

DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 2 heures

Sujet

<u>Lampe à incandescence et bilans thermiques</u>	2
<u>I. Lampe à incandescence en régime permanent</u>	2
A. Détermination de la température du filament.....	2
B. Bilan énergétique et caractéristique du filament.....	2
C. Évolution de la température au voisinage des points de fixation en régime permanent.....	3
<u>II. Lampe à incandescence en régime sinusoïdal forcé basse fréquence</u>	4
A. Étude théorique de l'évolution périodique de la température dans le cas général.....	4
1) Équation d'évolution de la température.....	5
2) Valeur moyenne de la température.....	5
B. Cas d'une tension sinusoïdale.....	5
C. Étude expérimentale.....	6

Lampe à incandescence et bilans thermiques

I. Lampe à incandescence en régime permanent

A. Détermination de la température du filament

Le filament d'une ampoule à incandescence est constitué de tungstène très pur. En première approximation, les variations de la résistivité ρ de ce métal, fonction de la température, sont modélisables dans l'intervalle $[300\text{K}, 3000\text{K}]$ par une fonction du type $\rho = aT^2 + bT$ avec $a = 2,5 \cdot 10^{-14} \Omega \cdot m \cdot K^{-2}$ et $b = 2,3 \cdot 10^{-10} \Omega \cdot m \cdot K^{-1}$.

1. Rappeler l'expression locale de la loi d'Ohm.
2. On modélise le filament par un cylindre de rayon $r = 0,03 \text{ mm}$ et de longueur $L = 4 \text{ cm}$ à la température ambiante $T_A = 300\text{K}$. Exprimer la résistance électrique R du filament en fonction de la résistivité ρ , de r et de L . Vérifier explicitement l'homogénéité de la relation obtenue. Calculer $R = R_A$ à la température ambiante.
3. Lorsque la température du filament passe de T_A à une température de fonctionnement T , l'effet de la dilatation thermique s'ajoute a priori à la variation de résistivité. On admettra que les effets de cette dilatation sont négligeables devant les variations de ρ . Pour une tension $U = 5,60 \text{ V}$, on mesure $I = 0,539 \text{ A}$. Calculer la résistance R , quelle valeur doit-on attribuer à la température T du filament?

B. Bilan énergétique et caractéristique du filament

La caractéristique $I = f(U)$ d'une ampoule électrique à incandescence dépend étroitement des phénomènes thermiques se produisant au niveau du filament. Dans un premier temps, on suppose que les transferts thermiques par convection, à l'aide du gaz de remplissage, et par conduction, au niveau des supports du filament, sont négligeables devant les échanges par rayonnement. Le filament est supposé rayonner comme un corps noir et, malgré sa structure en hélice, on prend en compte lors des bilans énergétiques la totalité de sa surface latérale.

4. Rappeler la loi de Stefan du corps noir en précisant la définition et l'unité de chacun des termes utilisés.
5. Indiquer la nationalité de ce physicien, ainsi que la date approximative de ses travaux sur le rayonnement.
6. Sachant que la température de surface du soleil, assimilé à un corps noir vaut $T_S = 5900\text{K}$ et que son spectre d'émission en fonction de la longueur d'onde présente un maximum pour $\lambda_m = 0,474 \mu\text{m}$, calculer la longueur d'onde correspondant au maximum d'émission du filament pour sa température normale de fonctionnement $T_0 = 2600\text{K}$.
7. Le verre de l'ampoule absorbe dans l'infrarouge pour $\lambda > 3 \mu\text{m}$. Justifier l'échauffement du verre même en l'absence de gaz dans l'ampoule.
8. On suppose que le verre de l'ampoule se comporte lui aussi comme un corps noir de température $T_V = 420\text{K}$. Comparer le flux Φ , émis par rayonnement par le filament, et le flux Φ' qu'il

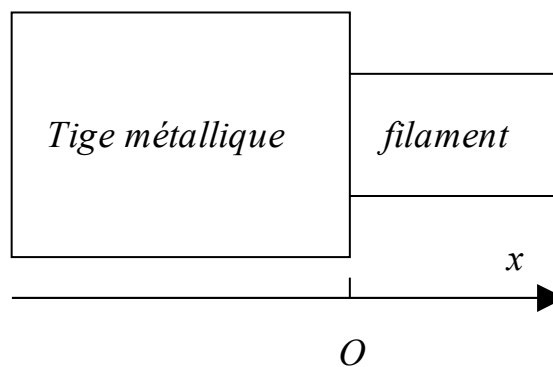
reçoit de la part du verre. On pourra justifier que ces deux grandeurs font intervenir la même surface. A partir de quelle température du filament Φ est-il supérieur à $10\Phi'$? Par la suite, on néglige dans tout le problème Φ' devant Φ .

9. Établir l'expression de la température T du filament en fonction de la puissance rayonnée P_r , de la constante de Stefan σ , du rayon r et de la longueur L du filament. Comment peut-on augmenter la puissance émise sans modifier ni le rayon r ni la température normale de fonctionnement du filament ?
10. On réalise une série d'expériences: dans chaque cas, on mesure U et I . On détermine T par calcul (voir première partie). On se propose de déterminer l'exposant de la loi de Stephan à partir de la série de mesures. Quel graphe ou quelle régression linéaire faut-il réaliser (quelle grandeur faut-il porter en ordonnée et quelle grandeur faut-il porter en abscisse et comment obtenir l'exposant recherché) ?
11. L'exposant de la loi de Stefan étant admis, déduire de la seule mesure précédente (pour $U=5,60 V$ on a $I=0,539 A$) une valeur, notée σ_{exp} , de la constante de Stefan.

En réalité, le filament ne se comporte pas comme un corps noir, mais comme un corps gris. Dans toute la suite du problème, c'est la valeur $\sigma=10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ qui sera utilisée et non la vraie valeur $5,68 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$.

C. Évolution de la température au voisinage des points de fixation en régime permanent

Comme il est indiqué sur le schéma, le filament est fixé à chacune de ces extrémités à une tige métallique de diamètre voisin de $0,5 mm$.



12. La température de chaque tige-support, égale à la température mesurée au niveau de la douille de l'ampoule, est considérée comme uniforme. Comment pourrait-on justifier cette supposition? Dans la suite, on note $T_V=420K$ cette température.

Dans la partie du filament située au voisinage du support, la température passe progressivement de $T_V=420K$ à $T_0=2600K$ sur une distance d que l'on cherche à évaluer. Comme on ne cherche qu'un ordre de grandeur pour d , on supposera ρ indépendant de la température.

On repère un point du filament, supposé cylindrique par son abscisse x comptée à partir du point de fixation. On a donc $T_{(x=0)}=T_V$. On néglige les échanges thermiques par convection mais on tient compte du phénomène de conduction thermique le long du filament en plus des transferts par rayonnement. Cette conduction thermique est supposée suivre la loi de Fourier. On se place en

régime permanent et on suppose, vu la faible valeur du diamètre du filament que la température $T(x)$ est uniforme dans une section droite.

De plus, on considère que, pour x suffisamment grand, la température du filament atteint la température d'équilibre T_0 . T est alors indépendant de x .

13. En faisant un bilan énergétique pour une portion de filament comprise entre x et $x+dx$, établir l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$. On fera intervenir r , ρ , σ , I et la conductivité thermique λ du tungstène.

14. Que devient cette équation pour x « grand » ? On fait alors apparaître la température d'équilibre T_0 du filament. Mettre finalement l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{(T^4 - T_0^4)}{\delta^2 T_0^3} = 0$$

15. Vérifier que δ est homogène à une distance. Donner l'expression littérale de δ en fonction de T_0 , r , λ et σ .

16. Application numérique: Calculer δ sachant que $\lambda = 92 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

17. En intégrant l'équation précédente, donner l'expression de $\left(\frac{dT}{dx}\right)^2$. En déduire alors une expression approchée de la pente à l'origine $\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0}$ sous la forme $\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \frac{\gamma T_0}{\delta}$.

18. Indiquer la valeur numérique de γ et estimer la distance caractéristique d sur laquelle le filament monte en température.

II. Lampe à incandescence en régime sinusoïdal forcé basse fréquence

A. Étude théorique de l'évolution périodique de la température dans le cas général

En dépit de l'inertie thermique du filament, lorsqu'on alimente une ampoule à incandescence avec une tension périodique $u_a(t)$ de période τ , la température du filament devient une fonction périodique du temps notée $T(t)$. On note m la masse du filament et c_p la capacité thermique massique du tungstène, supposée constante. Afin de proposer un modèle des phénomènes physiques observés, on retient les hypothèses simplificatrices suivantes:

- Le filament absorbe l'énergie électrique et rayonne comme un corps gris suivant la loi de Stefan. (On rappelle qu'il suffit de remplacer la vraie valeur de la constante de Stefan par la valeur différente σ fournie dans le texte: $\sigma = 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$)
- On néglige les phénomènes convecto-diffusifs et le rayonnement du verre de l'ampoule.
- La température $T(t)$, supposée uniforme dans tout le filament varie autour d'une valeur moyenne T_0 avec $T_0 = 2600 \text{ K}$. On note $\theta(t)$ l'écart en température : $T(t) = T_0 + \theta(t)$ avec $|\theta(t)| \ll T_0$.
- On néglige les variations de résistance du filament avec la température

$$R(T) \approx R(T_0) = R_0 \text{ avec } R_0 = 10,85 \Omega .$$

- La tension $u_a(t)$ varie suffisamment lentement pour que l'auto-inductance du filament puisse être négligée.

1) *Équation d'évolution de la température*

19. On suppose que la pression à l'intérieur de l'ampoule reste constante. Exprimer la variation d'enthalpie dH du filament lorsque la température varie de T à $T+dT$. Exprimer la puissance électrique instantanée reçue par le filament en fonction de $u_a(t)$ et R_0 . Exprimer la puissance rayonnée par le filament.

20. En effectuant un bilan énergétique simple, établir l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$. En déduire celle reliant $\theta(t)$ à $u_a(t)$. On fera apparaître dans cette dernière équation les grandeurs m , c_p , T_0 , σ , L , r et R_0 et on travaillera au premier ordre en $\theta(t)/T_0$.

2) *Valeur moyenne de la température*

21. Que vaut, par définition de T_0 , la valeur moyenne $\langle \theta(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \theta(t) dt$. Calculer aussi $\langle \frac{d\theta(t)}{dt} \rangle$ et justifier que la valeur moyenne de cette dérivée est nulle.

22. Déduire de l'équation différentielle établie à la *question 20*, la valeur de T_0 en fonction des constantes du problème et de la valeur efficace de $u_a(t)$ notée u_{aRMS} (RMS : root mean square) et donnée par la relation : $u_{aRMS}^2 = \langle u_a^2(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u_a^2(t) dt$. Comparer ce résultat à l'expression donnant la température du filament en fonction de la puissance rayonnée P_r , établie précédemment.

B. Cas d'une tension sinusoïdale

On étudie maintenant le cas où le filament est alimenté par une tension sinusoïdale $u_a(t) = U_a \sqrt{2} \cos(\frac{\omega t}{2})$. On suppose alors, que la température $T(t) = T_0 + \theta(t)$ varie sinusoïdalement autour de T_0 avec $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$ et $\theta_m \ll T_0$.

23. Exprimer la puissance électrique $P_e(t)$ fournie au filament en fonction de U_a , R_0 , ω et t .

24. Justifier la fréquence proposée pour l'expression de $\theta(t)$.

On pose $P_e(t) = P_0 + P_m \cos(\omega t)$ on note en complexes $\underline{P}_e(t) = P_0 + \underline{P}_m \exp(i\omega t)$ et $\underline{\theta}(t) = \underline{\theta}_m \exp(i\omega t)$ où $\underline{\theta}_m$ désigne une amplitude complexe.

25. En partant de l'équation différentielle traduisant le bilan thermique obtenue précédemment, montrer que la représentation complexe de l'écart en température est donnée par la relation

$$\frac{\underline{\theta}_m}{P_m} = \frac{Z_0}{1 + i \frac{\omega}{\omega_C}} . \text{ Donner les expressions de } Z_0 \text{ et de } \omega_C \text{ et vérifier les dimensions de ces}$$

deux grandeurs.

26. Montrer que l'on peut écrire ici : $\theta_m = \frac{\theta_0}{1 + i \frac{\omega}{\omega_c}}$. Vérifier que θ_0 après simplification, s'exprime de façon très simple en fonction de T_0 .

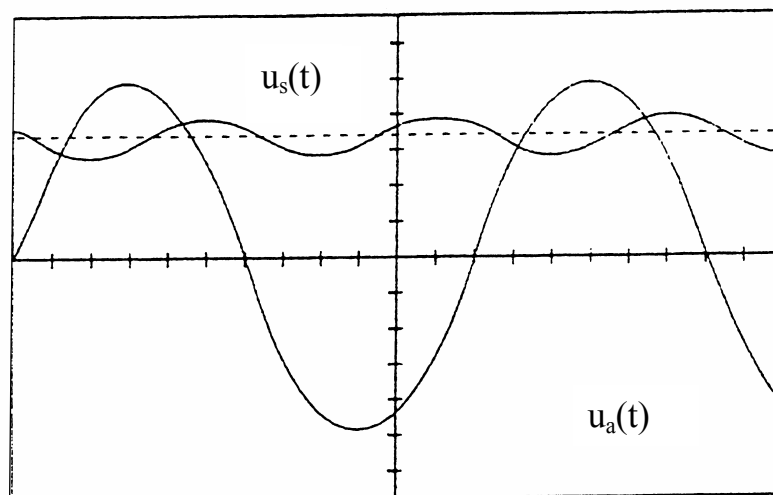
27. Application numérique : capacité thermique massique du tungstène: $c_p = 0.16 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, masse volumique du tungstène: $\mu = 19 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Calculer la fréquence de coupure ν_c .

28. Quelle est la nature du filtre que constitue le filament, en considérant $\theta(t)$ comme grandeur de sortie et la composante sinusoïdale de $P_e(t)$ comme grandeur d'entrée? Commenter la signification physique de ce filtrage.

C. Étude expérimentale

Afin de confronter l'expérience avec le modèle développé plus haut, on utilise un capteur optique, constitué d'une photodiode et d'un système électronique, délivrant une tension de sortie qui est l'image de la puissance lumineuse absorbée par la photodiode. La tension de sortie u_s capteur est reliée à la température T du filament par la relation : $u_s = K T^{7.5}$, expression dans laquelle K est une constante.

Pour étudier les oscillations de température du filament, on alimente une ampoule ($6V$; $0,55A$) par un générateur de tension sinusoïdale de fréquence $f = 20 \text{ Hz}$ et de valeur efficace U_a . La réponse de l'association photodiode-système électronique est visualisée sur un oscilloscope en même temps que la tension du générateur. Les deux voies de l'oscilloscope sont en mode DC. La valeur moyenne de la tension $u_s(t)$ vaut $7,1V$, tandis que la valeur efficace de sa composante alternative est égale à $0,84V$.



29. Commenter les fréquences des deux signaux obtenus.

30. Commenter la valeur choisie pour la fréquence f du générateur en comparaison à la valeur de la fréquence de coupure ν_c . Que peut-on en déduire pour $\frac{\theta_m}{T_0}$?

31. À l'aide des valeurs expérimentales déterminer l'amplitude θ_m des oscillations de température, sachant que la température moyenne vaut $T_0 = 2600 \text{ K}$.

32. Comparer cette valeur de θ_m à celle prévue par les résultats théoriques précédents.

Réponses

Lampe à incandescence
et bilans thermiques

1) Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$
↑ conductivité'

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$$

ρ : résistivité'

2) On sait que R est proportionnel à la longueur et inversement proportionnel à la section:

$$R = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{S}$$

$$R = \rho \frac{L}{\pi r^2}$$

avec $\rho = aT^2 + bT$
 ↑ ↑ ↑ ↑
 $\Omega.m.K^{-2}$ K^2 $\Omega.m.K^{-1}$ K

$$\left| \begin{array}{l} \rho \text{ en } \Omega.m \\ L \text{ en } m \\ r \text{ en } m \end{array} \right.$$

R en $\frac{\Omega.m m}{m^2}$ donc en Ω

A.N.

$$R_A = \frac{(aT_A^2 + bT_A) L}{\pi r^2}$$

$$= \frac{(2,5 \cdot 10^{-14} \cdot 300^2 + 2,3 \cdot 10^{-10} \cdot 300) \cdot 0,04}{\pi (0,03 \cdot 10^{-3})^2}$$

$$R_A = 1,01 \Omega$$

3)

$$R = \frac{U}{I}$$

A.N.

$$= \frac{5,60}{0,539}$$

$$R = 10,4 \Omega$$

avec

$$R = \frac{(aT^2 + bT) L}{\pi r^2}$$

$$aT^2 + bT - \frac{R\pi r^2}{L} = 0$$

A.N.

$$2,5 \cdot 10^{-14} T^2 + 2,3 \cdot 10^{-10} T - \frac{10,4 \times \pi \times (3 \cdot 10^{-5})^2}{0,04} = 0$$

$$T = 2,51 \cdot 10^3 \text{ K}$$

4) Le flux surfaccique hemisphérique émis par un corps noir vaut

$$\varphi = \sigma T^4$$

φ en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

σ : constante de Stefan en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

T : température de surface du corps noir.

5) Physicien autrichien (slovene)

Les travaux datent de fin XIX^e siècle (loi de 1879)

6) D'après la loi de Wien, on sait que

$$\lambda_m T = \text{cste}$$

Donc

$$\lambda_{\text{filament}} T = \lambda_{\text{soleil}} T_{\text{soleil}}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_{\text{soleil}} T_{\text{soleil}}}{T_{\text{filament}}}$$

$$\lambda = \lambda_m \frac{T_s}{T_o}$$

$$= 0,474 \mu\text{m} \frac{5900}{2600}$$

$$\lambda = 1,08 \mu\text{m}$$

(infrarouge proche)

- 7) La longueur d'onde $1,08 \mu\text{m}$ correspond au maximum d'émission. 98% de l'énergie est entre $\frac{\lambda_m}{2}$ et $8\lambda_m$. Il y a émission non négligeable pour $\lambda > 3\mu\text{m}$ ($\approx 3\lambda_m$), ces longueurs d'onde sont absorbées par le verre d'où son échauffement.

- 8) Flux émis par le filament :

$$\phi = \sigma T^4 S$$

(avec $S = 2\pi rL$)

Flux émis par le verre vers l'intérieur

$$\phi_v = \sigma T_v^4 S'$$

(avec S' surface interne du verre)

Flux émis par le verre et reçu par le filament, donc absorbé :

$$\phi' = \sigma T_v^4 S' K$$

($K < 1$)

pour traduire le fait qu'une partie du rayonnement émis par le verre arrive sur le verre)

On aura $KS' = S$

+ soit on considère la cavité (l'intérieur de l'ampoule) siège du rayonnement d'équilibre à la température T_v . Il faut pour cela imaginer que le filament étant très petit, il ne perturbe pas le rayonnement d'équilibre et $\phi' = \sigma T_v^4 S$

+ soit, on démontre rigoureusement que $KS' = S$.

On suppose filament, gaz, verre en équilibre thermodynamique et radiatif à la température T_{eq}

Les seuls échanges sont alors dus au rayonnement.

Le flux émis par le filament est $\sigma T_{eq}^4 S$.

Le flux absorbé par le filament est $\sigma T_{eq}^4 S' K$.

Ces flux sont égaux donc $S = KS'$

$$\frac{\phi}{\phi'} = \left(\frac{T}{T_v}\right)^4$$

A.N. Pour la température normale de fonctionnement :

$$\frac{\phi}{\phi'} = \left(\frac{T_0}{T_V}\right)^4$$

$$= \left(\frac{2600}{420}\right)^4$$

$$\frac{\phi}{\phi'} = 1,47 \cdot 10^3$$

(ϕ' est donc négligeable par rapport à ϕ)

A.N. On veut

$$\frac{\phi}{\phi'} > 10$$

$$\left(\frac{T}{T_V}\right)^4 > 10$$

$$T > T_V (10)^{1/4}$$

$$T > 747 \text{ K}$$

9)

$$P_r = \phi \text{ (question précédente)}$$

$$P_r = \sigma T^4 2\pi r L$$

Pour augmenter P_r (à T et r constants) il faut gouverner la longueur du filament. Il faut augmenter L (le filament sera alors roulé en hélice)

10) En régime permanent, puisque l'on néglige les transferts par conduction et par convection

$$U \cdot I \xrightarrow{\text{P électrique reçue}} = P_{\text{rayonnée}}$$

$$= P_r$$

$$= \sigma T^4 2\pi r L$$

On calcule $P = UI$ et on trace $\ln P$ en fonction de $\ln T$

$$\ln P = f(\ln T)$$

coeff directeur : 4

ordonnée à l'origine :

$$\ln(\sigma) + \ln(2\pi r L)$$

11) A.N.

$$\sigma_{\text{exp}} = \frac{U I}{2\pi r L T^4}$$

avec $T = 2,51 \cdot 10^3 \text{ K}$ (question 3)

$$\sigma_{\text{exp}} = 1,01 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

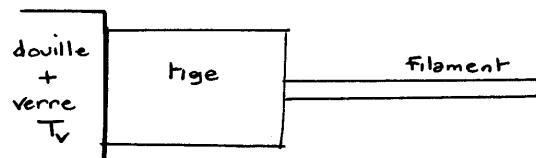
12) Le diamètre de la tige support est : 0,5 mm

Le diamètre du fil est de : 0,06 mm

Soit très grossièrement des sections dans un rapport ≈ 100

C'est ce rapport qui explique que la température de la tige puisse être considérée comme uniforme (et donc la tige forme "un réservoir de température" à la température T_v)

Remarque



dans le filament :

$$j_{\text{électrique}} = \frac{I}{\Delta}$$

$$P_{\text{volumique Joule}} = \frac{I^2}{\delta \Delta^2}$$

dans la tige :

$$j_{\text{électrique}} = \frac{I}{S}$$

$$P_{\text{volumique Joule}} = \frac{I^2}{\gamma' S^2}$$

(si on suppose $\gamma' \approx \gamma$, cette puissance est environ 10^4 fois plus petite que dans le filament)

Dans la tige, en régime permanent :

$$\text{div } \vec{j} = \underbrace{P_{\text{volumique Joule}}}_{\text{on néglige cf rapport } 10^4}$$

$$\text{div } \vec{j} \approx 0$$

Dans le verre :

$$T = T_v$$

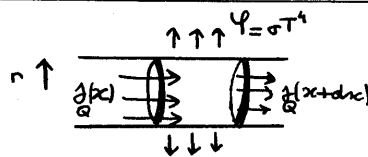
$$\vec{j} = \vec{0}$$

Finalement :

- à la naissance de la tige (contact avec douille) $\vec{j} = \vec{0}$ par continuité
- dans la tige $div \vec{j} = 0$

Si pour simplifier, on suppose la direction de \vec{j} imposée par le filament (\vec{j} selon \vec{u}_z), on trouve \vec{j} nul dans la tige donc T uniforme.

13)



Pendant dt, pour le volume entre x et x+dx

variation d'enthalpie = énergie reçue + énergie reçue + énergie
à pression constante par conduction par rayonnement produite par effet joule

$$0 \text{ (régime permanent)} = \frac{j_Q(x) \pi r^2 dt}{-} - \frac{j_Q(x+dx) \pi r^2 dt}{-} + (-\sigma T^4) 2\pi r dx dt + \frac{j^2}{\gamma} \pi r^2 dx dt$$

$$0 = -\frac{dj_Q}{dx} dx \pi r^2 dt - \sigma T^4 2\pi r dx dt + \frac{\rho I^2}{\pi r^2} dx dt$$

$$\text{avec } j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$0 = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} \pi r^2 - \sigma T^4 2\pi r + \frac{\rho I^2}{\pi r^2}$$

finalement :

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2\sigma}{\lambda} \frac{1}{r} T^4 + \frac{\rho}{\lambda} \frac{I^2}{\pi^2 r^4} = 0} \quad (1)$$

14) Si x est grand, la température tend vers une constante T_0 et donc $\frac{d^2 T}{dx^2}$ tend vers zéro. L'équation précédente devient alors :

$$\boxed{0 - \frac{2\sigma}{\lambda} \frac{1}{r} T_0^4 + \frac{\rho}{\lambda} \frac{I^2}{\pi^2 r^4} = 0} \quad (2)$$

$$\text{donc } T_0 = \left(\frac{\rho I^2}{2\sigma \pi^2 r^3} \right)^{1/4}$$

En faisant la différence: (1) - (2)

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2\sigma}{\lambda} \frac{1}{r} (T^4 - T_0^4) = 0$$

on pose:

$$\delta^2 T_0^3 = \frac{\lambda r}{2\sigma}$$

l'équation s'écrit alors:

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{(T^4 - T_0^4)}{\delta^2 T_0^3} = 0}$$

15) D'après l'équa diff précédente, en vérifiant les dimensions

$$\frac{[\theta]}{[L]^2} = \frac{[\theta]^4}{[\delta]^2 [\theta]^3} \quad \text{donc:}$$

$$\boxed{[\delta] = L}$$

remarque: vérification en partant de l'expression de δ

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{\lambda r}{2\sigma T_0^3} \\ [\delta]^2 &= \frac{[\text{thermique}]/([\theta][L]^{-1})}{[\text{thermique}]/[\theta]} [L] \\ &= L^2 \end{aligned}$$

avec

$$\boxed{\delta = \left(\frac{\lambda r}{2\sigma T_0^3} \right)^{1/2}}$$

16) A.N.

$$= \left(\frac{92 \times 3 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-8} \times 2600^3} \right)^{1/2}$$

$$\boxed{\delta = 2,8 \text{ mm}}$$

17) Pour intégrer, on multiplie par $\frac{dT}{dx}$ (supposé différent de 0)

$$\frac{d^2T}{dx^2} \frac{dT}{dx} = \frac{1}{\delta^2 T_0^3} \left(T^4 \frac{dT}{dx} - T_0^4 \frac{dT}{dx} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 = \frac{1}{\delta^2 T_0^3} \left(\frac{T^5}{5} - T_0^4 T + \text{cste} \right)$$

Pour x "grand", $T \rightarrow T_0$ et $\frac{dT}{dx} \rightarrow 0$. Donc pour x infini, l'équation s'écrit

$$0 = \frac{1}{\delta^2 T_0^3} \left(\frac{T_0^5}{5} - T_0^4 T_0 + \text{cste} \right)$$

(donc constante = $\frac{4}{5} T_0^5$)

$$\boxed{\frac{1}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 = \frac{1}{\delta^2 T_0^3} \left(\frac{T^5}{5} - T_0^4 T + \frac{4}{5} T_0^5 \right)}$$

On cherche la pente à l'origine (en $x=0$, $T = T_V$)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2_{x=0} = \frac{1}{\delta^2 T_0^3} \left(\frac{T_V^5}{5} - T_0^4 T_V + \frac{4}{5} T_0^5 \right)$$

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)^2_{x=0} = \frac{8 T_0^2}{5 \delta^2} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{T_V}{T_0} \right)^5 - \frac{5}{4} \frac{T_V}{T_0} + 1 \right)$$

A.N.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2,7 \cdot 10^{-5} & 0,20 & 1,0 \end{array}$$

A 20% près, on peut écrire

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)^2_{x=0} \approx \frac{8 T_0^2}{5 \delta^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} \approx \sqrt{\frac{8}{5}} \frac{T_0}{\delta}}$$

γ

18)

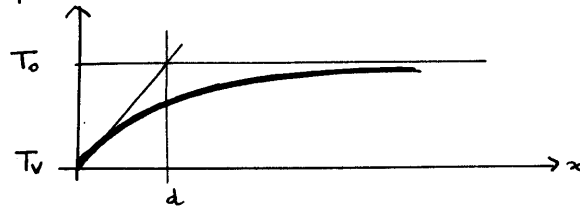
A.N. $\gamma = \sqrt{\frac{8}{5}}$

$$\boxed{\gamma = 1,26}$$

La distance désignée par δ apparaissant dans l'équa diff est petite par rapport à L ($\delta = 2,8 \text{ mm}$)

On introduit une distance caractéristique d en écrivant

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \frac{T_0 - T_V}{d - 0}$$



$$\gamma \frac{T_0}{\delta} = \frac{T_0 - T_V}{d}$$

$$d = \left(1 - \frac{T_V}{T_0}\right) \frac{\delta}{\gamma}$$

A.N. $d/\text{mm} = \left(1 - \frac{420}{2600}\right) \frac{2,8}{1,25}$

$$d = 1,9 \text{ mm}$$

19) à pression constante :

$$dH = m c_p dT + \cancel{dP}$$

nul

$$dH = m c_p \frac{dT(t)}{dt} dt$$

puissance électrique instantanée reçue par le filament :

$$P(t) = \frac{U_a^2(t)}{R_0}$$

puissance rayonnée par le filament :

$$P_r(t) = \sigma T(t)^4 \cdot 2\pi r L$$

20) Pendant dt , pour le filament, \bar{P} est

$$dH = -P_r(t) dt + P(t) dt$$

$$m c_p \frac{dT}{dt} = -\sigma T^4 \cdot 2\pi r L + \frac{U_a^2}{R_0}$$

on a

$$T = T_0 + \theta(t)$$

$$= T_0 \left(1 + \underbrace{\frac{\theta(t)}{T_0}}_{\varepsilon \ll 1} \right)$$

on travaille au premier ordre en ε

$$m c_p \frac{d\theta(t)}{dt} = -\sigma T_0^4 \left(1 + \frac{\theta(t)}{T_0} \right)^4 2\pi r L + \frac{u_a^2(t)}{R_0}$$

$$m c_p \frac{d\theta(t)}{dt} = -\sigma T_0^4 2\pi r L \left(1 + \frac{4\theta(t)}{T_0} \right) + \frac{u_a^2(t)}{R_0}$$

21) \rightarrow

$$T(t) = T_0 + \theta(t)$$

donc :

$$\underbrace{\langle T(t) \rangle}_{T_0} = T_0 + \langle \theta(t) \rangle$$

Par définition

$$\langle \theta(t) \rangle = 0$$

\rightarrow

$$\langle \frac{d\theta(t)}{dt} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d\theta}{dt} dt$$

$$= \frac{1}{\tau} (\theta_{(t=\tau)} - \theta_{(t=0)})$$

or la tension étant périodique, de période τ

$$\theta_{(t=\tau)} = \theta_{(t=0)}$$

$$\langle \frac{d\theta(t)}{dt} \rangle = 0$$

22) on prend la valeur moyenne de 20)

$$m c_p \langle \frac{d\theta}{dt} \rangle = -\sigma T_0^4 2\pi r L \left(1 + \frac{4\langle \theta \rangle}{T_0} \right) + \frac{\langle u_a^2 \rangle}{R_0}$$

$$0 = -\sigma T_0^4 2\pi r L (1 + 0) + \frac{\langle u_a^2 \rangle}{R_0}$$

$$T_0^4 = \frac{u_{a,RMS}^2}{2\pi r L \sigma R_0}$$

(on vient de trouver

$$\text{Puissance rayonnée} = \text{Puissance électrique reçue}$$

$$\sigma T_0^4 2\pi r L = \frac{u_a^2}{R_0}$$

(La puissance rayonnée étant obtenue en utilisant la température moyenne T_0)

23)

$$P_e(t) = \frac{u_a^2}{R_0}$$

$$P_e(t) = \frac{2U_a^2 \cos^2(\frac{\omega t}{2})}{R_0}$$

24)

$$P_e(t) = \frac{2U_a^2}{R_0} \left(\frac{1 + \cos \omega t}{2} \right)$$

$$P_e(t) = \underbrace{\frac{U_a^2}{R_0}}_{P_0} + \frac{U_a^2}{R_0} \cos(\omega t)$$

$P_e(t)$ varie autour de sa valeur moyenne avec une pulsation ω .
C'est pourquoi θ oscille avec la même pulsation ω (cf equation 23)

25) On part de 20) en notation complexe :

$$m_C \frac{d\theta(t)}{dt} = -\sigma T_0^4 2\pi r L \left(1 + \frac{4\theta(t)}{T_0} \right) + P_e(t)$$

$$m_C j\omega \underline{\theta}(t) = -\sigma T_0^4 2\pi r L \left(1 + \frac{4\theta(t)}{T_0} \right) + \underbrace{\frac{U_a^2}{R_0}}_{P_0} + \underbrace{\frac{U_a^2}{R_0}}_{P_m} \exp j\omega t$$

on sait aussi (par exemple 23) que

$$\sigma T_0^4 2\pi r L = P_0$$

Enfinement :

$$m_C j\omega \underline{\theta}_m \exp j\omega t = -\sigma T_0^4 2\pi r L \frac{4}{T_0} \underline{\theta}_m \exp j\omega t + P_m \exp j\omega t$$

$$\underline{\theta}_m \left(\sigma T_0^3 8\pi r L + m_C j\omega \right) = P_m$$

$$\underline{\theta}_m \left(1 + j\omega \frac{m_C}{8\pi r L \sigma T_0^3} \right) = \frac{P_m}{8\pi r L \sigma T_0^3}$$

$$\frac{\underline{\theta}_m}{P_m} = \frac{Z_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$Z_0 = \frac{1}{8\pi r L \sigma T_0^3}$$

$$\omega_c = \frac{8\pi r L \sigma T_0^3}{m c_p}$$

→ Z_0 doit avoir pour dimension $\frac{[\theta]}{[\text{puissance}]}$

$$\text{or } [8\pi r L \sigma T_0^3] = [L]^2 \frac{[\sigma T^4]}{[\theta]}$$

$$= \frac{[L]^2 [\text{puissance}] [L]^{-2}}{[\theta]}$$

$$= \frac{[\text{puissance}]}{[\theta]}$$

→ ω_c doit avoir pour dimension $[T]^{-1}$

$$[\omega_c] = \frac{[8\pi r L \sigma T_0^3]}{[M] [c_p]}$$

$$= \frac{[\text{puissance}] [\theta]^{-1}}{[M] [\text{energie}] [M]^{-1} [\theta]^{-1}}$$

$$= [T]^{-1}$$

25)

$$\theta_m = \frac{P_m Z_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$= \frac{P_0 Z_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$= \frac{\sigma T_0^4 2\pi r L \frac{1}{8\pi r L \sigma T_0^3}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$\theta_m = \frac{T_0/4}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

donc $\theta_0 = T_0/4$

27)

$$\omega_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$$

$$= \frac{4 r L \sigma T_0^3}{m c_p}$$

$$= \frac{4 r L \sigma T_0^3}{\pi r^2 L \rho c_p}$$

$$\omega_c = \frac{4\sigma T_0^3}{\pi r M \rho}$$

A.N.
$$= \frac{4 \cdot 10^{-8} (2600)^3}{\pi \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 19 \cdot 10^3 \cdot 0,16 \cdot 10^3}$$

$$\omega_c = 2,45 \text{ Hz}$$

28)
$$\frac{\theta_m}{P_m} = \frac{Z_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

Il s'agit d'un filtre passé bas.

A "basse" fréquence, on verra osciller la température.

A "haute" fréquence, les variations de $P_e(t)$ n'entraînent pas d'oscillations visibles de la température.

$$\omega \ll \omega_c \quad \theta_m \approx \frac{T_0}{4} \quad (= 650 \text{ K})$$

$$\omega = \omega_c \quad \theta_m = \frac{T_0/4}{\sqrt{2}} \quad (= 460 \text{ K})$$

$$\omega \gg \omega_c \quad \theta_m \approx -j T_0/4 \frac{\omega}{\omega_c} \rightarrow 0$$

29) La fréquence de ω_2 est :

$$\omega_2 = 20 \text{ Hz} \quad (= f)$$

La fréquence de ω_5 est double :

$$\omega_5 = 40 \text{ Hz} \quad (= 2f)$$

(cf 23) et 24)

30) On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_c} &= \frac{\omega_5}{\omega_c} \\ &= \frac{40}{2,45} \\ &= 16,3 \gg 1 \end{aligned}$$

On se trouve donc quasiment sur l'asymptote haute-fréquence

$$\frac{|\theta_m|}{T_0} \approx \frac{1}{4} \frac{\omega}{\omega_5} \quad (\text{cf 28})$$

