DNS

Sujet

Effet Hall et magnétorésistance

On donne les constantes physiques suivantes :

Charge élémentaire	$e=1{,}6.10^{-19}C$
Masse de l'électron	$m_e=0{,}91.10^{-30}kg$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c=2{,}997\,792\,458.10^{8}ms^{-1}\approx 3.10^{8}ms^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0=4\pi.10^{-7}SI$
Permittivité du vide	$\varepsilon_0=1/(\mu_0 c^2)$
Constante de Planck	$h=6{,}626.10^{-34}J.s$

I. Loi d'Ohm

On se propose d'étudier les effets d' un champ magnétique uniforme et stationnaire sur les propriétés électromagnétiques d'un matériau semi-conducteur.

Le milieu matériel, électriquement neutre, est décrit comme un ensemble d'électrons (de charge $-e$) évoluant au sein d'un réseau constitué de charges positives fixes. Les interactions de ces électrons "de conduction" avec le milieu sont entièrement prises en compte en leur affectant une masse effective m (différente de celle m_e d'un électron dans le vide) et en introduisant une force de "frottement" d'expression $-\alpha\vec{v}$, où α est un coefficient positif, caractéristique du milieu : la vitesse $\vec{v}$ décrit la dérive moyenne de l'ensemble des électrons par rapport au réseau sous l'action d'un champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$.

On considère ici un échantillon parallélépipédique dont le volume est délimité par les plans $x=0$, $x=L$, $y=0$, $y=\ell$, $z=-a/2$ et $z=a/2$

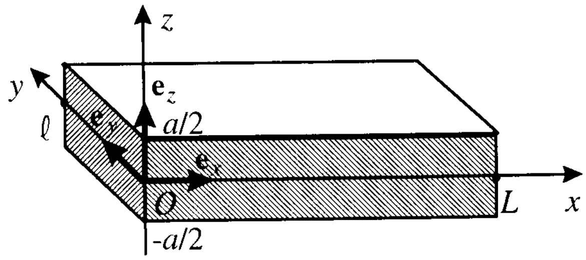


Figure 1

1. Dans ce matériau, on applique un champ électrique $\vec{E}$ stationnaire. Écrire l'équation vectorielle du mouvement d'un électron animé d'une vitesse $\vec{v}$.
2. A un instant pris comme origine, ce champ est brusquement annulé, Déduire l'évolution ultérieure de la vitesse de l'électron et donner une signification physique au coefficient $\tau = m/\alpha$.
3. En régime stationnaire, montrer qu'en présence d'un champ électrique $\vec{E}$, le courant volumique $\vec{j}$ vérifie bien la loi d' Ohm. En déduire la conductivité électronique γ en fonction de e , τ , m et de la densité volumique n des électrons de conduction.
4. Dans un matériau semi-conducteur, tel que l'arséniure de gallium $GaAs$ dopé au silicium, la conduction est assurée par des électrons dont la masse effective m est $0{,}06\,m_e$. Sachant qu'à très basse température la valeur de la conductivité vaut $\gamma = 100\,S.m^{-1}$, calculer τ pour $n = 10^{24}\,m^{-3}$.

II. Champ magnétique propre

Un courant de densité volumique stationnaire circule parallèlement à l' axe Ox : $\vec{j} = j\,\vec{u}_x$. L'épaisseur a étant faible devant les dimensions latérales L et ℓ , l'échantillon est assimilé à une nappe de courant uniforme d'extension latérale infinie et d'épaisseur a .

5. A l'aide des symétries d'une telle distribution, préciser l'orientation du champ magnétique propre $\vec{b}$ qu'elle crée en tout point de l'espace. Justifier le fait que ce champ est nul dans le plan $z=0$.
6. A partir de la forme locale du théorème d' Ampère, donner l'expression du champ magnétique propre $\vec{b}$. Trouver sa valeur maximale avec $a = 10\,\mu m$ et $j = 10^6\,A.m^{-2}$.

III. Loi d'Ohm en présence de champ magnétique extérieur

L'échantillon est désormais plongé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}$, uniforme et stationnaire, dirigé selon Oz , $\vec{B} = B\,\vec{u}_z$.

7. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ d'un électron du matériau soumis à la force de frottement et à ce champ magnétique. Montrer que, lorsque τ tend vers l' infini. le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur tournant dont on précisera le vecteur rotation. Calculer la norme ω_c de ce dernier, appelée pulsation cyclotron, pour $B = 1\,T$ et $m = 0{,}06\,m_e$.

On prend en compte les effets d'un champ électrique $\vec{E}$, parallèle au plan Oxy , et du champ $\vec{B}$ appliqué précédent. On néglige le champ magnétique créé par le milieu. Les effets d'amortissement sont toujours décrits par la force de frottement $-\alpha\vec{v}$.

8. Établir, en régime stationnaire, les relations liant les composantes j_x et j_y du courant volumique aux composantes E_x et E_y du champ électrique. Montrer qu'elles peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante: $\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}$ dans laquelle : $\rho_{xx}=\rho_{yy}=1/\gamma$ et $\rho_{xy}=-\rho_{yx}=\dfrac{B}{ne}$.

IV. Influence de la géométrie

9. L'échantillon a la forme d'un ruban allongé selon Oy : $a \ll L \ll \ell$. On applique une différence de potentiel V entre les plans $x=0$ et $x=L$ métallisés. Le champ électrique $\vec{E}$ est supposé uniforme : $\vec{E}=E\,\vec{u}_x$.
   - Donner l'expression de la résistance R_0 d' un tel échantillon.
   - Quelle est la modification relative $\dfrac{\Delta R}{R_0}=\dfrac{(R-R_0)}{R_0}$ induite par le champ magnétique (effet de magnétorésistance) ?
   - Calculer cette modification pour $B=1\,T$, $\gamma=100\,S.m^{-1}$, $n=10^{24}\,m^{-3}$.

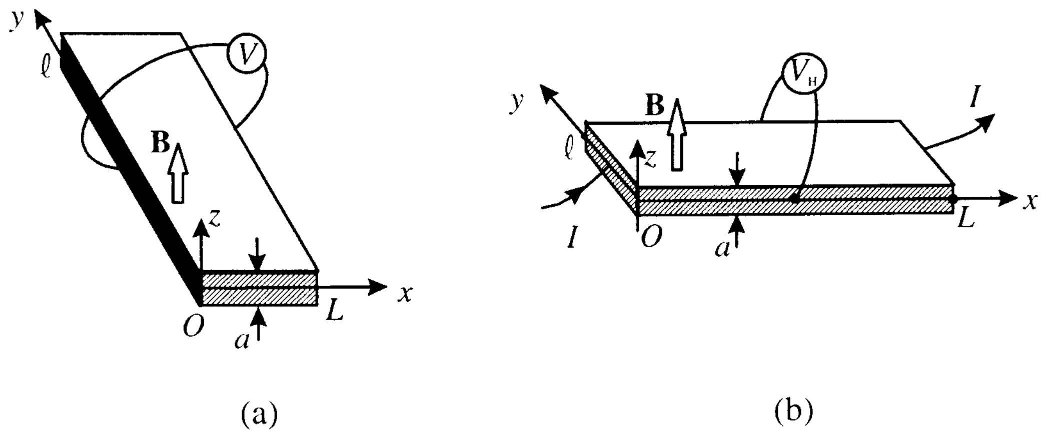


Figure 2

10. L'échantillon a la forme d'un ruban allongé selon Ox : $a \ll \ell \ll L$. Un courant stationnaire d' intensité I circule selon cette direction avec un courant volumique uniforme : $\vec{j}=j\,\vec{u}_x$.
    - Montrer que le champ électrique possède alors une composante E_y non nulle.
    - Donner l'expression de la différence de potentiel V_H appelée tension de Hall, qui apparaît entre les plans $y=0$ et $y=\ell$.
    - Calculer V_H pour $I=1\,mA$, $a=10\,\mu m$, $n=10^{24}\,m^{-3}$ et $B=1\text{T}$. Quel est l'intérêt d'un tel dispositif ?

11. Des mesures effectuées à très basse température (quelques K) sur un échantillon de GaAs

d'épaisseur très faible ($a=10\,nm$), placé dans un champ magnétique intense (B de quelques teslas), montrent que la composante ρ_{xy} varie en fonction de B par paliers. Cet effet, découvert par Von Klitzing en 1980, porte le nom d'effet Hall quantique : la répartition des électrons en niveaux d'énergie conduit à écrire la densité volumique des électrons sous la forme : $n=p\ \ eB/(ah)$ où p est un entier non nul et h la constante de Planck.

- Montrer que, dans ce cas, la valeur de la résistance transverse, définie selon $R_t=V_H/I$, se met sous la forme : $R_t=R_K/p$, R_K étant une résistance que l'on calculera.
- Pourquoi la résistance R_K , appelée constante de Klitzing, est-elle désormais utilisée comme étalon ?

V. Disque de Corbino

Un disque de Corbino est un conducteur ayant la forme d'une couronne comprise entre deux cylindres de même axe, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$ et d'épaisseur a .

On maintient entre les deux cylindres une différence de potentiel constante $U=V_1-V_2$ imposant au champ électrique $\vec{E}$ une direction purement radiale.

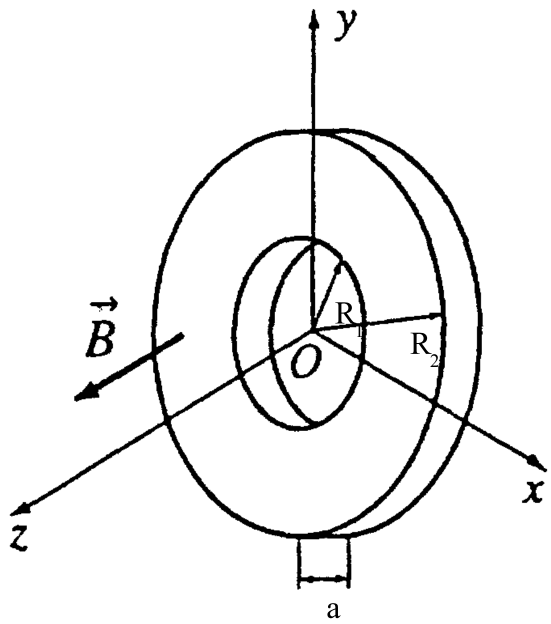


Figure 3

12.Quel est l'expression du champ électrique au sein du conducteur en fonction des données?

13.Déterminer sa résistance R_0

On impose en plus un champ magnétique $\vec{B}$, uniforme et permanent, colinéaire à Oz . Le champ $\vec{E}$ reste radial.

14.Montrer que la densité de courant reste contenue dans un plan normal à Oz .

15. Montrer à l'aide d'une construction graphique représentant la relation vectorielle entre $\vec{j}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$, appliquée à cette situation que les lignes de courant, planes, font un angle θ_h avec les lignes du champ $\vec{E}$. Déterminer $\tan\theta_h$.

16. Déterminer en coordonnées polaires l'équation des lignes de courant passant par un point de coordonnées $r=r_0$, $\theta=\theta_0$ et $z=constante$. Quelle est leur forme?

17. Exprimer la composante radiale j_r du vecteur densité de courant $\vec{j}$ en fonction de j_0 densité de courant obtenue sans champ magnétique et de γ , n , e et B . En déduire l'expression de la résistance R de cette couronne en fonction de R_0 sa résistance sans champ magnétique et de γ , n , e et B .

18. Donner la variation relative de résistance. Application numérique pour un champ intense $B=1T$ dans le cas du semi-conducteur étudié précédemment.

19. Comment peut-on expliquer qualitativement cet effet de magnétorésistance?

Réponses

1) $$-e\vec{E} - \alpha\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m}\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

En posant

$$\tau = \frac{m}{\alpha}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E}}$$

---

2) Si on supprime le champ, l'équation devient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{0}$$

En résolvant (exceptionnellement) vectoriellement, on trouve

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v_0}\,e^{-t/\tau}}$$

τ est le temps de relaxation caractéristique de l'amortissement.

En 4 ou 5 τ, on aura à 1% près $\vec{v} = \vec{0}$

---

3) En régime stationnaire, on aura

$$\frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

(solution particulière de l'équa diff, correspondant à $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$)

or $$\vec{j} = \rho\,\vec{v} \qquad (\rho = \text{libre})$$
$$= -n e\,\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{j} = \frac{n e^2 \tau}{m}\vec{E}}$$

En posant

$$\boxed{\gamma = \frac{n e^2 \tau}{m}}$$

on retrouve bien la loi d'Ohm

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}$$

---

4) A.N.

$$\tau = \frac{\gamma\, m}{n\, e^2}$$

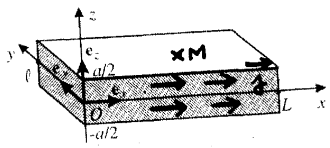
$$= \frac{100 \quad 0{,}06 \quad 0{,}91\ 10^{-30}}{10^{24} \quad (1{,}6\ 10^{-19})^2}$$

$$\boxed{\tau = 2{,}13 \quad 10^{-16}\,s}$$

Commentaire : on peut estimer qu'en $10^{-15}\,s$ environ le régime stationnaire est quasiment atteint. La loi d'Ohm est donc valable jusqu'à des fréquences de l'ordre de 10^{15} Hz.

---

5)



La nappe de courant est supposée infinie selon x et selon y donc $\vec{b} = \vec{b}(z)$

→ un plan (xMz) est plan de symétrie et $\vec{b}_{(M)}$ est donc perpendiculaire à ce plan

$$\boxed{\vec{b}(M) = b(z)\ \vec{u_y}}$$

→ Pour un point M tel que $z=0$, il y a alors deux plans de symétrie : (xMz) mais aussi (xMy). $\vec{b}$ ne peut être en même temps selon $\vec{u_y}$ et selon $\vec{u_z}$. Donc $\vec{b}$ est nul.

$$\boxed{\vec{b}(z=0) = \vec{0}}$$

remarque

En considérant deux points

$M\,(x, y, z)$

$M'\,(x, y, -z)$ sym de M / plan xOy

on aurait

$$\vec{b}(M') = -\ \text{sym}\ \vec{b}(M)$$

$$b(-z) = -\ b(z)$$

$b(z)$ est une fonction impaire de z

---

5) M.A. $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{b} = \mu_0 \vec{j} + \cancel{\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$ nul en régime permanent

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{b} = \mu_0 \vec{j}$$

$$(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z}) \begin{vmatrix} \times \\ \times \\ \frac{d}{dz} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ b(z) \\ 0 \end{vmatrix} \quad \mu_0 \begin{vmatrix} j(z) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{-\frac{db(z)}{dz} = \mu_0\, j(z)}$$

Les 3 cas :

<u>$-a/2 < z < a/2$</u>

$$j(z) = j$$

$$-\frac{db(z)}{dz} = \mu_0 j$$

$$b(z) = -\mu_0 j z + A$$

doit être nul en $z=0$ donc A est nul

$$\boxed{\vec{b}(-a/2 < z < a/2) = -\mu_0 j z\ \vec{u_y}}$$

<u>$z > a/2$</u>

$$j(z) = 0$$

$$b(z) = A'$$

par continuité en $z = a/2$

$$\boxed{\vec{b}(z > a/2) = -\mu_0 j \frac{a}{2}\ \vec{u_y}}$$

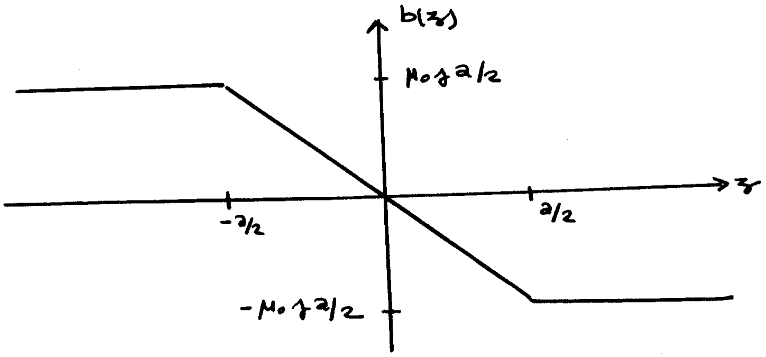
<u>$z < -a/2$</u>

$$j(z) = 0$$

$$b(z) = A''$$

par continuité en $z = -a/2$

$$\boxed{\vec{b}(z < -\frac{a}{2}) = +\mu_0 j \frac{a}{2}\ \vec{u_y}}$$



A.N.

$$b_{max} = \mu_0 j\, a/2$$
$$= 4\pi\, 10^{-7}\ 10^{6}\ 10\ 10^{-6}/2$$
$$= 2\pi\ 10^{-6}$$
$$\boxed{b_{max} = 6{,}3\ 10^{-6}\ \mathrm{T}}$$

remarque :

La composante horizontale du champ magnétique terrestre est égale à $2{,}0\ 10^{-5}\ \mathrm{T}$ à Paris.

Donc b est assez faible comparé à cette référence.

Le problème néglige $\vec{b}$ dans la suite.

7)
$$-\alpha\vec{v} - e\,\vec{v}\wedge\vec{B} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

donc :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\alpha}{m}\vec{v} - \frac{e}{m}\vec{v}\wedge\vec{B}$$
$$= -\frac{1}{\tau}\vec{v} + \underbrace{\frac{e\vec{B}}{m}}_{\vec{\omega_c}}\wedge\vec{v}$$

avec

$$\boxed{\begin{aligned}\tau &= \frac{m}{\alpha}\\ \vec{\omega_c} &= \frac{e\vec{B}}{m}\end{aligned}}$$

et si $\tau \to \infty$ (frottement nul)

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega_c}\wedge\vec{v}}$$

formule caractéristique pour un vecteur tournant (donc de norme constante) de vecteur rotation $\vec{\omega_c}$

A.N.

$$\omega_c = \frac{eB}{m}$$
$$= \frac{1{,}6\ 10^{-19}\ 1}{0{,}06\ \ 0{,}91\ 10^{-30}}$$
$$\boxed{\omega_c = 2{,}9\ 10^{12}\ \mathrm{rad\,s^{-1}}}$$

8) Ici, en présence de $\vec{E}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{v}}{\tau} + \vec{\omega_c}\wedge\vec{v} - \frac{e}{m}\vec{E}$$

avec $\vec{j} = -ne\vec{v}$

$$-ne\frac{d\vec{v}}{dt} = +ne\frac{\vec{v}}{\tau} + \vec{\omega_c}\wedge -ne\vec{v} + \frac{ne^2}{m}\vec{E}$$

$$\underbrace{\frac{d\vec{j}}{dt}}_{\text{nul en régime stationnaire}} = -\frac{\vec{j}}{\tau} + \vec{\omega_c}\wedge\vec{j} + \frac{\gamma}{\tau}\vec{E}$$

avec $\dfrac{\vec{\omega_c}\tau}{\gamma} = \dfrac{\frac{e\vec{B}}{m}\tau}{\frac{ne^2\tau}{m}} = \dfrac{\vec{B}}{ne}$

finalement :

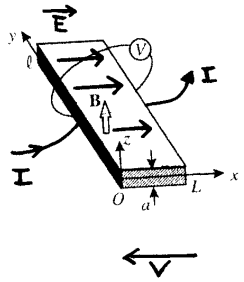
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} - \frac{\vec{B}}{ne}\wedge\vec{j}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & \frac{B}{ne} \\ -\frac{B}{ne} & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}}_{\text{matrice résistivité}} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix}$$

---

9)



→ en l'absence de $\vec{B}$, on sait que

$$R_o = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}$$

$$\boxed{R_o = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{a\ell}}$$

remarque : démonstration

E $\quad \vec{\jmath} = \jmath_x \, \vec{u_x}$ est uniforme

avec : $V = V(x=0) - V(x=L) = -\int_{x=L}^{x=0} E_x \, dx$

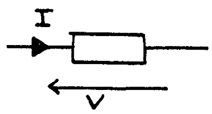
$$= -\int_L^0 \frac{\jmath_x}{\gamma} \, dx$$

$$= \frac{\jmath_x \, L}{\gamma}$$

et $\quad I = \iint_{\text{(sens } x \text{ croissants)}} \vec{\jmath} \, \vec{dS} = \iint_{\text{section droite}} \jmath_x \, dy \, dz$

$$= \jmath_x \, a \, \ell$$

$$R_0 = \frac{V}{I} = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{a \ell}$$



$\longrightarrow$ en présence de $\vec{B}$

avec $\ell \gg L$ donc on suppose que <u>le champ n'est pas modifié</u> (cf faces $y=0$ et $y=\ell$ éloignées donc le champ de Hall est négligé)

Le résultat 8) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \jmath_x \\ \jmath_y \end{pmatrix}$$

$$E_x = \rho_{xx} \, \jmath_x + \rho_{xy} \, \jmath_y$$

$$0 = \rho_{yx} \, \jmath_x + \rho_{yy} \, \jmath_y$$

d'où l'existence d'un $\jmath_y$ $\left(\jmath_y = -\frac{\rho_{yx}}{\rho_{yy}} \jmath_x \right)$

d'où la modification de la relation entre $\jmath_x$ et E_x

$$E_x = \frac{\rho_{xx}\rho_{yy} - \rho_{xy}\rho_{yx}}{\rho_{yy}} \, \jmath_x$$

$$\boxed{E_x = \frac{1}{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma^2 B^2}{n^2 e^2} \right) \jmath_x}$$

(au lieu de

$$E_x = \frac{1}{\gamma} \qquad \jmath_x \;)$$

la démonstration pour la résistance est la même. On trouve donc

$$R = \frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{\gamma^2B^2}{n^2e^2}\right)\frac{L}{a\ell}$$

$$\boxed{R = R_o\left(1+\underbrace{\frac{\gamma^2B^2}{n^2e^2}}_{}\right)}$$

↑ variation relative de R à cause de B

$$\boxed{\frac{\Delta R}{R_o} = \frac{R-R_o}{R_o} = \frac{\gamma^2B^2}{n^2e^2}}$$

A.N. $= \dfrac{100^2\ 1}{(10^{24})^2\ (1{,}6\ 10^{-19})^2}$

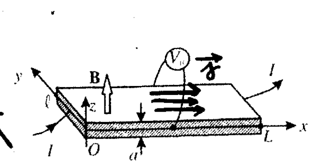
$$\boxed{\frac{\Delta R}{R_o} = 0{,}39\ 10^{-6} \quad \text{ou} \quad 0{,}000039\ \%}$$

l'effet de magnétorésistance est <u>extrêmement faible</u>.

---

10)

V_H ↖



avec $\ell \ll L$ les faces $y=0$ et $y=\ell$ sont "proches" et imposent les <u>lignes de courant</u>. Le courant n'est <u>pas modifié</u>.

Le résultat 8) s'écrit

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_x = \rho_{xx}\ j_x$$

$$E_y = \rho_{yx}\ j_x$$

d'où l'existence d'un E_y $(E_y = \rho_{yx}\ j_x)$

$$\boxed{E_y = -\frac{B}{ne}\ j_x}$$

selon y apparait une ddp

$$\int_{y=0}^{y=\ell} dV = -\int_0^{\ell} E_y \, dy$$

$$\underbrace{V(\ell) - V(0)}_{\text{noté } V_H} = \frac{B}{ne} j_x \ell$$

avec $j_x = \dfrac{I}{a\ell}$

$$\boxed{V_H = B \frac{I}{nea}}$$

A.N.
$$= \frac{1 \quad 10^{-3}}{10^{24} \; 1{,}6\,10^{-19} \; 10\,10^{-6}}$$

$$\boxed{V_H = 0{,}625 \text{ mV}}$$

L' effet Hall est donc plus facile à mettre en évidence que l' effet de magnétorésistance.
Ce dispositif permet de mesurer B (teslamètre à effet Hall)

---

11)

$$n = p \frac{eB}{ah}$$

$$R_t = \frac{V_H}{I} = \frac{B}{nea}$$

$$\boxed{R_t = \frac{h/e^2}{p}}$$

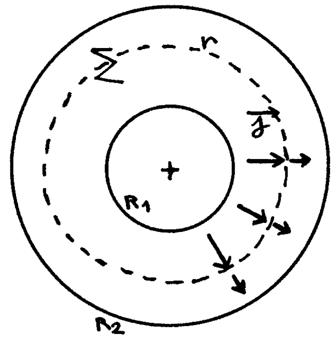
A.N.
$$R_K = h/e^2$$
$$= \frac{6{,}626\,10^{-34}}{(1{,}6 \; 10^{-19})^2}$$

$$\boxed{R_K = 25{,}9 \; 10^3 \text{ k}\Omega}$$

Cette résistance s'exprime en fonction de h et e, des constantes fondamentales en physique

---

12)



Le problème est à symétrie cylindrique

$$\vec{j} = j(r)\ \vec{u_r} \qquad (\text{avec } \vec{j} = \gamma \vec{E})$$

remarque

On aura $\operatorname{div} \vec{j} = 0$

ou $\operatorname{div} \vec{E} = 0$

Si on connait l'expression de $\operatorname{div} \vec{E}$ (non fournie par le texte donc non utilisable en fait)

$$\operatorname{div}\left(E_{(r)}\vec{u}_r\right) = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,E(r)\right) = 0$$

$$r\,E(r) = A$$

$$\boxed{E(r) = \frac{A}{r}}$$

Le courant qui passe de R_1 vers R_2 est I.
Par exemple à travers la surface cylindrique Σ de rayon r et de hauteur a :

$$\underset{\substack{\text{surface}\\ \text{latérale}\\ \text{orientée vers les}\\ r \text{ croissants}}}{\iint} \vec{j}\,\vec{dS} = I$$

$$j(r)\ 2\pi r\, a = I$$

$$j(r) = \frac{I}{2\pi a}\ \frac{1}{r}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{I}{2\pi a \gamma} \frac{1}{r}}$$

On a obtenu que E est en $\frac{1}{r}$ (mais ici, la constante A est exprimée en fonction de I)

$$E = \frac{A}{r}$$

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r}$$

en intégrant, on obtient A mais cette fois en fonction des données du texte

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -A \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$\underbrace{V_2 - V_1}_{-U} = -A \ln \frac{R_2}{R_1}$$

finalement

$$\boxed{\vec{E} = \frac{U}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{1}{r} \vec{u_r}}$$

---

13)

$$R_0 = \frac{U}{I}$$

remarque

Partir de $\vec{E}$

en déduire $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

puis $I = j \times 2\pi r a$

Nous avons fait cette étude en 18)

on a vu que

$$A = \frac{I}{2\pi a \gamma} = \frac{U}{\ln R_2/R_1}$$

$$\boxed{R_0 = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi a \gamma}}$$

---

14) On a toujours (cf 8))

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} - \frac{B\,\vec{u_z}}{ne} \wedge \vec{j}$$

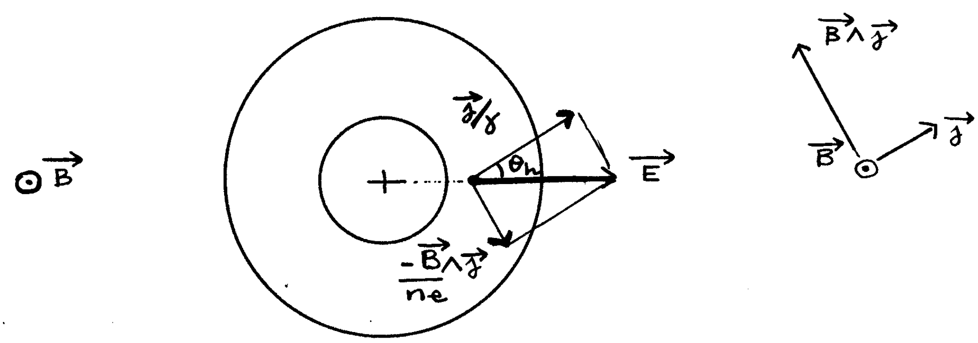
On multiplie scalairement par $\vec{u_z}$

$$\underbrace{\vec{E}\,\vec{u_z}}_{\text{nul}} = \underbrace{\frac{\vec{j}\,\vec{u_z}}{\gamma}}_{\frac{j_z}{\gamma}} - \underbrace{\left(\frac{B\,\vec{u_z}}{ne} \wedge \vec{j}\right)\vec{u_z}}_{\text{nul}}$$

donc $\boxed{j_z = 0}$

---

15)



$$\tan\theta_h = \frac{Bj/ne}{j/\gamma}$$

$$\boxed{\tan\theta_h = \frac{B\gamma}{ne} = \text{cste}}$$

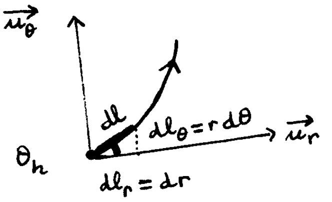
---

16)

remarque

on cherche l'équation d'une ligne de courant (cf équation d'une ligne de champ) dans un plan $z = \text{cste}$.

on peut retrouver sur figure :



$$\tan\theta_h = \frac{d\ell_\theta}{d\ell_r} = \frac{r\,d\theta}{dr}$$

... etc

On peut écrire puisque, en un point de la ligne de courant, $\vec{dl}$ se trouve selon $\vec{\gamma}$

$$\vec{dl} \wedge \vec{\gamma} = \vec{0}$$

$$\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z} \quad \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ dz \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \gamma \cos\theta_h \\ \gamma \sin\theta_h \\ 0 \end{vmatrix}$$

ce qui donne :

selon $\vec{u_r}$: $\quad -dz\ \gamma \sin\theta_h = 0 \qquad z = \text{cote}$

selon $\vec{u_\theta}$: $\quad dz\ \gamma \cos\theta_h = 0 \qquad z = \text{cote}$

selon $\vec{u_z}$: $\quad dr\ \gamma \sin\theta_h - r\,\gamma\,d\theta \cos\theta_h = 0$

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\tan\theta_h}$$

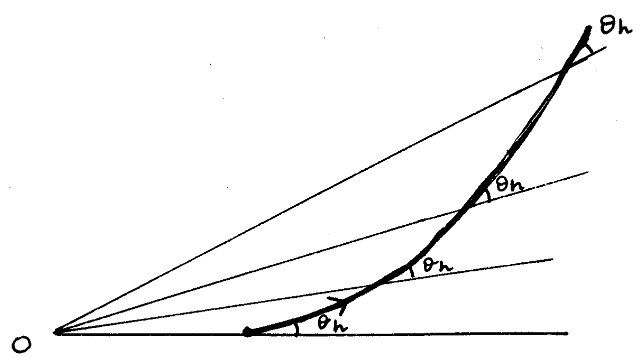
$$\frac{dr}{r} = \frac{ne}{B\gamma}\,d\theta$$

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'} = \frac{ne}{B\gamma}\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta'$$

$$\ln\frac{r}{r_0} = \frac{ne}{B\gamma}(\theta-\theta_0)$$

$$\boxed{r = r_0 \exp\left(\frac{ne}{B\gamma}(\theta-\theta_0)\right)}$$

Il s'agit d'une courbe qui fait toujours le même angle avec $\vec{u_r}$. C'est une spirale logarithmique



17) La démonstration est analogue à 15)

18)

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} - \frac{\vec{B}}{ne} \wedge \vec{j}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_r &= \frac{j_r}{\gamma} + \frac{B}{ne} j_\theta \\ 0 &= \frac{j_\theta}{\gamma} - \frac{B}{ne} j_r \end{aligned}}$$

remarque

La deuxième ligne redonne

$$\frac{j_\theta}{j_r} = \frac{B\gamma}{ne} = \tan\theta_H$$

établi sur figure en 15)

$$E_r = \frac{j_r}{\gamma} + \frac{B}{ne}\frac{B\gamma}{ne} j_r$$

$$E_r = \frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{\gamma^2 B^2}{n^2 e^2}\right) j_r$$

(au lieu de

$$E_r = \frac{1}{\gamma} \qquad j_r \;)$$

On obtient alors

$$\boxed{R = R_0 \left(1 + \frac{\gamma^2 B^2}{n^2 e^2}\right)}$$

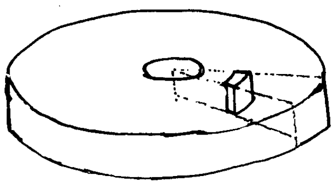
$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{\gamma^2 B^2}{n^2 e^2} = 0{,}39\ 10^{-6}$$

---

19) On pourrait éventuellement trouver la résistance du disque en adaptant la formule

$$R = \frac{1}{\gamma}\frac{\ell}{S}$$

à une résistance élémentaire :



$$\frac{1}{\gamma}\frac{dr}{a\, r\, d\theta}$$

- sommer de R_1 à R_2 pour obtenir la résistance du secteur $d\theta$
- sommer les conductances des secteurs (en parallèle) pour obtenir la conductance totale

En presence de champ magnétique, les lignes de courant sont plus grandes

Au lieu de dr dans la formule précédente, il faudrait mettre $d\ell = \sqrt{dr^2+r^2 d\theta^2}$

$$= dr\sqrt{1+\left(\frac{r\,d\theta}{dr}\right)^2}$$

$$= dr\sqrt{1+\tan^2\theta_h} \qquad \text{(cf 16)}$$

$$= dr\sqrt{1+\frac{B^2\gamma^2}{n^2e^2}}$$

La résistance est donc multiplié par $\sqrt{1+\frac{B^2\gamma^2}{n^2e^2}}$