DNS

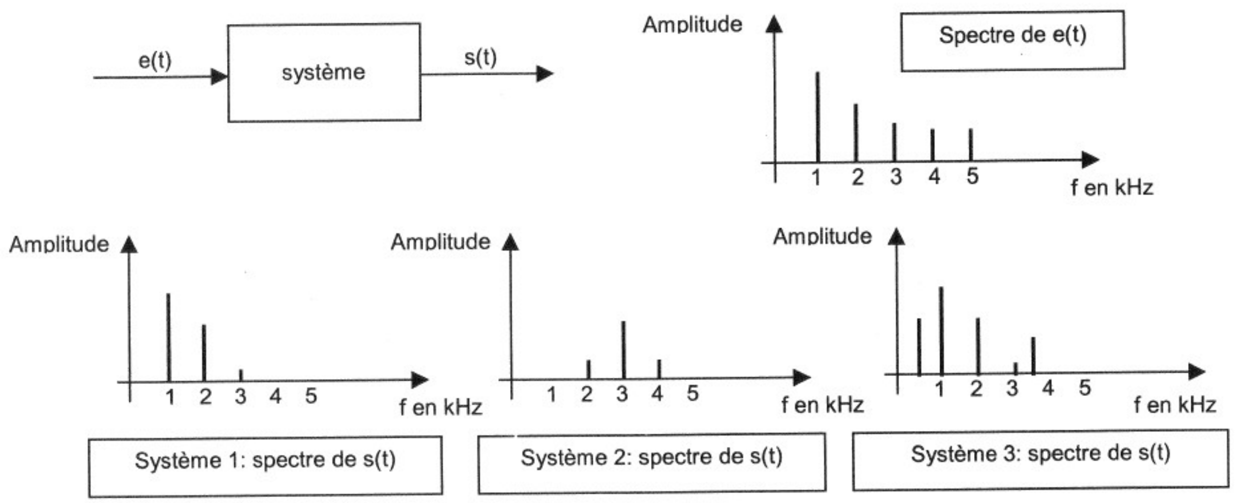
Sujet

Filtre

I. Généralités

1. Soit un système physique qui à une grandeur d'entrée fonction du temps $e(t)$ fait correspondre une grandeur de sortie fonction du temps $s(t)$. A quelle condition ce système peut-il être dit linéaire?

On étudie expérimentalement plusieurs systèmes(système 1 , système 2 et système 3) à l'aide d'un analyseur numérique. Pour cela on applique à leur entrée le même signal $e(t)$. On donne ci-dessous les spectres de Fourier du signal $e(t)$ ceux des signaux obtenus en sortie des trois systèmes.



2. Qu'appelle-t-on spectre de Fourier d'un signal périodique $s(t)$.

3. Le système 1 est-il linéaire? Quel est son rôle?

4. Qu'en est-il des systèmes 2 et 3 ?

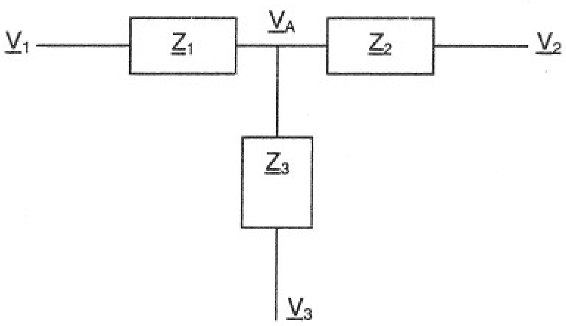
On utilise des dipôles linéaires en régime sinusoïdal. On note $u(t)=U\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi_u)$ la tension aux bornes d'un dipôle et $i(t)=I\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi_i)$ l'intensité du courant qui traverse le dipôle, $u(t)$ et $i(t)$ sont définis en convention récepteur.

5. Donner l'expression des grandeurs complexes associées à la tension et à l'intensité. Qu'appelle t-on amplitudes complexes associées à la tension et à l'intensité?

6. Établir l'expression de l'impédance $\underline{Z}$ complexe associée à chacun des dipôles idéaux suivants : résistance pure, capacité pure, inductance pure.

7. On mesure pour un dipôle linéaire particulier : $Z=A+jB$ avec $A=1\,k\Omega$ et $B=1\,k\Omega$ Calculer $i(t)$ si $u(t)=10\sqrt{2}\cos(\omega t)$ avec $u(t)$ en volts .

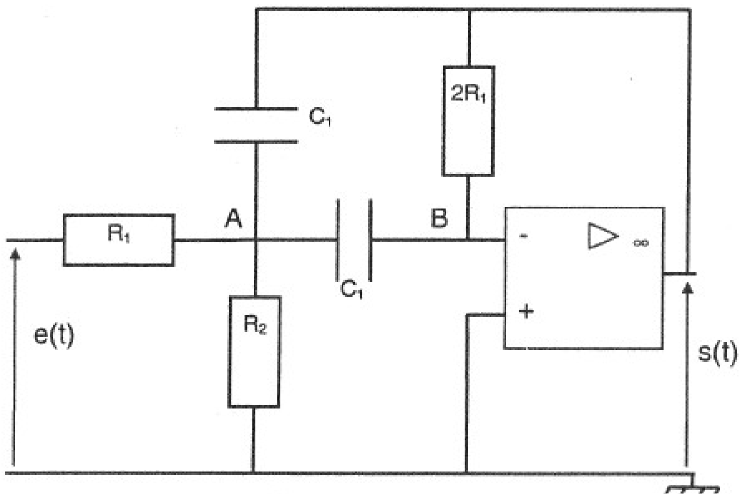
On considère le montage de la figure suivante:



8. Démontrer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{V}_A$ du potentiel au nœud A en fonction des admittances $\underline{Y}_i$ et des amplitudes complexes $\underline{V}_i$ des potentiels des extrémités des branches.

II. Filtre sélectif

On étudie le montage de la figure ci-dessous.



L'amplificateur est idéal et fonctionne en régime linéaire. On impose à l'entrée une tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω . On étudie la fonction de transfert du montage $\underline{H}=\underline{s}/\underline{e}$.

9. Pourquoi se contente-t-on d'étudier le transfert d'une grandeur sinusoïdale?.

10. Établir le système d'équations vérifiées par $\underline{V}_A$, $\underline{V}_B$, $\underline{s}$ en fonction de $\underline{e}$ et des éléments

du montage.

11.Écrire $\underline{H}(\omega)$ sous la forme canonique pour un filtre du second ordre. Donner l'expression du facteur de qualité Q et de la fréquence propre f_0 du filtre en fonction des grandeurs du montage R_1 , R_2 et C_1 .

12.Calculer les valeurs à donner à R_2 et C_1 sachant que $R_1=10,0\,kHz$ pour avoir $f_0=3,0\,kHz$, le facteur de qualité étant $Q=20$.

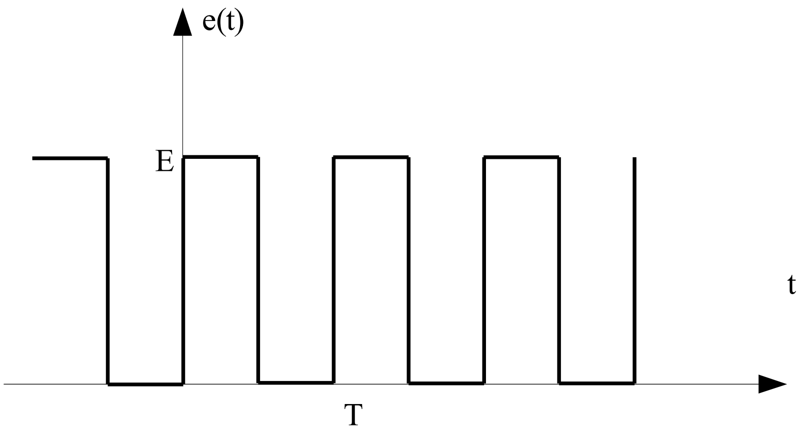
13.Montrer que le gain passe par un maximum pour une valeur de fréquence que l'on précisera.

14.Déterminer l'équation des asymptotes dans le diagramme de Bode en gain et tracer ce diagramme.

15.Calculer les fréquences de coupure à -3 dB et déterminer la bande passante (expression littérale puis valeur numérique).

III. Utilisation du filtre

On met à l'entrée du filtre étudié le signal créneau $e(t)$ représenté sur la figure avec $f=1,0\,kHz$ et $E=10\text{V}$.



On montre que l'on peut décomposer le signal $e(t)$ en une combinaison linéaire de sinusoïdes sous la forme :

$$e(t)=\frac{E}{2}+2\frac{E}{\pi}(\sin(2\pi f t)+\frac{1}{3}\sin(6\pi f t)+\frac{1}{5}\sin(10\pi f t)+...)$$

16.Comment s’appellent les divers termes et les diverses fréquences qui apparaissent dans l’expression de $e(t)$?

17.Déterminer l'expression du signal de sortie $s(t)$ en ne considérant que les 4 termes écrits ci-dessus. Application numérique.

18.Tracer sur le même graphe le signal d'entrée et le signal de sortie. Conclure.

Réponses

1) Système linéaire.

→ soit : à l'entrée $e_1(t)$ correspond la sortie $s_1(t)$
à l'entrée $e_2(t)$ correspond la sortie $s_2(t)$
alors à l'entrée $\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)$
correspond la sortie
$\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$

→ soit : l'équation (différentielle) liant $s(t)$ à $e(t)$ est linéaire
(fait intervenir les fonctions, leur dérivées mais <u>pas de produit</u> entre ces termes)

<u>exemple</u>

$s(t) = k\ e(t)^2$

- n'est pas linéaire (si $e \to 2e$, $s \to 4s$)
- Si $e(t)$ est en $\cos(\omega t)$, $s(t)$ est en $\cos^2(\omega t) = \dfrac{1+\cos(2\omega t)}{2}$ et contient du continu et de la fréquence double. La fréquence de départ a disparu.

→ soit : pour une entrée sinusoïdale (harmonique) de fréquence f, la sortie est sinusoïdale de même fréquence avec

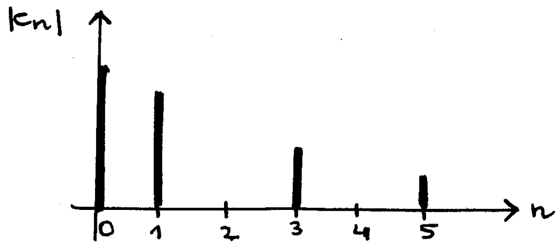
$$\underline{s}(t) = \underline{H}(f)\ \underline{e}(t)$$
$$= G(f)\ \exp j\varphi(f)\ \underline{e}(t)$$

---

2) Pour un signal périodique $e(t)$ de période T, on définit
$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$.
On aura (décomposition en série de Fourier)

$$e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\underbrace{n\frac{2\pi}{T}t}_{\text{ou } n\omega \text{ ou } n2\pi f} + \varphi_n\right)$$

Le spectre de fréquence (en amplitude) consiste à porter les amplitudes $\lvert C_n \rvert$ en fonction de n (ou de $n\omega$, ou de nf)



---

3) Le système 1 est linéaire puisqu'il n'apparait pas de nouvelles fréquences par rapport au signal d'entrée.
Les basses fréquences "passent bien" mais les amplitudes des hautes fréquences sont éteintes. Il s'agit d'un filtre passe-bas.

---

4) → Le système 2 est linéaire. C'est un filtre passe-bande

→ Le système 3 fait apparaitre les nouvelles fréquences 10,5 kHz et 3,5 kHz) qui n'existaient pas dans le signal d'entrée. Ce n'est pas un système linéaire.

---

5) grandeurs complexes associées :

$$\underline{u}(t) = U\sqrt{2}\,\exp(j\varphi_u)\,\exp(j\omega t)$$
$$\underline{i}(t) = I\sqrt{2}\,\exp(j\varphi_i)\,\exp(j\omega t)$$

amplitudes complexes (le même sans le $\exp(j\omega t)$)

$$\underline{U} = U\sqrt{2}\,\exp(j\varphi_u)$$
$$\underline{I} = I\sqrt{2}\,\exp(j\varphi_i)$$

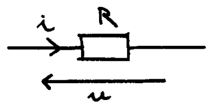
(donne les deux grandeurs importantes : l'amplitude et la phase à l'origine)

finalement :

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{u}(t) &= \underline{U}\,\exp(j\omega t)\\ \underline{i}(t) &= \underline{I}\,\exp(j\omega t)\end{aligned}}$$

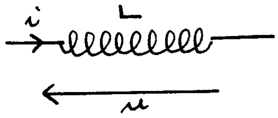
---

6) →



$$u(t) = R\,i(t)$$
$$\underline{u}(t) = R\,\underline{i}(t)$$

$$\boxed{\underline{Z} = R}$$

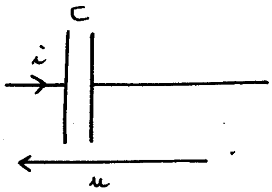


$$u(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$

$$\underline{u}(t) = L\,\frac{d}{dt}\underline{i}(t)$$

$$= L\,j\omega\,\underline{i}(t)$$

$$\boxed{\underline{Z} = jL\omega}$$



$$i(t) = C\,\frac{du(t)}{dt}$$

$$\underline{i}(t) = C\,\frac{d\underline{u}(t)}{dt}$$

$$= C\,j\omega\,\underline{u}(t)$$

donc $\underline{u}(t) = \dfrac{1}{jC\omega}\,\underline{i}(t)$

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}}$$

---

7) En complexes :

$$\underline{u}_{/V} = 10\sqrt{2}\ \exp j\omega t$$

$$\underline{Z} = A + jB$$

on passe à la notation exponentielle pour $\underline{Z}$

$$\boxed{\underline{Z} = \sqrt{A^2+B^2}\ \exp j\left(\arg(A+jB)\right)}$$

A.N. $\underline{Z}_{/\Omega} = 1000 + j\,1000$

$$\boxed{\underline{Z}_{/\Omega} = 1000\sqrt{2}\ \exp j\,\pi/4}$$

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}}$$

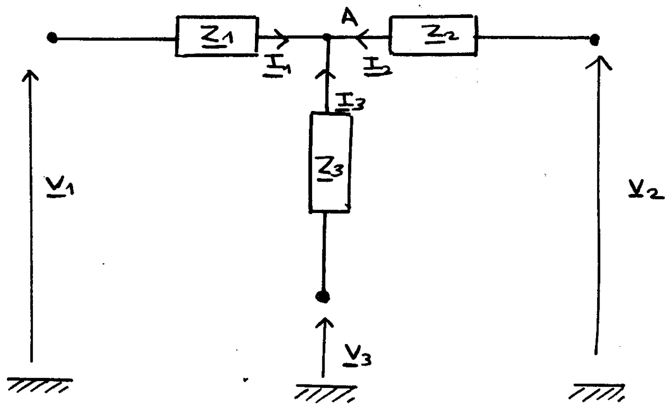
$$= \frac{10\sqrt{2}\ \exp j\omega t}{1000\sqrt{2}\ \exp j\pi/4}$$

$$= \frac{1}{100}\ \exp j\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{i_{/A} = 0{,}01\ \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

---

8) On écrit la loi des noeuds en termes de potentiels



$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

$$\underline{Y}_1(\underline{V}_1 - \underline{V}_A) + \underline{Y}_2(\underline{V}_2 - \underline{V}_A) + \underline{Y}_3(\underline{V}_3 - \underline{V}_A) = 0$$

donc :

$$\boxed{\underline{V}_A = \frac{\underline{Y}_1\underline{V}_1 + \underline{Y}_2\underline{V}_2 + \underline{Y}_3\underline{V}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}}$$

(théorème de Millman)

---

9) Dans la mesure où un signal périodique (décomposition en série de Fourier) ou non (transformée de Fourier) peut se décomposer en composantes sinusoïdales ...
Dans la mesure où le filtre est linéaire...
Il suffit d'étudier la réponse à une entrée sinusoïdale pour connaître la réponse à un signal d'entrée quelconque.

---

10) En utilisant le théorème de Millman démontré en 8) :

$$\boxed{\underline{V}_A = \frac{\frac{1}{R_1}\underline{e} + \frac{1}{R_2}0 + jC_1\omega\,\underline{V}_B + jC_1\omega\,\Delta}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC_1\omega}}$$

$$\boxed{\underline{V}_B = \frac{jC_1\omega\,\underline{V}_A + \frac{1}{2R_1}\Delta}{jC_1\omega + \frac{1}{2R_1}}}$$

---

11) Résolution

- on écrit $\underline{v}^-$ en fonction des autres potentiels :

$$\underline{v}^- = \underline{V}_B = \dots \text{ (fait en 10)}$$

- on écrit $\underline{v}^+$:

$$\underline{v}^+ = 0$$

- on écrit les potentiels des autres noeuds

$$\underline{V}_A = \dots \quad \text{(fait en 10)}$$

Puis <u>si l'A.O. est en régime linéaire</u>, la sortie est proportionnelle à l'entrée :

$$\underline{s} = \underset{\uparrow}{\underline{\mu}} \; \underbrace{(\underline{v}^+ - \underline{v}^-)}_{\underline{\varepsilon}}$$

fonction de transfert de l'A.O.

et <u>si l'A.O. est idéal</u> le gain μ est considéré comme infini

donc
$$\underline{\varepsilon} = 0$$
$$\underline{v}^+ = \underline{v}^-$$

Finalement, ici, on doit faire $\underline{v}^- = 0$

$$jC_1\omega \, \underline{V}_A + \frac{1}{2R_1}\underline{s} = 0$$

avec
$$\underline{V}_A = \frac{\frac{1}{R_1}\underline{e} + jC_1\omega\,\underline{s}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC_1\omega}$$

donc
$$\frac{-\frac{\underline{s}}{2R_1}}{jC_1\omega} = \frac{\frac{1}{R_1}\underline{e} + jC_1\omega\,\underline{s}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC_1\omega}$$

$$-\underline{s}\left[\frac{1}{2R_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + \frac{jC_1\omega}{R_1} + (jC_1\omega)^2\right] = \frac{jC_1\omega}{R_1}\underline{e}$$

$$-\underline{s}\left[\frac{1}{2jC_1\omega}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + 1 + jR_1C_1\omega\right] = \underline{e}$$

$$\boxed{\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -\frac{1}{1 + jR_1C_1\omega + \frac{1}{2jC_1\omega}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}}$$

L'écriture canonique pour ce filtre passe-bande du second ordre est :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

donc : $\boxed{H_0 = -1}$

(le filtre inverse, ce qui était prévisible puisque le signal arrive sur l'entrée inverseuse de l'A.O.)

donc $\boxed{Q = R_1 C_1 \omega_0 = \frac{1}{2C_1\omega_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$

d'où

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2R_1^2C_1^2}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$Q^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + R_1/R_2}}$$

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\frac{1}{R_1C_1}\sqrt{1 + R_1/R_2}}$$

---

12) A.N. $R_1/R_2 = 2Q^2 - 1$ avec $Q = 20$

$$\boxed{R_1/R_2 \simeq 800}$$

$$R_2 \simeq \frac{10000}{800}$$

$$\boxed{R_2 \simeq 12{,}5\ \Omega}$$

$$C_1 = \frac{Q}{R_1\ 2\pi f_0}$$

$$= \frac{20}{10^4\ 2\pi\ 3\ 10^3}$$

$$\boxed{C_1 = 0{,}106\ \mu F}$$

---

13) Le module du dénominateur de $\underline{H}$ est minimal quand sa partie imaginaire est nulle ($\omega = \omega_0$)

Tout le reste étant constant, le gain est maximum pour $\omega = \omega_0$.

$$\boxed{\omega = \omega_0 \quad \underline{H} = -1 \quad G_{max} = 1}$$

---

14) si $\omega \ll \omega_0$ $\underline{H}$ se comporte comme $\dfrac{-1}{Q\,\omega_0/j\omega}$

G a pour asymptote $\dfrac{\omega/\omega_0}{Q}$

L'asymptote pour G_{dB} est

$$\boxed{G_{dB} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} - 20 \log Q}$$

si $\omega \gg \omega_0$ $\underline{H}$ se comporte comme $\dfrac{-1}{j\omega\,Q/\omega_0}$

G a pour asymptote $\dfrac{1}{Q\,\omega/\omega_0}$

L'asymptote pour G_{dB} est

$$\boxed{G_{dB} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_0} - 20 \log Q}$$

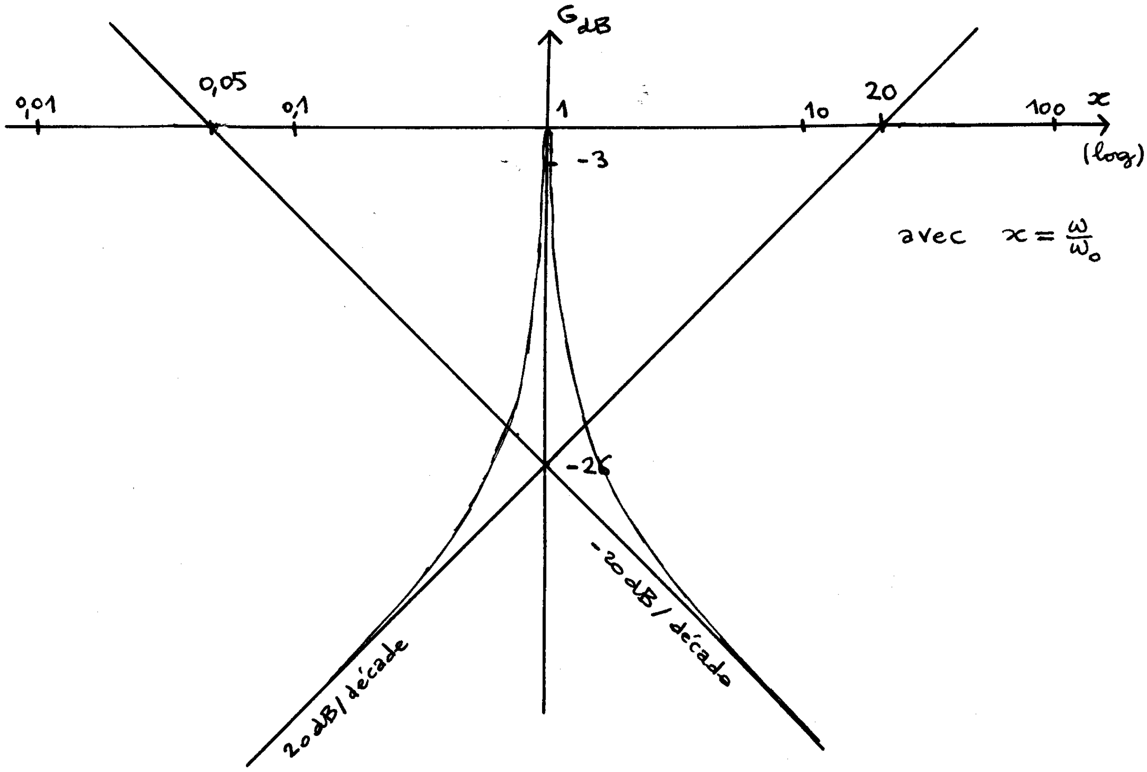
(si $\omega = \omega_0$ $\underline{H} = -1$

$G = 1$

$G_{dB} = 0$)

A.N. $Q = 20$

$20 \log Q = 26{,}0$



15) On sait que pour un passe-bande du second ordre, la largeur de la bande passante est donnée par

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$$

On va retrouver cette formule connue.

Le gain max est égal à 1

Le gain aux fréquences de coupureW est donc $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui donne de façon evidente

$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \pm 1$$

Pour ω_H : $x_H - \frac{1}{x_H} = \frac{1}{Q}$

après calcul:

$$\boxed{x_H = \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}}$$

A.N.

$$x_H = 1{,}025$$

$$\boxed{f_H = 3{,}076 \text{ kHz}}$$

Pour ω_B : $x_B - \frac{1}{x_B} = -\frac{1}{Q}$

remarque :

$$x_H - \frac{1}{x_H} = \frac{1}{Q}$$

$$\frac{1}{x_B} - x_B = \frac{1}{Q}$$

donc

$$x_H \, x_B = 1$$

après calcul :

$$\boxed{x_B = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}}$$

A.N.

$$x_B = 0{,}975$$

$$\boxed{f_B = 2{,}926 \text{ kHz}}$$

On trouve, comme prévu

$$x_H - x_B = \frac{1}{Q}$$

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q}$$

$$\boxed{\Delta f = \frac{f_0}{Q}}$$

A.N. $= \frac{3}{20}$

$$\boxed{\Delta f = 0{,}15\ \mathrm{kHz}}$$

---

16) $\frac{E}{2}$: valeur moyenne
la partie continue (fréquence 0)

$\frac{2E}{\pi}\sin(2\pi f t)$:
le fondamental ou harmonique 1
de même fréquence f que le
signal créneau

$\frac{2E}{\pi}\frac{\sin(2\pi .3f.t)}{3}$:
l'harmonique 3
de fréquence $3f$

$\frac{2E}{\pi}\frac{\sin(2\pi .5f.t)}{5}$
l'harmonique 5
de fréquence $5f$

---

17) On aura besoin des 4 fonctions de transfert avec $f = 1\,\mathrm{kHz}$
$f_0 = 3\,\mathrm{kHz}$

$\longrightarrow$ $\underline{H}(0) = 0$

$\longrightarrow$ $\underline{H}(f) = \dfrac{-1}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$

$$= \frac{-1}{1 + j\,20\left(\frac{1}{3} - 3\right)}$$

$$= \frac{-1}{1 - 53{,}3\,j}$$

$\longrightarrow$ $\underline{H}(3f) = -1$

$$\rightarrow \quad \underline{H}(5f) = \frac{-1}{1+jQ\left(\frac{5f}{f_0}-\frac{f_0}{5f}\right)} = \frac{-1}{1+j20\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{5}\right)} = \frac{-1}{1+21,3\,j}$$

L'harmonique 3 (fréquence $3f = f_0$) va se trouver en plein sur la résonance. On peut prévoir que l'harmonique 1 (f) et l'harmonique 5 ($5f$) seront très affaiblis. Le continu est totalement éliminé.

$$\boxed{s(t) = \frac{2E}{\pi}\left(G(f)\sin(2\pi f t + \varphi(f)) + \frac{G(3f)}{3}\sin(6\pi f t + \varphi(3f)) + \frac{G(5f)}{5}\sin(10\pi f t + \varphi(5f)) \right)}$$

Pour évaluer la réponse au fondamental et à l'harmonique 5 on fait l'approximation $\underline{H}(f) \simeq \frac{1}{53,3\,j}$ et $\underline{H}(5f) \simeq \frac{-1}{21,3\,j}$

donc
$$G(f) \simeq \frac{1}{53,3}$$
$$\varphi(f) \simeq -\pi/2$$
$$G(5f) \simeq \frac{1}{21,3}$$
$$\varphi(5f) \simeq +\pi/2$$

On a
$$G(3f) = 1$$
$$\varphi(3f) = \pi$$

Finalement, en passant aux valeurs numériques :

$$s(t)_{/V} = 6,37\left(\frac{1}{53,3}\sin\left(2\pi f t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\sin(6\pi f t + \pi) + \frac{1}{21,3\times 5}\sin\left(10\pi f t + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$\boxed{s(t)_{/V} = -0,12\cos(2\pi f t) - 2,12\sin(6\pi f t) + 0,06\cos(10\pi f t)}$$

Comme prévu, on récupère essentiellement :

$$\boxed{s(t)/V \simeq -2{,}12 \sin(6\pi f t)}$$

---

18) En ne tenant compte que de ce terme, le montage aurait ici joué le rôle de <u>multiplicateur de fréquence</u> par 3.