateurs (voir *figure* 1). Les déplacements x d'un piston sont transmis à un système de condensateurs différentiels. Ces condensateurs permettent, à l'aide d'une électronique adaptée, de déterminer le déplacement x du piston qui, sous certaines conditions, supposées vérifiées ici, est une image de la vitesse verticale V_z de l'aéronef . On a $x=\lambda V_z$ où λ est une constante positive. Le capteur à capacités différentielles comporte quatre condensateurs C_{1a} , C_{1b} , C_{2a} et C_{2b} assimilables à des condensateurs plans. On négligera les effets de bord.

Au repos, défini par la position $x=0$, les armatures des condensateurs sont toutes distantes de e_0 . Elles ont une surface en regard S et baignent dans un liquide diélectrique de permittivité $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$ (Dans les formules de capacité, il suffira de remplacer ε_0 - cas du vide - par ε - cas du diélectrique -) .

On rappelle que, si l'on néglige les effets de bord, la capacité d'un condensateur plan est donnée par : $C=\varepsilon S/e$, où S est la surface des armatures en regard et e la distance séparant ces armatures.

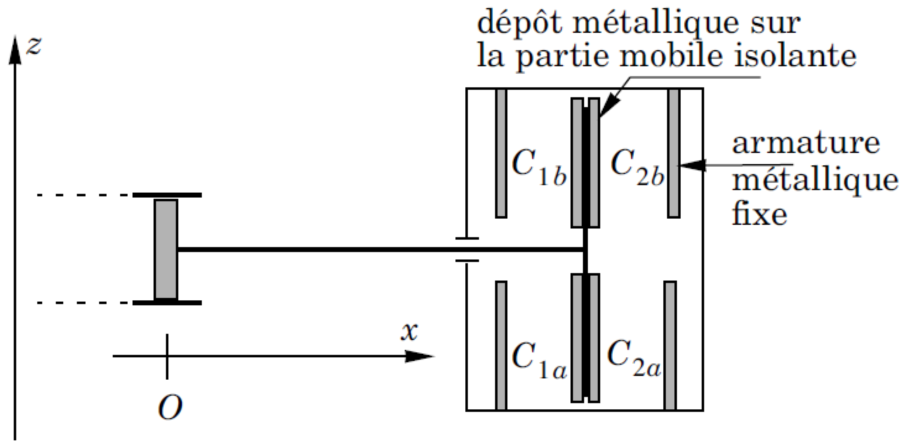


Figure 1

(Les armatures appartenant à un même plan vertical sont reliées électriquement entre elles deux par deux)

I. Étude du système de capacités différentielles

1. En négligeant les effets de bord, déterminer les expressions des capacités variables : C_{1a} , C_{1b} , C_{2a} et C_{2b} en fonction de ε , S , e_0 et x .

2. *Application numérique*.

$\varepsilon=1{,}6.10^{-8} F.m^{-1}$, $S=9\,cm^2$, $e_0=3\,mm$.

Déterminer la valeur commune des capacités lorsque $x=0$.

II. Oscillateur à pont de Wien

On supposera les amplificateurs opérationnels (AO) idéaux.

A. Étude du quadripôle

On considère le quadripôle de la *figure* 2 .

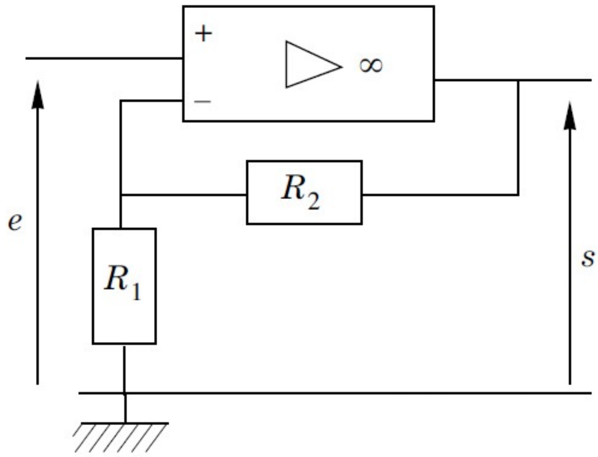


Figure 2

3. Déterminer la fonction de transfert $\underline{F}=\underline{S}/\underline{E}$ en fonction de R_1 et R_2 quand l'AO fonctionne en régime linéaire.

4. Tracer la caractéristique $s(e)$, c'est-à-dire le graphe représentant en ordonnée s en fonction de e en abscisse. On tiendra compte des tensions de saturation V_{sat} et $-V_{sat}$. Préciser pour quelles tensions d'entrée le fonctionnement de l'AO n'est plus linéaire en justifiant la réponse.

Dans toute la suite, les AO sont supposés fonctionner en régime linéaire.

5. Quelle est alors l'équation très simple reliant $s(t)$ à $e(t)$ dans le cas d'un signal quelconque ?

B. Étude du filtre de Wien

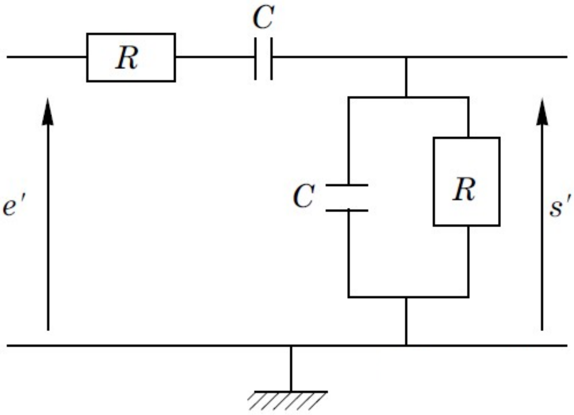


Figure 3

voir ci-dessus (*figure* 3).

6. Déterminer la fonction de transfert $\underline{G}=\underline{S}'/\underline{E}'$ en régime sinusoïdal.

7. Préciser les paramètres caractéristiques du filtre (gain maximum, facteur de qualité, pulsation particulière).

8. Tracer le diagramme de Bode (gain et phase) associé à $\underline{G}$. On fera apparaître sur chacun des graphes le tracé asymptotique et le tracé réel. Préciser les équations des asymptotes. Préciser les coordonnées des points particuliers. Quelle est la fonction de ce quadripôle ?

9. Déduire de la fonction de transfert l'équation différentielle reliant $s'(t)$ et $e'(t)$ dans le cas d'un signal d'entrée quelconque ? On pourra poser pour la recherche $p=j\omega$.

C. Montage oscillateur

On couple le filtre de Wien *figure* 3 avec le montage de la *figure* 2 : voir *figure* 4.

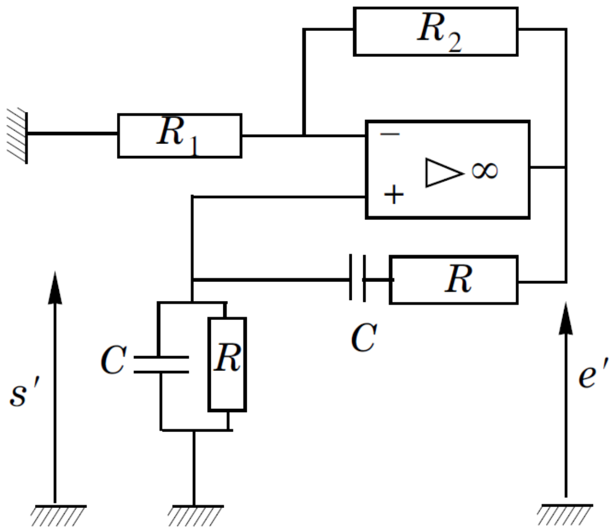


Figure 4

10. À partir des équations précédentes reliant $s(t)$ à $e(t)$ et $s'(t)$ à $e'(t)$, établir l'équation différentielle vérifiée par $s'(t)$.

11. Déduire de l'équation différentielle qu'il peut théoriquement exister un signal sinusoïdal sans générateur de signal basse fréquence pour une valeur $r=R_2/R_1$ et une fréquence particulière f à déterminer.

12. Calculer numériquement f si $R=10\,kHz$ et $C=4{,}8\,nF$.

13. C'est le "bruit" environnant (parasites) qui démarre les oscillations. Celles-ci ont des amplitudes extrêmement faibles, mais si les paramètres sont adaptés elles seront amplifiées. En pratique, on ne sait pas réaliser exactement la condition $r=R_2/R_1$. À partir de l'équation différentielle, montrer qu'une condition pour obtenir des oscillations est $r=R_2/R_1>n$ (n entier à définir). Si on choisit $R_2=10\,k\Omega$, les valeurs disponibles dans les catalogues étant $4{,}7\,k\Omega$, $5{,}6\,k\Omega$, $10\,k\Omega$, quelle valeur doit-on prendre pour R_1 ? Que se passe-t-il si on a $R_2/R_1<n$?

14. On utilise ici pour R_1 un potentiomètre. Si l'on fait varier la valeur de R_1 à l'aide du potentiomètre on constate que le signal en sortie de l'AO évolue entre une sinusoïde légèrement

écrêtée et un signal carré. En déduire un encadrement de l'amplitude maximale du signal de sortie du montage $s'(t)$ en ne gardant que le terme fondamental du développement en série de Fourier. On justifiera cette approximation, la sortie du montage étant $s'(t)$ et non pas $e'(t)$. Faire l'application numérique si la tension de saturation de l'AO vaut $V_{sat}=13\text{V}$.

III. Étude globale du capteur

Le capteur complet se compose du système de condensateurs C_{1a} et C_{1b}, de capacité C_1 et du système de condensateurs C_{2a} et C_{2b} de capacité C_2. Ces condensateurs sont utilisés dans deux oscillateurs sinusoïdaux à pont de Wien qui oscillent respectivement aux pulsations $\omega_l=1/RC_1$ et $\omega_2=1/RC_2$. Soit $v_1(t)=A.cos(\omega_1 t)$ le signal issu du premier oscillateur et $v_2(t)=A.cos(\omega_2 t)$ le signal issu du second oscillateur. Ces signaux sont traités par un montage électronique (voir *figure* 5) comportant un multiplieur qui fournit la tension $v_m(t)=k_m.v_1(t).v_2(t)$ et une cellule de filtrage $R'C'$, avec k_m une constante multiplicative.

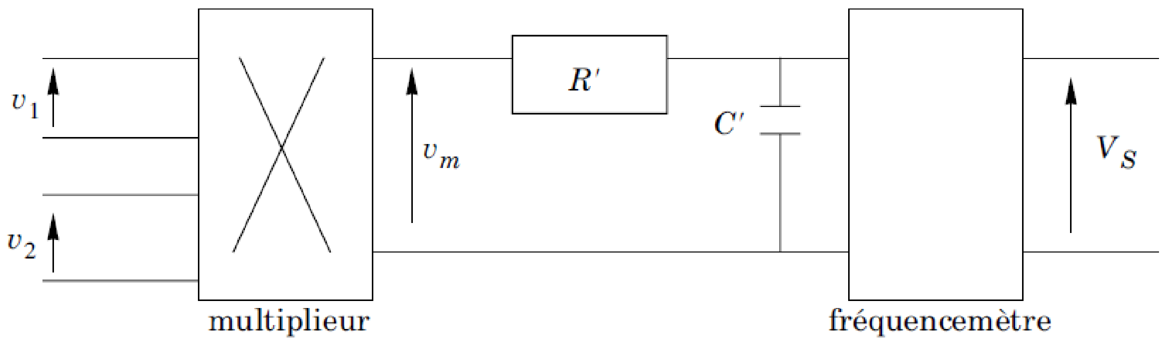


Figure 5

La tension $v_{C'}$ aux bornes du condensateur de la cellule $R'C'$ est alors analysée par un fréquencemètre qui délivre une tension continue V_S proportionnelle à la fréquence f de $v_{C'}$. On posera $V_S=\gamma f$.

15.Comment faut-il choisir le produit $\tau'=R'C'$ pour obtenir une tension V_S proportionnelle à x ?

16.Déterminer alors la relation entre V_S et la vitesse verticale de l'aéronef.

Laiton

Le laiton est un alliage de cuivre et de zinc dont les propriétés physiques dépendent fortement de sa composition. Le laiton étant très facile à usiner, il est utilisé pour la fabrication d'instruments de précision, d'instruments de musique, de robinetterie, de serrurerie.

Dans ce sujet, on aborde l'oxydation d'un laiton simple par l'acide nitrique concentré ce qui permettra de déterminer la composition de l'alliage étudié. On étudie la séparation, par précipitation sous forme de sulfure, des ions Cu^{2+} et Zn^{2+} obtenus lors de l'oxydation.

Données :

Masses molaires :

Masse molaire de Zn :	$65{,}390\, g.mol^{-1}$
Masse molaire de Cu :	$63{,}546\, g.mol^{-1}$
Masse molaire de S :	$32{,}066\, g.mol^{-1}$
Masse molaire de l'acide nitrique :	$63{,}013\, g.mol^{-1}$

Potentiels standards :

$E°(Cu^{2+}/Cu_s)$ =	$0{,}35\, V\,(E.S.H)$
$E°(Zn^{2+}/Zn_s)$ =	$-0{,}76\, V\,(E.S.H)$
$E°(NO_3^-/NO_g)$ =	$0{,}96\, V\,(E.S.H)$

Constantes d'équilibre :

$pKa(H_2S/HS^-)$ =	7,0
$pKa(HS^-/S^{2-})$ =	12,9
$pKs(ZnS_s)$ =	23,8
$pKs(CuS_s)$ =	35,2

Laiton et acide nitrique:

- Dans l'écriture de la formule du laiton Zn_xCu_y : $x+y=1$
- La réaction d'oxydation du laiton par l'acide nitrique est considérée totale
- L'acide nitrique HNO_3 est un acide fort
- Masse volumique à $25\,°C$ pour la solution d'acide nitrique de fraction massique $w=65\,\%$: $\rho=1{,}40\, g.mL^{-1}$
- Dans un mélange binaire A-B, la fraction molaire en A est définie par $x_A=\frac{n_A}{(n_A+n_B)}$ où n désigne un nombre de moles et la fraction massique en A est définie par

$$w_A = \frac{m_A}{(m_A + m_B)}$$ où m désigne une masse

Divers

- Une espèce A est notée A_s à l'état solide, A_g à l'état gazeux et A en solution aqueuse
- L'activité de toutes les espèces solides est égale à 1
- L'activité d'une espèce en solution aqueuse sera assimilée au rapport entre sa concentration exprimée en $mol.L^{-1}$ et la concentration de référence $C_0 = 1\,mol.\,L^{-1}$
- Les équations bilan des réactions d'oxydoréduction en phase aqueuse seront écrites en faisant intervenir exclusivement H_2O et H_3O^+ (elles ne feront apparaître ni H^+ ni HO^-)
- Formule de l'anion sulfure : S^{2-}
- Le nitrate de cuivre et le nitrate de zinc sont solubles dans l'eau

I. Oxydation d'un laiton

Le laiton est un alliage métallique contenant du zinc et du cuivre. Il est oxydé par une solution d'acide nitrique pour donner une solution contenant des ions Cu^{2+} et Zn^{2+} . Le dosage du cuivre et du zinc présents dans la solution permettra de déterminer la composition du laiton.

1. Écrire les demi-équations électroniques pour les couples :
   - Cu^{2+}/Cu_s
   - Zn^{2+}/Zn_s
   - NO_3^-/NO_g
2. Écrire la demi-équation électronique d'oxydation d'une mole de laiton Zn_xCu_y en Zn^{2+} et Cu^{2+}
3. Déduire de la question précédente l'équation bilan traduisant l'oxydation du laiton par les ions nitrates NO_3^-
4. Donner l'expression littérale, en fonction de x , de la masse molaire (M) du laiton Zn_xCu_y

On verse, à $25\,°C$, 5,00 mL de solution d'acide nitrique de fraction massique $65\,\%$ dans un bécher contenant $m = 1{,}5484\,g$ de laiton. Après réaction on introduit lentement la solution dans une fiole jaugée de volume $V = 0{,}500\,litre$ contenant de l'eau puis, on ajuste au trait de jauge avec de l'eau. Lors de cette expérience, on observe le dégagement gazeux du monoxyde d'azote NO qui s'oxyde en NO_2 au contact de l'air. Pour les calculs, on considérera $x = 0{,}5$ dans la formule Zn_xCu_y

5. Calculer la quantité de matière d'acide nitrique introduite dans le bécher.
6. Pour la solution contenue dans la fiole, donner l'expression littérale et la valeur numérique de la

concentration molaire en:

- Cu^{2+}
- Zn^{2+}
- NO_3^-
- H_3O^+

II. Détermination de la composition d'un laiton

Pour déterminer la composition du laiton, le cuivre présent dans la solution obtenue lors de l'oxydation d'une masse $m=1{,}5484\,g$ de laiton (opération décrite précédemment) est dosé par spectrophotométrie visible en mesurant l'absorbance A de la solution. Pour ce dosage, la droite d'étalonnage $A=f([Cu^{2+}])$ est donnée sur la figure.

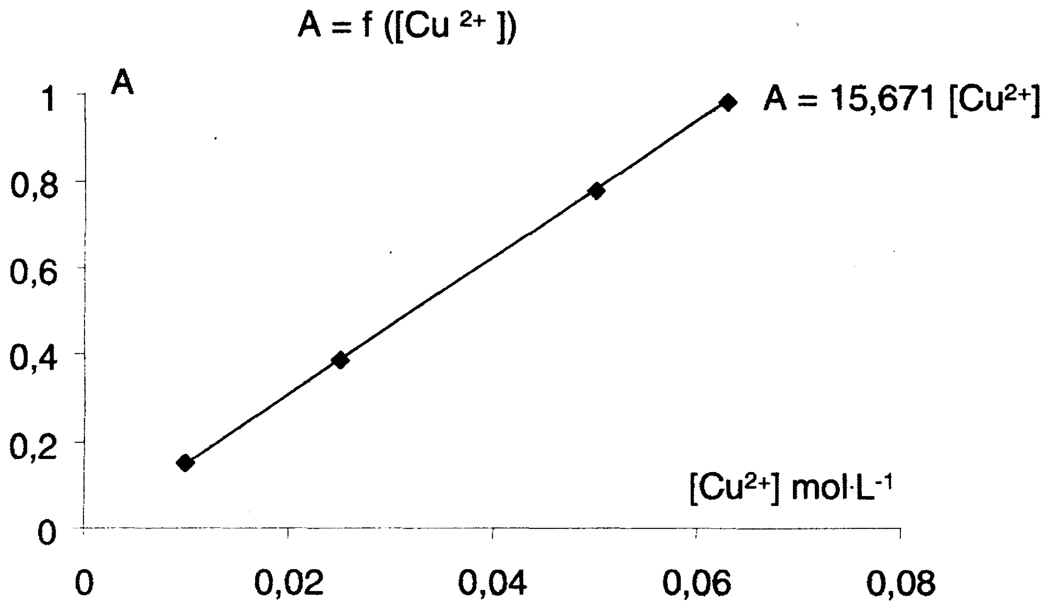


Figure : Absorbance mesurée à $\lambda_{max}=811\,nm$ *à* $25\,°C$ *dans une solution d'acide nitrique.*

7. L'absorbance de la solution obtenue lors de l'oxydation du laiton est $A=0{,}486$. En déduire le pourcentage massique de cuivre dans le laiton.

8. Calculer la valeur numérique « x » de la formule du laiton Zn_xCu_y , oxydé dans cette expérience.

III. Séparation du cuivre et du zinc

L'objectif est de déterminer si une séparation du cuivre et du zinc est possible en précipitant sélectivement un des deux sulfures. La solution étudiée est une solution de nitrate de cuivre et de nitrate de zinc, tous les deux à la concentration molaire $C=1{,}00.10^{-4}\,mol.L^{-1}$ dans l'acide nitrique à $pH=0{,}5$. Cette solution est saturée en sulfure d'hydrogène de telle sorte que la concentration $[H_2S]$ en sulfure d'hydrogène soit toujours égale à $0{,}100\,mol.L^{-1}$.

9. Écrire la réaction traduisant la précipitation du sulfure de zinc à partir des ions sulfures. Idem

pour la précipitation du sulfure de cuivre.

10. Quelles sont les espèces soufrées présentes en solution aqueuse et tracer leur diagramme de prédominance en fonction du pH.

11. Quelle condition doit vérifier la concentration molaire $[S^{2-}]$ pour ne pas observer la précipitation du sulfure de zinc ?

12. En déduire le domaine de pH pour lequel il n'y a pas précipitation du sulfure de zinc.

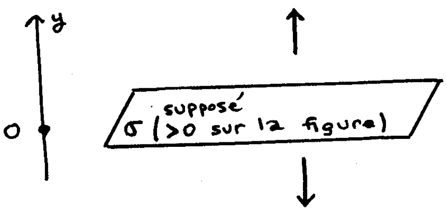
13. Pour la solution étudiée, la séparation est-elle possible? Justifier votre réponse.

14. On se propose de retrouver le résultat de la question 12 différemment. Déterminer l'espèce soufrée prédominante en solution en milieu acide. Écrire alors la réaction prépondérante traduisant l'équilibre de précipitation du sulfure de zinc dans ces conditions. Déterminer la constante d'équilibre (littéral et numérique) . En comparant avec le quotient de réaction (justifier) , retrouver le résultat de la question 12.

Réponses

Moteurs électrostatiques

1) Plan infini uniformément chargé :



$y>0$ $\quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_y}$

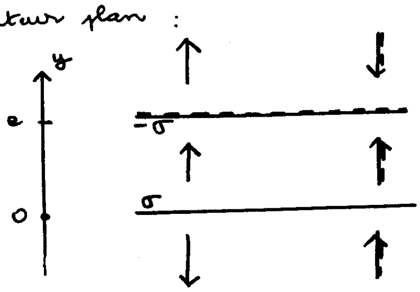
$y=0$ $\quad \vec{E}$ non défini

$y<0$ $\quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_y})$

(sauf en $y=0$, on peut écrire $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n_{ext}}$)

---

2) Condensateur plan :



On travaille par superposition : $\quad \vec{E} = \vec{E}_{(plan\ \sigma)} + \vec{E}_{(plan\ -\sigma)}$

$y<0$

$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_y}) + \frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_y})$

$0<y<e$

$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\vec{u_y}) + \frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_y})$

$y>e$

$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\vec{u_y}) + \frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}(\vec{u_y})$

$y<0$
$y>e$
$\vec{E}_{ext} = \vec{0}$

$0<y<e$
$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_y}$

---

3) Pour $0 < y < e$ et en remarquant que le potentiel est continu en $y=0$ et en $y=e$:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_y}$$

$$-\frac{dV}{dy} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{V(z=0)}^{V(z=e)} dV = -\int_{z=0}^{z=e}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dy$$

$$\underbrace{V(e) - V(0)}_{-U} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}e \qquad (E = U/e)$$

On aura $Q = C\,U$

Q : charge de l'armature fixe

U : V(armature fixe) − V(armature mobile) $= V(0) - V(e)$

finalement

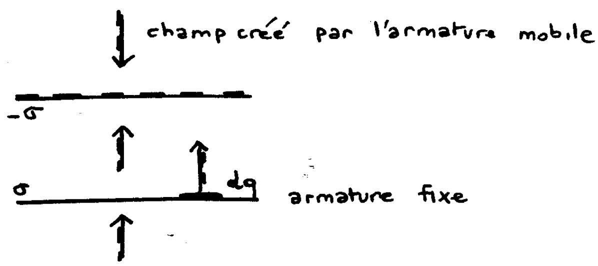
$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 U}{e}$$

$$Q = \sigma S = \frac{\varepsilon_0 S}{e}U$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$$

---

4)



$$\boxed{dq = \sigma\, dS}$$

est soumise au champ de l'autre armature

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}}$$

---

5) La force sur l'armature fixe est

$$\vec{dF'} = dq\,\vec{E}$$

$$= \sigma\, dS\,\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$$

$$\boxed{\vec{F'} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} S \, \vec{u_z}}$$

Cette force est dirigée vers l'armature mobile, il s'agit d'une force d'attraction

L'armature mobile est soumise à la force contraire

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} S \, \vec{u_z}}$$

---

6) A.N. avec $\|\vec{E}\| = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}$ (champ dans le condensateur)

$$\boxed{\|\vec{F}\| = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S \quad (= u_E S)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{36\pi \, 10^9} 10^{12} \, 10^{-4}$$

$$\boxed{\|\vec{F}\| = 0{,}442 \; 10^{-3} \text{ N}}$$

---

7)

$$\boxed{u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

$$U_E = \iiint_{\substack{\text{espace} \\ \text{interarmatures}}} u_E \, d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (S e)$$

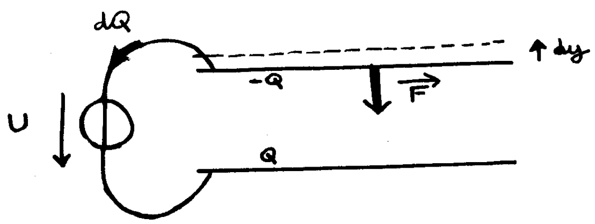
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{U}{e}\right)^2 S e$$

$$\boxed{U_E = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{e} U^2}$$

$$\left(U_E = \frac{1}{2} C U^2\right)$$

---

8)



$\longrightarrow$

$$\delta W_{\text{operateur}} = \vec{F'}_{\text{operateur}} \, \vec{dl}$$

$$= -\vec{F} \, \vec{dl}$$

$$\boxed{\delta W'_{\text{opérateur}} = -F \, dy}$$

→ la puissance fournie par un générateur est $P = UI$

et l'énergie fournie $\delta W_{\text{générateur}} = P\,dt = U I\,dt = dQ\,U$

(cf si la charge Q de l'armature fixe varie de dQ, cette charge dQ provient de l'armature mobile et le générateur a remonté son potentiel de U)

$$\boxed{\delta W_{\text{générateur}} = dQ\,U}$$

→ l'énergie du condensateur $W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU$

Ici Q change, U reste pareil et donc par exemple

$$\boxed{dU_E = \frac{1}{2}\,dQ\,U}$$

→ bilan d'énergie

$$dU_E = \underset{\substack{\text{reçue}\\(\text{transfert})}}{\delta U_E} + \underset{\substack{\text{produite}\\(\text{création, conversion})}}{\delta U_E}$$

$$dU_E = \delta W_{\text{générateur}} + \delta W_{\text{opérateur}}$$

$$\frac{1}{2}\,dQ\,U = dQ\,U - F\,dy$$

finalement on obtient :

$$-F\,dy = -dU_E$$

$$\boxed{F = \left(\frac{dU_E}{dy}\right)_{U\ \text{constant}}}$$

→ $$U_E = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{y}U^2$$

$$F = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{y^2}U^2$$

Pour $y = e$ avec $\left(\frac{U}{e}\right)^2 = E^2$

$$F = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S\,\vec{u}_y}$$

---

9) si $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, $\boxed{\vec{F} \text{ est multiplié par } \varepsilon_r}$

---

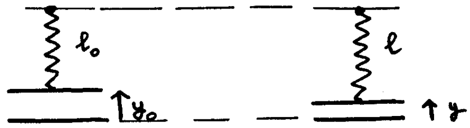
10) $\longrightarrow$ $\overrightarrow{F_r} = +k'(l - l_0)\,\overrightarrow{u_y}$

avec l longueur du ressort

l_0 " " à vide

il est évident que si $l > l_0$ la force est dirigée vers le haut.

$\longrightarrow$



et $l_0 + y_0 = l + y$ donc :

$$\boxed{\overrightarrow{F_r} = k'(y_0 - y)\,\overrightarrow{u_y}}$$

$\longrightarrow$ test :

- si $y = y_0$, on doit trouver $\underline{\overrightarrow{F_r} = \overrightarrow{0}}$ O.K.
- si $y \to 0^+$, le ressort est allongé de y_0 et on doit trouver $\underline{\overrightarrow{F_r} = k' y_0 \overrightarrow{u_y}}$ O.K.

---

11) Le poids n'étant pas à prendre en compte, à l'équilibre on aura :

$$\overrightarrow{F_r} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

$$F_r + F = 0$$

$$\boxed{F_r = -F}$$

remarque

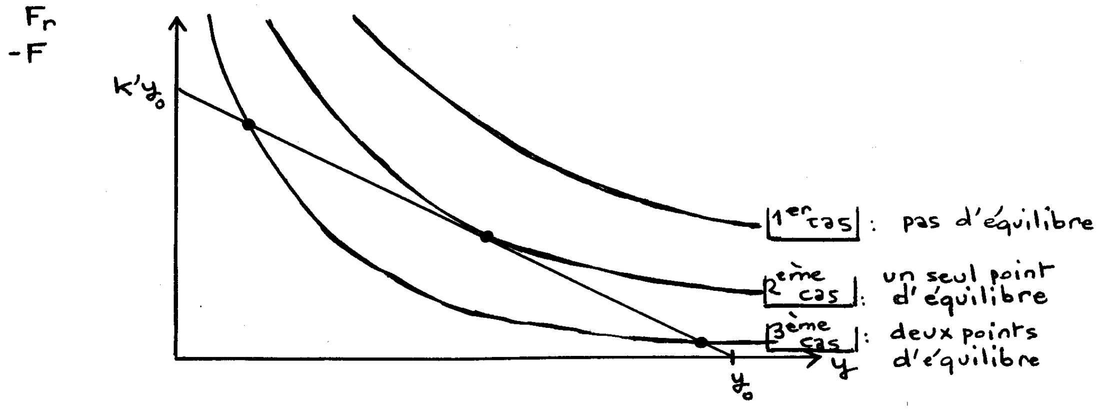
$$F = -\frac{1}{2} K \frac{U^2}{y^2}$$

ce qui est conforme à 8) avec $K = \varepsilon S$

---

12) $F_r = k'(y_0 - y)$ est une droite

$-F = \dfrac{K U^2}{2} \dfrac{1}{y^2}$ est une hyperbole cubique



---

13) On suppose qu'il n'existe qu'une seule position d'équilibre.

Donc $\boxed{k'(y_0 - y_{eq}) = \frac{1}{2} K \frac{U^2}{y_{eq}^2}}$ admet une racine :

En ce point, les deux courbes sont tangentes donc en dérivant :

$$\boxed{-k' = -K \frac{U^2}{y_{eq}^3}}$$

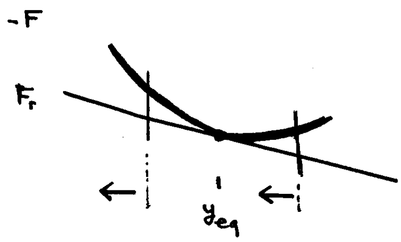
En faisant le rapport de ces deux équations :

$$y_0 - y_{eq} = \frac{1}{2} y_{eq}$$

$$\boxed{y_{eq} = \frac{2}{3} y_0}$$

et $$\boxed{U^2_{max} = \frac{8k'}{27K} y_0^3}$$

Stabilité



si $y > y_{eq}$ $\quad -F > F_r$

$F + F_r < 0$

force de rappel vers l'équilibre

si $y < y_{eq}$ $\quad -F > F_r$

$F + F_r < 0$

ce n'est pas une force de rappel

Cette position d'équilibre est donc globalement instable.

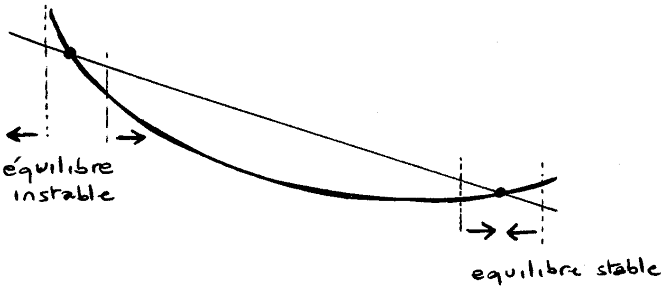
---

14) → si $U > U_{max}$

La courbe $(-F)$ est plus haut que dans le cas précédent et donc on se trouve dans le 1er cas : pas d'équilibre possible

→ si $0 < U < U_{max}$

On se retrouve dans le 3e cas



(voir étude en 13))

La position d'équilibre pour y plus grand est stable.

---

15) A.N. on veut donc $U_{max} > 100\,V$

$$k' = \frac{27\,K\,U_{max}^2}{8\,y_0^3}$$

$$k' > \frac{27 \quad 9\;10^{-16}\;(100)^2}{8\;(3\;10^{-3})^3}$$

$$\boxed{k' > 1{,}13\ N\,m^{-1}}$$

---

16) A.N.

$$K = \varepsilon_0\,S$$

$$S = \frac{K}{\varepsilon_0}$$

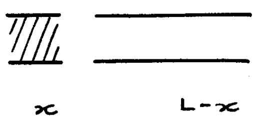
$$= \frac{9.\,10^{-16}}{1/36\pi\,10^9}$$

$$= 102\;10^{-6}\,m^2$$

$$\boxed{S = 102\ mm^2}$$

---

17)



Les deux condensateurs sont soumis à la même tension U donc <u>ils sont en parallèle</u>

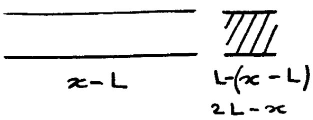
donc $C(x) = \sum_i C_i$

$$= \frac{\varepsilon_0 L_z (L-x)}{e} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r L_z\, x}{e}$$

$$\boxed{C(x) = \frac{\varepsilon_0 L_z}{e} \left(L + x(\varepsilon_r - 1) \right)}$$

---

18)



$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 L_z (x-L)}{e} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r L_z (2L-x)}{e}$$

$$\boxed{C(x) = \frac{\varepsilon_0 L_z}{e} \left(-x(\varepsilon_r - 1) + L(2\varepsilon_r - 1) \right)}$$

---

19)

$$U_E(x) = \frac{1}{2} C(x)\, U^2$$

$$\boxed{U_E(x) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 L_z}{e} (L + x(\varepsilon_r - 1))\, U^2}$$

---

20)

$$F = \left(\frac{dU_E}{dx} \right)_{U \text{ constant}}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) L_z\, U^2}{2e} \vec{u_x}}$$

---

21)

$\varepsilon_r = 1$ $\boxed{F = 0}$

$\varepsilon_r = 7$ $F = \frac{1 \quad (7-1) \quad 50\, 10^{-6} \quad 200^2}{36\pi 10^9 \times 2 \times 3.10^{-6}}$

$$\boxed{F = 17{,}6 \ \mu N}$$

$\varepsilon_r = 12$ $\boxed{F = 32{,}4 \ \mu N}$

Pour $\varepsilon_r = 1$ la lame est une lame de vide donc aucune modification lors de son déplacement.

La force augmente avec ε_r.

---

22) On a vu en 17) pour $0 < x < L$ que $C(x) = A + Bx$ avec $B > 0$

On a vu en 18) pour $L < x < 2L$ que $C(x) = A + Bx$ avec $B < 0$

donc ici $\boxed{B > 0 \quad \text{et} \quad 0 < x < L}$

(avec $B = \dfrac{\varepsilon_0 L_z (\varepsilon_r - 1)}{e}$)

---

23)
$$\vec{F} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} C(x)\right) U^2 \ \vec{u_x}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{B}{2} U^2 \ \vec{u_x}}$$

On applique le théorème de la résultante cinétique :

$$\vec{F} = M \vec{a}$$

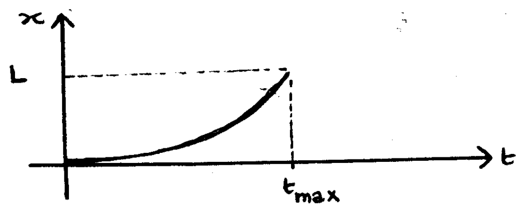
$$/\vec{u_x} \quad F = M \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{BU^2}{2M} = \text{constante}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{BU^2}{2M} t + \cancel{A_1} \quad \text{(cf C.I.)}$$

$$x = \frac{BU^2}{4M} t^2 + \cancel{A_2} \quad \text{(cf. C.I.)}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{4} \frac{BU^2}{M} t^2}$$



A.N. $t_{max} = \sqrt{\dfrac{4ML}{BU^2}}$

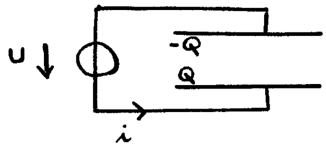
$$= \sqrt{\frac{4 \ 1{,}5\ 10^{-11} \ 0{,}1\ 10^{-3}}{8{,}83\ 10^{-8} \ 200^2}}$$

$$\boxed{t_{max} = 1{,}3 \ \mu s}$$

---

24) La charge du condensateur vaut

$$Q = CU$$



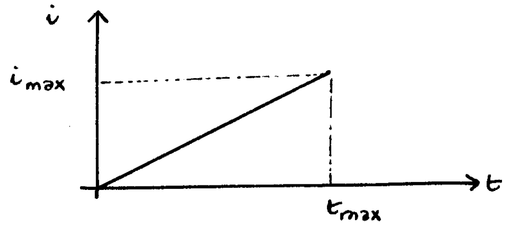
$$i = \frac{dQ}{dt}$$

$$= \frac{dC(x)}{dt} U$$

$$= \frac{dC(x)}{dx} \frac{dx}{dt} U$$

$$= B \quad v \quad U \qquad \text{avec} \quad v = \frac{1}{2} \frac{B U^2}{M} t$$

$$\boxed{i = \frac{1}{2} \frac{B^2 U^3}{M} t}$$



A.N. $\quad i_{max} = \frac{1}{2} \frac{B^2 U^3}{M} t_{max}$

$$\boxed{i_{max} = 2{,}71 \text{ mA}}$$

---

25) – La force est proportionnelle à U^2. Il est inutile de changer le signe de la tension, la force n'est pas modifiée

– Pour $0 < x < L$ (cf 17) l'accélération vaut : a

$L < x < 2L$ (cf 18) l'accélération vaut : $-a$

il faut donc essayer de jouer là-dessus pour inverser le mouvement.

– On peut (peut-être) le diélectrique étant en $x = 0{,}9\,L$, envoyer une très courte impulsion de tension. La tranche part vers les $x > 0$ et continue à vitesse constante (la tension est coupée) jusque $x = 2L$.

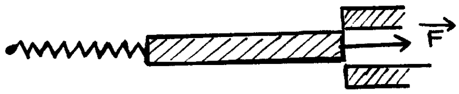
(on suppose un dispositif de blocage en $x = 2L$).

Il suffit alors d'envoyer une nouvelle impulsion et la tranche s'arrête sur le dispositif de blocage situé en $x = 0$.

(on peut aussi envisager de remettre définitivement la tension et le système accélère (cf: $-a$) deccélère (cf: $+a$) et s'arrête en $x = 0$.

---

26) On peut ajouter un ressort :



---

27) Si k désigne la constante de raideur du ressort, l'équation du mouvement est :

$$-kx + F = M\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{M}x = \frac{F}{M}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ et $F = \frac{BU^2}{2}$

$$x = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{F}{k}$$

C.I. $\begin{cases} 0 = A + \frac{F}{k} \\ 0 = B\omega_0 \end{cases}$

$$\boxed{x = \frac{F}{k}(1 - \cos\omega_0 t)}$$

On veut $x_{Max} < L$

$$\frac{2F}{k} < L$$

$$k > \frac{2F}{L}$$

$$\boxed{k > \frac{BU^2}{L}}$$

A.N. $k > \frac{8{,}83\ 10^{-8}\ (200)^2}{0{,}1\ 10^{-3}}$

$$\boxed{k > 35{,}3\ \text{N m}^{-1}}$$

Variomètre à affichage électronique

1) $$\boxed{\begin{aligned} C_{1a} &= C_{1b} = \frac{\varepsilon S}{e_0 + x} \\ C_{2a} &= C_{2b} = \frac{\varepsilon S}{e_0 - x} \end{aligned}}$$

---

2) A.N. $$C_0 = \frac{\varepsilon S}{e_0} = \frac{1{,}5\ 10^{-8}\ 9\ 10^{-4}}{3\ 10^{-3}}$$

$$\boxed{C_0 = 4{,}8 \ nF}$$

---

3) on a $$v_+ = e$$

$$v_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\, s$$

(cf diviseur de tension. La sortie du diviseur est bien à vide, ne débitant aucune intensité)

$$\varepsilon = v_+ - v_- = e - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\, s$$

Le régime étant supposé linéaire $v_S = \mu \varepsilon$ avec μ infini pour un AO idéal donc ε est ici nul

$$s = \frac{R_1 + R_2}{R_1}\, e$$

$$\boxed{s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) e}$$

$$\boxed{\underline{F} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}$$

---

4) Dans le cas de saturation :

⟶ supposons $s = + V_{SAT}$

alors $$\varepsilon = e - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{SAT}$$

avec (vérification de cohérence)

$$\varepsilon > 0$$

$$\boxed{s = +V_{SAT} \qquad e > \frac{R_1}{R_1+R_2} V_{SAT}}$$

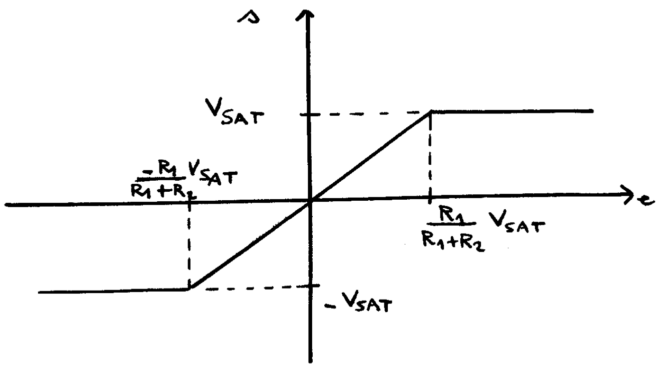
$\longrightarrow$ supposons $s = -V_{SAT}$

alors $\varepsilon = e + \dfrac{R_1}{R_1+R_2} V_{SAT}$

avec (vérification de cohérence)

$\varepsilon < 0$

$$\boxed{s = -V_{SAT} \qquad e < -\frac{R_1}{R_1+R_2} V_{SAT}}$$



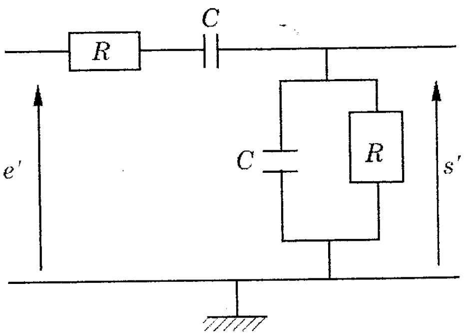
---

5) $$\boxed{s(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) e(t)}$$

(en régime linéaire)

---

6)



en utilisant la formule des diviseurs de tension :

$$\frac{\underline{s}'}{\underline{e}'} = \frac{\underline{Z}_{R//C}}{\underline{Z}_{R//C} + \underline{Z}_{R+C}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\underline{Y}_{R//C}}}{\frac{1}{\underline{Y}_{R//C}} + \underline{Z}_{R+C}}$$

$$= \frac{1}{1 + \underline{Y}_{R//C}\,\underline{Z}_{R+C}}$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)}$$

$$\boxed{\underline{G} = \frac{\underline{S}'}{\underline{E}'} = \frac{1}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}}}$$

---

7)

$$\underline{G} = \frac{1/3}{1 + j\ \frac{1}{3}\left(\frac{\omega}{(1/RC)} - \frac{(1/RC)}{\omega}\right)}$$

La forme canonique pour ce filtre passe-bande du deuxième ordre est

$$\underline{G} = \frac{H_o}{1 + j\ Q\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)}$$

d'où

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{gain maximum} = |H_o| = \frac{1}{3} \\ \text{facteur de qualité} = Q = \frac{1}{3} \\ \text{pulsation de résonance} = \omega_o = \frac{1}{RC} \end{array}}$$

---

8) J'écris ici :

$$\underline{G} = \frac{1}{3 + j\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)}$$

<u>si $\omega \ll \omega_o$</u>

$$\underline{G} \simeq \frac{1}{-j\,\omega_o/\omega}$$

les asymptotes sont

$$G = \frac{\omega}{\omega_o}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} G_{dB} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_o} \\ \varphi = \pi/2 \end{array}}$$

si $\omega \gg \omega_0$

$$\underline{G} \simeq \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

les asymptotes sont

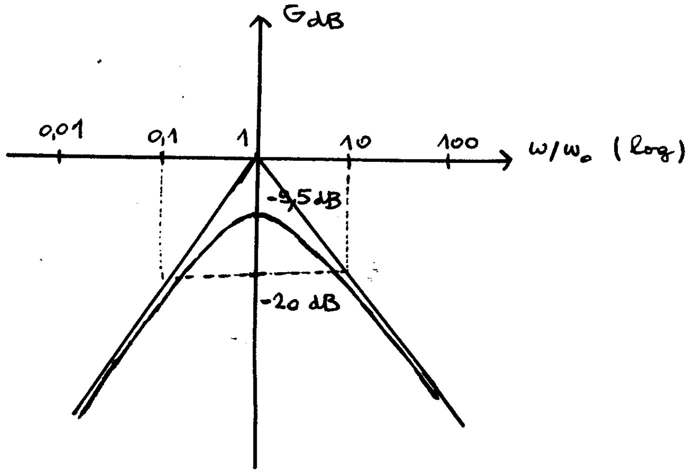
$$\boxed{\begin{aligned} G_{dB} &= -20 \log \frac{\omega}{\omega_0} \\ \varphi &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}}$$

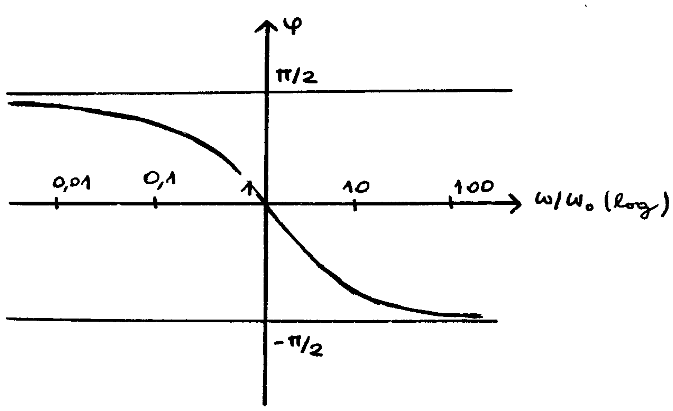
Remarque : si $\omega = \omega_0$

$$\underline{G} = \frac{1}{3}$$

$$G_{dB} = -20 \log 3$$

$$\boxed{\begin{aligned} G_{dB} &= -9{,}5 \text{ dB} \\ \varphi &= 0 \end{aligned}}$$





ce quadripôle est <u>un filtre passe-bande.</u>

---

9)
$$\frac{\underline{s}'}{\underline{e}'} = \frac{1}{3 + \frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}} \qquad \text{avec} \qquad p = j\omega$$

$$3\underline{s}' + \frac{1}{\omega_0} p \underline{s}' + \omega_0 \frac{\underline{s}'}{p} = \underline{e}'$$

on multiplie par $\omega_0 p$

$$3\omega_0 p\underline{s}' + p^2 \underline{s}' + \omega_0^2 \underline{s}' = \omega_0 p \underline{e}'$$

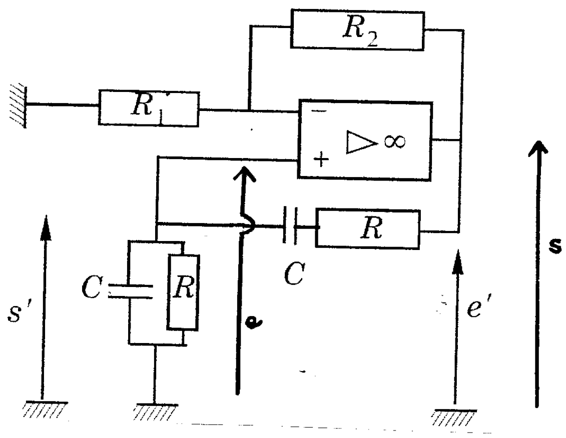
d'où l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d^2 s'}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{ds'}{dt} + \omega_0^2 s' = \omega_0 \frac{de'}{dt}}$$

$$\left(\omega_0 = \frac{1}{RC}\right)$$

---

10)



On aura donc $e' = s$

$s' = e$

de 5) $\quad s(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) e(t)$

soit : $\quad e'(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) s'(t)$

qu'on reporte dans 9)

$$\frac{d^2 s'}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{ds'}{dt} + \omega_0^2 s' = \omega_0 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{ds'}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2s'}{dt^2} + \omega_0\left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{ds'}{dt} + \omega_0^2 s' = 0}$$

---

11) Si le coefficient de $\frac{ds'}{dt}$ est positif, il y a amortissement de s'
Si le coefficient est négatif, il y a amplification de s'

Pour que la solution corresponde à un signal sinusoïdal, il faut que

$$\boxed{\frac{R_2}{R_1} = 2}$$

L'équation différentielle est alors :

$$\boxed{\frac{d^2s'}{dt^2} + \omega_0^2 s' = 0}$$

La fréquence correspond à celle que le filtre passe-bande sélectionne soit

$$f_0 = \omega_0/2\pi$$

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi RC}}$$

---

12) A.N.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\ 10^4\ 4{,}8\ 10^{-9}}$$

$$\boxed{f_0 = 3{,}32\ \text{kHz}}$$

---

13) En fait, il faut donc amplifier les parasites initiaux (qui "contiennent" toutes les fréquences – cf analyse de Fourier –). L'action du filtre et du bouclage sur l'A.O. amplificateur finit par ne conserver que la pulsation ω_0.

Pour amplifier, il faut (coefficient de l'équa diff en 11))

$$\omega_0\left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right) < 0$$

$$\boxed{\frac{R_2}{R_1} > 2}$$

A.N.

$$R_1 < \frac{R_2}{2}$$

$$\boxed{R_1 < 5\ \text{k}\Omega}$$

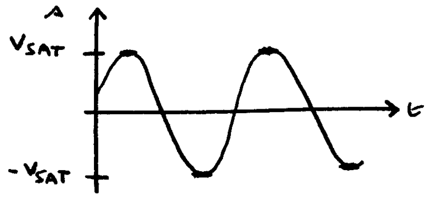
on va choisir :

$$\boxed{R_1 = 4{,}7\ k\Omega}$$

Si $\frac{R_2}{R_1} < 2$, on retrouve l'équation "habituelle" avec amortissemen donc les parasites s'éteignent et l'on n'aura pas de signal sinusoïdal ou autre en sortie

---

14) → Pour R_1 très légèrement inférieur à $5k\Omega$, on obtient en sortie de l'AO une sinusoïde légèrement écrêtée (de pulsation ω_0)

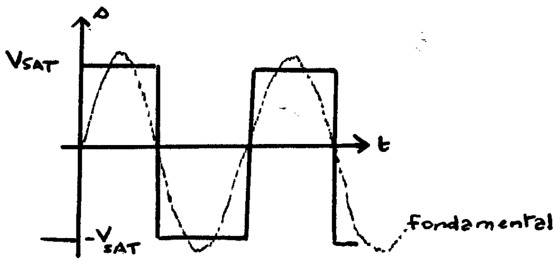


donc en sortie du filtre, on obtient (gain = $\frac{1}{3}$)

$$s' = \frac{V_{SAT}}{3} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{amplitude en sortie} = \dfrac{V_{SAT}}{3} \\ \qquad\qquad\qquad = 4{,}33\ V \end{array}}$$

→ Pour R_1 nettement inférieur à $5k\Omega$, on obtient en sortie un créneau



Ce signal passe ensuite dans le filtre.

$\boxed{\text{Le fondamental est à la pulsation } \omega_0 \text{ et le filtre passe-bande est centré sur } \omega_0}$

D'où l'approximation qui consiste à ne s'intéresser qu'au fondamental pour avoir une approximation du signal en s'.

L'amplitude du fondamental est donné par

$$B_1 = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) \sin \omega_0 t \, dt$$

$$= \frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2} V_{SAT}\,\sin\omega_0 t\; dt$$

$$= \frac{4\,V_{SAT}}{2\pi/\omega_0}\left[-\frac{\cos\omega_0 t}{\omega_0}\right]_0^{T_0/2}$$

$$= \frac{2\,V_{SAT}}{\pi}\underbrace{\left[1-\cos\frac{\omega_0 T_0}{2}\right]}_{2}$$

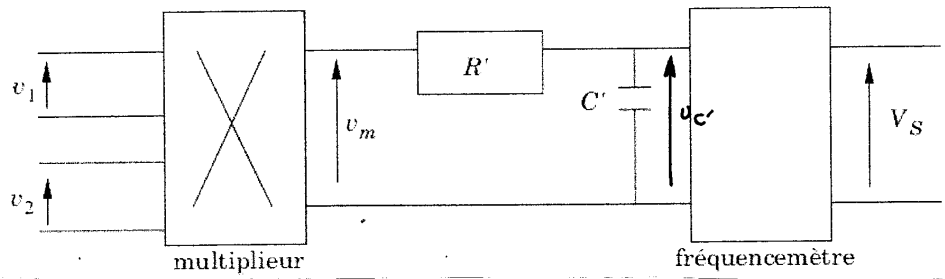
$$= \frac{4\,V_{SAT}}{\pi}$$

il faut multiplier par le gain $(= \frac{1}{3})$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{amplitude en sortie} &= \frac{4\,V_{SAT}}{3\pi} \\ &= 5{,}52\ \text{V} \end{aligned}}$$

---

15)



C_{1a} et C_{1b} sont en parallèle : $C_1 = \dfrac{2\,\varepsilon S}{e_0 + x}$ et $\omega_1 = \dfrac{1}{RC_1}$

C_{2a} et C_{2b} sont en parallèle : $C_2 = \dfrac{2\,\varepsilon S}{e_0 - x}$ et $\omega_2 = \dfrac{1}{RC_2}$

$$v_m = k_m\; v_1(t)\; v_2(t)$$

$$= k_m A^2 \cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$$

$$= \frac{k_m A^2}{2}\left(\cos(\omega_1+\omega_2)t + \cos(\omega_1-\omega_2)t\right)$$

Avec le filtre passe bas de pulsation de coupure $\frac{1}{R'C'} = \frac{1}{\tau'}$

on sélectionne le signal de pulsation $\omega_1-\omega_2$

$$\boxed{\omega_1-\omega_2 < \frac{1}{\tau'} < \omega_1+\omega_2}$$

---

16) Alors

$$V_s = \gamma f$$
$$= \gamma \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}$$
$$= \frac{\gamma}{2\pi R}\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\right)$$
$$= \frac{\gamma}{2\pi R}\left(\frac{e_0 + x}{2\varepsilon S} - \frac{e_0 - x}{2\varepsilon S}\right)$$
$$V_s = \frac{\gamma}{2\pi R \varepsilon S} \, \underbrace{x}_{\lambda V_z}$$

$$\boxed{V_s = \frac{\gamma \lambda}{2\pi R \varepsilon S} V_z}$$

Laiton

1)

(1)	$Cu^{2+} + 2e^- = Cu(s)$
(2)	$Zn^{2+} + 2e^- = Zn(s)$
(3)	$NO_3^- + 4H^+ + 3e^- = NO(g) + 2H_2O$

(on écrit ici des demi-réactions, c'est la raison pour laquelle on a gardé des H^+ dans la notation)

---

2) On fait

$$(4) = (1) \times -y + (2) \times -x$$

$$(4) \qquad Zn_x Cu_y = x\, Zn^{2+} + y\, Cu^{2+} + 2(x+y)\, e^-$$

avec $(x+y) = 1$

$$(4) \qquad \boxed{Zn_x Cu_y = x\, Zn^{2+} + y\, Cu^{2+} + 2e^-}$$

---

3) On fait

$$(5) = (3) \times 2 + (4) \times 3$$

$$2\,NO_3^- + 8H^+ + 3Zn_xCu_y = 2\,NO(g) + 4H_2O + 3x\,Zn^{2+} + 3y\,Cu^{2+}$$

c'est une réaction. On passe aux H_3O^+

$$(5) \qquad \boxed{2\,NO_3^- + 3\,Zn_xCu_y + 8\,H_3O^+ = 2NO(g) + 3x\,Zn^{2+} + 3y\,Cu^{2+} + 12\,H_2O}$$

---

4)

$$M = x\, M_{Zn} + y\, M_{Cu}$$
$$= x\, M_{Zn} + (1-x)\, M_{Cu}$$

$$\boxed{M = M_{Cu} + x\,(M_{Zn} - M_{Cu})}$$

A.N. $\quad = 63{,}546 + x\,(65{,}390 - 63{,}546)$

$$\boxed{M_{/g} = 63{,}546 + x \; 1{,}844}$$

---

5) masse de la solution d'acide nitrique :

$$m_{solution} = \rho \, v$$

$$= 1{,}40_{\;g.mL^{-1}} \quad 5{,}0_{\;mL}$$

$$= 7{,}0 \; g$$

ce qui correspond à une masse d'acide nitrique :

$$m_{HNO_3} = m_{solution} \; w$$

$$= 7{,}0_{\;g} \quad 65\,\%$$

$$= 4{,}55\,g$$

soit un nombre de moles :

$$n_{HNO_3} = \frac{m_{HNO_3}}{M_{HNO_3}}$$

$$= \frac{4{,}55\,g}{63{,}013\;g.mol^{-1}}$$

$$\boxed{n_{HNO_3} = 0{,}072 \; mol}$$

---

6) $$n_{laiton} = \frac{1{,}5484}{63{,}546 + 0{,}5 \;\; 1{,}844}$$

$$\boxed{n_{laiton} = 0{,}024 \; mol}$$

On écrit la réaction (5) avec $x = 0{,}5$

$$2\,NO_3^- + 3\,Zn_{0,5}Cu_{0,5} + 8\,H_3O^+ \overset{\text{(TOTALE)}}{=} 2\,NO\,(g) + 1{,}5\,Zn^{2+} + 1{,}5\,Cu^{2+} + 12\,H_2O$$

$n_{HNO_3} - 2\xi$	$n_{laiton} - 3\xi$	$n_{HNO_3} - 8\xi$	2ξ	$1{,}5\,\xi$	$1{,}5\,\xi$	/

Si NO_3^- est réactif limitant : $\xi_{final} = \frac{n_{HNO_3}}{2} = 0{,}036$ mol

Si H_3O^+ " " : $\xi_{final} = \frac{n_{HNO_3}}{8} = 0{,}009$ mol

Si le laiton " " : $\xi_{final} = \frac{n_{laiton}}{3} = 0{,}008$ mol

C'est donc le laiton qui est réactif limitant

$$\boxed{\xi_{final} = 0{,}008 \text{ mol}}$$

d'où les nombres de moles à la fin dans $\underline{V = 0{,}5\ L}$

	$2\ NO_3^-$	$+\ 3\ Zn_{0,5}Cu_{0,5}$	$+\ 8\ H_3O^+ \longrightarrow$	$2\ NO(g)$	$+\ 1{,}5\ Zn^{2+}$	$+\ 1{,}5\ Cu^{2+} + 12\ l$
moles fin	0,056	0	0,0082	0,016	0,012	0,012

et les concentrations, en divisant par 0,5 L

$$\boxed{\begin{aligned} [Cu^{2+}] &= 0{,}024 \text{ mol L}^{-1} \\ [Zn^{2+}] &= 0{,}024 \text{ mol L}^{-1} \\ [NO_3^-] &= 0{,}112 \text{ mol L}^{-1} \\ [H_3O^+] &= 0{,}016 \text{ mol L}^{-1} \end{aligned}}$$

---

7) $A = 15{,}671\ [Cu^{2+}]$

donc $[Cu^{2+}] = \frac{A}{15{,}671}$

$= \frac{0{,}486}{15{,}671}$

$$\boxed{[Cu^{2+}] = 0{,}031 \text{ mol L}^{-1}}$$

ce qui correspond à une masse de cuivre :

$m = [Cu^{2+}]\ V\ M_{Cu}$

$= 0{,}031 \times 0{,}5 \times 63{,}546$

$$\boxed{m_{Cu} = 0{,}985 \text{ g}}$$

et un pourcentage massique de cuivre

$w = \frac{m_{Cu}}{m_{Laiton}}$

$= \frac{0{,}985}{1{,}5484}$

$$\boxed{w_{Cu} = 63{,}6\ \%}$$

---

8) On cherche x connaissant w_{Cu}

$$w_{Cu} = \frac{\text{masse cuivre / mole}}{\text{(masse cuivre + masse zinc) ou masse molaire}}$$

$$= \frac{(1-x)\,M_{Cu}}{(1-x)\,M_{Cu} + x\,M_{Zn}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{x}{1-x}\,\frac{M_{Zn}}{M_{Cu}}}$$

$$\frac{1}{w_{Cu}} = 1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{M_{Zn}}{M_{Cu}}$$

$$\frac{x}{1-x} = \left(\frac{1}{w_{Cu}} - 1\right)\frac{M_{Cu}}{M_{Zn}}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{1 + \frac{M_{Zn}}{M_{Cu}}\,\frac{w_{Cu}}{1-w_{Cu}}}}$$

A.N.

$$= \frac{1}{1 + \frac{65{,}39}{63{,}546}\,\frac{0{,}636}{1-0{,}636}}$$

$$\boxed{x = 0{,}357}$$

---

9)

$$\boxed{\begin{aligned} Zn^{2+} + S^{2-} &= ZnS_{(s)} \\ Cu^{2+} + S^{2-} &= CuS\,(s) \end{aligned}}$$

---

10)

H_2S — 7,0 — HS^- — 12,9 — S^{2-} → pH

Les espèces soufrées présentes sont H_2S, HS^- et S^{2-}.

On peut remarquer qu'à pH = 0,5 l'espèce prédominante est H_2S et que donc les réactions écrites en 9) ne traduisent pas vraiment le phénomène. La réaction prépondérante devrait faire intervenir H_2S et non pas S^{2-}.

remarque : démonstration

H_2S / HS^-

$$H_2S + H_2O = H_3O^+ + HS^-$$

$$K_1 = \frac{[HS^-][H_3O^+]}{[H_2S]}$$

$$pH = pK_1 + \log \frac{[HS^-]}{[H_2S]}$$

A la frontière :

$$[HS^-] = [H_2S] = \frac{C_0}{2}$$

$$pH_{\text{frontière}} = pK_1 = 7{,}0$$

HS^- / S^{2-}

$$HS^- + H_2O = H_3O^+ + S^{2-}$$

$$K_2 = \frac{[S^{2-}][H_3O^+]}{[HS^-]}$$

$$pH = pK_2 + \log \frac{[S^{2-}]}{[HS^-]}$$

A la frontière

$$[S^{2-}] = [HS^-] = \frac{C_0}{2}$$

$$pH_{\text{frontière}} = pK_2 = 12{,}9$$

---

11) Il n'y a pas précipitation de ZnS si :

$$[Zn^{2+}][S^{2-}] < K_{s_{ZnS}}$$

$$\boxed{[S^{2-}] < \frac{K_{s_{ZnS}}}{C}}$$

A.N. $< \dfrac{10^{-23,8}}{10^{-4}}$

$$\boxed{[S^{2-}] < 10^{-19,8}}$$

---

12) On sait ici (solution qui est maintenue saturée en H_2S)

que $[H_2S] = 0{,}1 \text{ mol L}^{-1}$

On cherche $[S^{2-}]$

or $K_1 K_2 = \dfrac{[HS^-][H_3O^+]}{[H_2S]} \dfrac{[S^{2-}][H_3O^+]}{[HS^-]}$

$= \dfrac{[S^{2-}]}{[H_2S]} [H_3O^+]^2$

et donc l'inégalité précédente

$$[S^{2-}] < \frac{K_{S_{ZnS}}}{c}$$

devient

$$\frac{K_1 K_2 [H_2S]}{h^2} < \frac{K_{S_{ZnS}}}{c}$$

$$h^2 > \frac{K_1 K_2 [H_2S]\, c}{K_{S_{ZnS}}}$$

$$\boxed{2\,pH < pK_1 + pK_2 - pK_{S_{ZnS}} + pc + p[H_2S]}$$

A.N. $pH < \frac{1}{2}(7{,}0 + 12{,}9 - 23{,}8 + 4 + 1)$

$$\boxed{pH < 0{,}55}$$

---

13) Le même calcul en ce qui concerne le sulfure de cuivre donnerait

$$pH < -5{,}15$$

Donc à $pH = 0{,}5$ le sulfure de cuivre précipite mais pas le sulfure de zinc. La separation est donc possible. Le zinc reste en solution sous forme de Zn^{2+}

---

14) → L'espèce prédominante est $\boxed{H_2S}$.

→ La réaction prépondérante est alors :

$$\boxed{H_2S + Zn^{2+} + 2\,H_2O = ZnS\,(s) + 2\,H_3O^+ \qquad K}$$

avec $\boxed{K = \dfrac{K_1 K_2}{K_S}}$

remarque : démonstration

- soit (1) $H_2O + H_2S = H_3O^+ + HS^-$ $\qquad \Delta_r G_1^\circ = -RT \ln K_1$

(2) $H_2O + HS^- = H_3O^+ + S^{2-}$ $\qquad \Delta_r G_2^\circ = -RT \ln K_2$

(3) $ZnS(s) = Zn^{2+} + S^{2-}$ $\qquad \Delta_r G_3^\circ = -RT \ln K_s$

(4) $2H_2O + H_2S + Zn^{2+} = 2H_3O^+ + ZnS(s)$

$=(1)+(2)-(3)$ $\qquad \Delta_r G_4^\circ = -RT \ln K$

$$\Delta_r G_4^\circ = \Delta_r G_1^\circ + \Delta_r G_2^\circ - \Delta_r G_3^\circ$$
$$\ln K = \ln K_1 + \ln K_2 - \ln K_s$$

- soit expression de K

$$K = \frac{[H_3O^+]^2}{[H_2S][Zn^{2+}]}$$

on se trouve en présence de précipité de ZnS

donc $K_s = [Zn^{2+}][S^{2-}]$

De plus

$$K_1 K_2 = \frac{[S^{2-}][H_3O^+]^2}{[H_2S]}$$

finalement

$$K = \frac{K_1 K_2}{K_s}$$

→ La réaction n'a pas lieu si l'affinité est négative, c'est à dire si le quotient de réaction Q est supérieur à K

remarque : démonstration

$$-A = \Delta_r G = \underbrace{\Delta_r G^\circ}_{-RT\ln K} + RT \ln Q$$

$$A = RT \ln \frac{K}{Q} < 0$$

si

$$\frac{K}{Q} < 1$$

$$\boxed{Q > K}$$

$$\frac{h^2}{[H_2S][Zn^{2+}]} > \frac{K_1 K_2}{K_s}$$

$$k^2 > \frac{K_1 K_2}{K_S} [H_2S]\ c$$

On retrouve bien la condition trouvée en 12)