DNS

Sujet

Électron dans un champ magnétique constant

Un électron de charge $-e$ et de masse m_e est lancé depuis l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes avec une vitesse initiale non relativiste : $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0z}\vec{u}_z$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et permanent : $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

I. Vecteur rotation

1. Montrer que l'on peut définir un vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$ tel que $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$.

2. Démontrer que le vecteur $\vec{v}$ tourne (montrer que la norme est constante). Préciser la direction et le sens de $\vec{\omega}$. Préciser le sens de la rotation de $\vec{v}$. Décrire alors qualitativement le mouvement de l'électron.

II. Étude qualitative

3. En fait, l'électron est de plus soumis à une force de frottement fluide proportionnelle à sa vitesse : $-\alpha\vec{v}$. . Écrire l'équation différentielle de mouvement et introduire un paramètre τ ayant les dimensions d'un temps et inversement proportionnel à l'intensité du frottement. Analyser qualitativement la signification de ce paramètre. Préciser ce qu'il est légitime d'appeler respectivement un frottement : a) « faible » et b) « fort ».

4. En se contentant d'écrire les équations différentielles vérifiées par les coordonnées (v_x , v_y , v_z) de $\vec{v}$, mais sans entamer véritablement les calculs, décrire qualitativement le mouvement attendu en distinguant notamment les cas a) et b).

III. Résolution

5. Établir les expressions de $v_z(t)$ puis de $z(t)$.

6. On introduit la variable complexe : $\underline{V} = v_x + i\, v_y$. Établir une équation différentielle vérifiée par $\underline{V}$ et en déduire l'expression de $\underline{V}(t)$ puis de $\underline{R}(t) = x(t) + i\, y(t)$. En déduire $x(t)$ et

$y(t)$.

Réponses

1) on écrit le principe fondamental :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = q\ \vec{v} \wedge \vec{B}$$
$$= -e\ \vec{v} \wedge \vec{B}$$
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m_e} \vec{B} \wedge \vec{v}$$
$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}}$$

avec

$$\vec{\omega} = -\frac{q\vec{B}}{m_e}$$
$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{e\vec{B}}{m_e}}$$

---

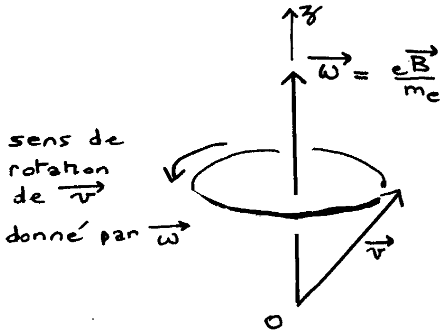
2) la relation précédente est caractéristique d'un vecteur de norme constante, donc tournant avec le vecteur rotation $\vec{\omega}$

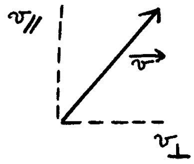
$$\vec{v}\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{v}\ (\vec{\omega} \wedge \vec{v})}_{\text{produit mixte avec deux vecteurs identiques donc nul.}}$$
$$= 0$$
$$\frac{1}{2}\frac{d\vec{v}^2}{dt} = 0$$
$$\vec{v}^2 = \text{constante}$$
$$\boxed{\|\vec{v}\| = \text{constante}}$$

<u>remarque</u>

On sait en effet qu'<u>un champ magnétique ne peut accélérer une particule chargée</u>.

$$dE_c = \delta W$$
$$d\left(\frac{1}{2} m_e v^2\right) = \vec{F}\ \vec{dt}$$
$$= (q\ \vec{v} \wedge \vec{B})\ \vec{v}\ dt$$
$$= 0 \qquad (\text{produit mixte nul})$$



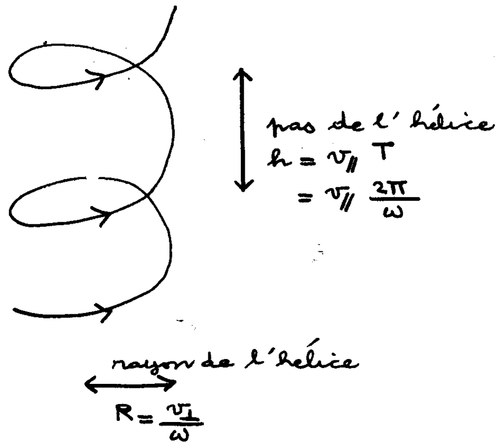


→ On comprend alors que $\vec{v}_{//}$ ($\vec{v}_{//}\,//\,\vec{B}$) ne change pas donc la particule se déplace à <u>vitesse constante $v_{//}$ selon Oz</u>.

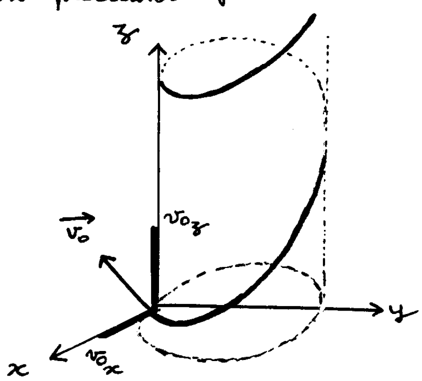
→ De même $\vec{v}_\perp$ garde la même norme donc <u>perpendiculairement à Oz, on aura un mouvement circulaire uniforme de rayon R</u> tel que $v_\perp = R\omega$ soit $R = \frac{v_\perp}{eB/m_e}$

(on peut trouver ce résultat par le principe fondamental : soit rapidement : $e\,B\,v_\perp = \frac{m_e v_\perp^2}{R}$)

→ Finalement le mouvement est hélicoïdal.



→ Enfin, en précisant grâce aux conditions initiales.



3) En présence de frottement :

$$-e\,\vec{v}\wedge\vec{B} - \alpha\,\vec{v} = m_e \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{v} - \frac{\alpha}{m_e}\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

on pose $\boxed{\tau = \frac{m_e}{\alpha}}$: temps de relaxation caractéristique des frottements

(on a effet $\frac{d\vec{v}}{dt}$ et $\frac{\vec{v}}{m_e/\alpha}$ qui doivent avoir la même dimension

donc m_e/α est un temps)

remarque : vérification.

On peut vérifier par les dimensions.

$$[\alpha] = \frac{[F]}{[v]}$$

$$= \frac{M\ [a]}{[v]} \quad \text{avec } [a] = \frac{[v]}{T}$$

$$[\alpha] = M\ T^{-1}$$

et donc

$$\left[\frac{m_e}{\alpha}\right] = \frac{M}{M\ T^{-1}}$$

$$= T$$

Signification :

La résolution fait apparaître des $e^{-t/\tau}$

t	$1-e^{-t/\tau}$
τ	0,63
2τ	0,86
3τ	0,95
4τ	0,98
5τ	0,99

Au bout de 4 ou 5 τ, on a atteint la vitesse finale à 1% près environ

Frottement "faible" ou "fort"

Un frottement est "faible" si α est "petit" c'est à dire si τ caractéristique de l'amortissement est "grand"...
Il faut préciser grand par rapport à ... On compare donc le temps caractéristique des frottements au temps caractéristique du mouvement.

$$\tau \gg T$$
$$\gg \frac{2\pi}{\omega}$$
$$\frac{m_e}{\alpha} \gg \frac{2\pi\, m_e}{e B}$$
$$\alpha \ll \frac{e B}{2\pi}$$

frottement faible		$\tau \gg \frac{2\pi}{\omega}$
	soit	$\alpha \ll \frac{eB}{2\pi}$
frottement fort		$\tau \ll \frac{2\pi}{\omega}$
	soit	$\alpha \gg \frac{eB}{2\pi}$

---

4)

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} - \frac{\vec{v}}{\tau}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix}$$

$$(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z}) \begin{vmatrix} -\omega\, v_y \\ \omega\, v_x \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\omega\, v_y - \frac{1}{\tau} v_x \\ \frac{dv_y}{dt} &= \omega\, v_x - \frac{1}{\tau} v_y \\ \frac{dv_z}{dt} &= - \frac{1}{\tau} v_z \end{aligned}}$$

L'amortissement agit aussi bien sur $v_\perp$ que sur $v_{//}$.

frottement faible

"hélice" dont le rayon et le pas diminuent

frottement fort

la trajectoire est inférieure à un tour. Elle est alors presque plane.

---

5)

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{v_z}{\tau}$$

équation caractéristique :

$$r = -\frac{1}{\tau}$$

donc :

$$v_z = A \quad e^{-t/\tau}$$

C.I. $\quad v_{z0} = A \quad 1$

$$\boxed{v_z = v_{z0} \quad e^{-t/\tau}}$$

$$z = \frac{v_{z0}}{\left(-\frac{1}{\tau}\right)} e^{-t/\tau} + B$$

C.I. $\quad 0 = -\, v_{z_0}\tau \; 1 \; + B$

$$\boxed{z = v_{z_0}\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

---

6)

$$\frac{dv_x}{dt} = -\omega v_y - \frac{1}{\tau} v_x$$

$$+ \; i \times \left(\frac{dv_y}{dt} = \omega v_x - \frac{1}{\tau} v_y \right)$$

$$\frac{d}{dt}(v_x + i v_y) = \underbrace{-\omega v_y + i\omega v_x}_{i\omega (v_x + i v_y)} - \frac{1}{\tau}(v_x + i v_y)$$

$$\frac{d}{dt}\underline{V} = i\omega\,\underline{V} - \frac{1}{\tau}\underline{V}$$

$$\frac{d\underline{V}}{dt} + \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)\underline{V} = 0$$

L'équation caractéristique donne

$$r + \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right) = 0$$

d'où
$$\underline{V} = \underline{A}\; e^{-\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)t}$$

C.I. avec en $t=0$ $\underline{V}_0 = v_{x_0} + \underbrace{\cancel{i v_{y_0}}}_{\text{nul}}$

$$v_{x_0} = \underline{A}$$

$$\boxed{\underline{V} = v_{x_0}\; e^{-\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)t}}$$

En intégrant à nouveau :

$$\underline{R} = \frac{v_{x_0}}{-\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)}\, e^{-\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)t} + \underline{B}$$

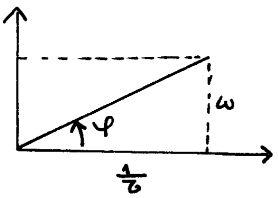
et C.I. avec en $t=0$ $\underline{R}_0 = \underbrace{\cancel{x_0}}_{\text{nul}} + i\underbrace{\cancel{y_0}}_{\text{nul}} = 0$

$$0 = \frac{v_{x_0}}{-\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)} + \underline{B}$$

$$\boxed{\underline{R} = \frac{v_{x_0}}{\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)}\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)t}\right)}$$

Pour séparer partie réelle et partie imaginaire, je pose

$$\frac{1}{\tau} - i\omega = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2}\;\exp -j\varphi$$



avec

$$\varphi = \arg\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)$$

$$\tan\varphi = \omega\tau$$

$$\cos\varphi = \frac{1/\tau}{\sqrt{1/\tau^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{\omega}{\sqrt{1/\tau^2 + \omega^2}} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

$$\underline{R} = \frac{v_{x_0}}{\frac{1}{\tau}\sqrt{1+\omega^2\tau^2}\;\exp -j\varphi}\left(1 - e^{-t/\tau}\, e^{i\omega t}\right)$$

$$= \frac{\tau\, v_{x_0}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\left(\exp j\varphi - e^{-t/\tau}\, e^{i(\omega t + \varphi)}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{\tau\, v_{x0}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} - e^{-t/\tau} \cos\left(\omega t + \arctan(\omega\tau)\right) \right) \\ y &= \frac{\tau\, v_{x0}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \left(\frac{\omega\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} - e^{-t/\tau} \sin\left(\omega t + \arctan(\omega\tau)\right) \right) \end{aligned}}$$

remarque

On peut chercher le rayon r de cette "hélice" qui décroît avec le temps en faisant :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

ou aussi $\boxed{r^2 = \underline{R}\,\underline{R}^*}$ ($\underline{R}^*$ conjugué de $\underline{R}$)

On trouve très facilement quelle que soit la méthode adoptée :

$$\boxed{r^2 = \frac{\tau^2 v_{x0}^2}{1+\omega^2\tau^2} \left(1 + e^{-2t/\tau} - 2\, e^{-t/\tau} \cos\omega t \right)}$$

r décroît selon une loi (quasiment) exponentielle