DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 2 heures

Sujet

Déviation de la lumière par les étoiles

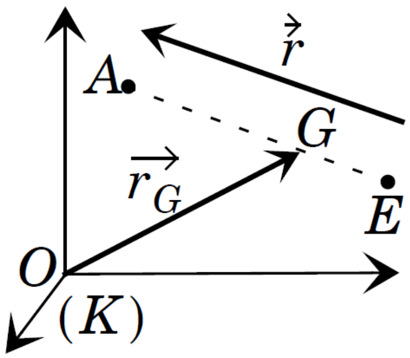
Données :

Célérité de la lumière dans le vide	$c=3{,}00.10^{8}\,m.s^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$\mathscr{G}=6{,}67.10^{-11}\,m^{3}.kg^{-1}.s^{-2}$
Durée d'une année	$365{,}25\,jours=3{,}16.10^{7}\,s$
Masse du Soleil	$M=1{,}99.10^{30}\,kg$
Rayon du Soleil	$R=6{,}95.10^{8}\,m\cdot$

Ce problème étudie, dans un modèle non relativiste, la déviation d'une particule par une étoile E, considérée comme une répartition de masse à symétrie sphérique, de rayon R, de masse M et de centre O. La particule étudiée A est ponctuelle et de masse m. On considère le système formé de A et E comme isolé. Le référentiel d'étude $(\mathscr{R})$ est galiléen.

I. Étude du système à deux points

On étudie le système Σ formé de A et E.



1. Définir le référentiel barycentrique du mouvement du système Σ relativement à $(\mathscr{R})$; on le notera $(\mathscr{R}^*)$. Quelle propriété importante du référentiel $(\mathscr{R}^*)$ peut-on affirmer ?

On notera O un point fixe de $(\mathscr{R})$, G le centre d'inertie du système Σ ; on notera $\vec{r}_G=\overrightarrow{OG}$. On notera aussi $\vec{r}=\overrightarrow{EA}$ (voir figure). Les dérivées temporelles successives, prises dans le référentiel $(\mathscr{R})$, de ces vecteurs sont notées : $\vec{v}_G=\dfrac{d\,\vec{r}_G}{dt}$, $\vec{v}=\dfrac{d\,\vec{r}}{dt}$, $\vec{a}_G=\dfrac{d\,\vec{v}_G}{dt}$, $\vec{a}=\dfrac{d\,\vec{v}}{dt}$.

2. Établir les expressions de la vitesse et de l'accélération de A relativement à $(\mathscr{R})$ en fonction de $\vec{v}_G$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ et des masses m et M .

3. Établir l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_0$ en O du système Σ relativement à $(\mathscr{R})$ en fonction de $\vec{r}_G$, $\vec{v}_G$, $\vec{r}$, $\vec{v}$ et de $m_T=m+M$ et de la masse réduite μ définie par $1/\mu=1/m+1/M$.

4. Établir l'expression de l'énergie cinétique E_c du système Σ relativement à $(\mathscr{R})$ en fonction de $\vec{v}_G$, $\vec{v}$, m_T et μ .

5. Expliciter l'équation différentielle du second ordre qui régit l'évolution de $\vec{r}$. On notera $r=\|\vec{r}\|$ et on supposera $r>R$.

6. Justifier la conservation du moment cinétique barycentrique $\vec{\sigma}^*$ du système.

7. L'énergie cinétique barycentrique du système $E_c{}^*$ se conserve-t-elle ?

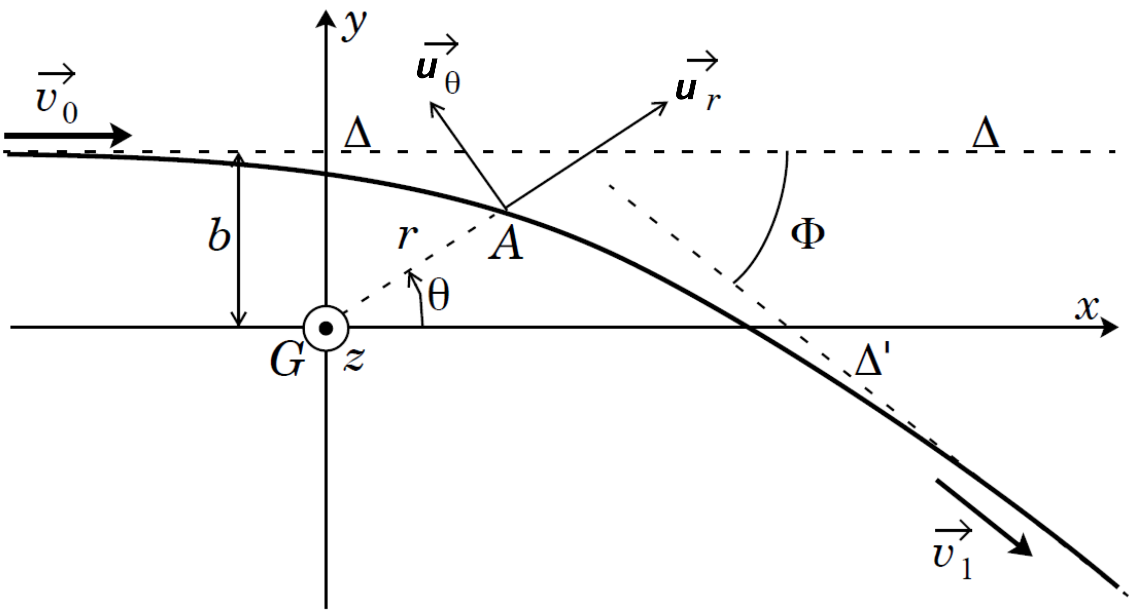
II. Trajectoires hyperboliques de la particule A

On se place dans toute la suite du problème dans le référentiel $(\mathscr{R}^*)$. On suppose que $M \gg m$.

8. Montrer dans ce cas que $\overrightarrow{GA} \approx \vec{r}$ et que la vitesse de A dans le référentiel barycentrique est voisine de $\vec{v}$. Relier de même les grandeurs du mouvement barycentrique $\vec{\sigma}^*$ et $E_c{}^*$ au moment cinétique et à l'énergie cinétique de A dans le référentiel $(\mathscr{R}^*)$.

On montre donc que le problème revient en quelque sorte à considérer désormais le mouvement d'un point A de masse m dans le champ de l'étoile fixe de centre G . On supposera $r>R$.

9. Montrer que le mouvement de A est plan.



On appellera Gxy le plan du mouvement ; on repère la position de A dans le plan Gxy par ses coordonnées polaires $r = GA$ et $\theta = (\vec{u}_x . \vec{r})$. On notera $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ la base locale polaire correspondante (voir figure).

On pose $\vec{\sigma}^* . \vec{u}_z = mC$.

10.Expliciter C en fonction de r et $\mathring{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

11.Montrer que $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mathscr{G} M}{r^2} \vec{u}_r$ puis expliciter la dérivée $\frac{d\vec{v}}{d\theta}$ en fonction de G , M et C .

12.En déduire alors que le vecteur $\vec{e} = \alpha \vec{v} - \vec{u}_\theta$ est , pour un choix que l'on précisera de la constante α , une constante du mouvement.

On décide ici de choisir l'axe Gy selon $\vec{e}$. On pose donc : $\vec{e} = e \vec{u}_y$ avec $e > 0$.

13.À partir du résultat de la question précédente, exprimer $\vec{v} . \vec{u}_\theta$ en fonction de α , e et θ ; en déduire l'équation de la trajectoire, qu'on écrira sous la forme $\frac{p}{r} = 1 + e \cos\theta$. Expliciter p en fonction de α et C , puis en fonction de C , $\mathscr{G}$ et M .

14.À quelle condition, portant sur e , la trajectoire de A est-elle hyperbolique ? Justifier la réponse.

III. Étude de la trajectoire

On ne fait plus ici d'hypothèse particulière quant à la direction du vecteur $\vec{e}$ dans le plan Gxy du mouvement.

A. Angle de déviation

15.Lorsque la particule A est encore située à très grande distance de l'étoile E ($x_A \rightarrow -\infty$ voir la figure), sa vitesse v_0 est colinéaire à Gx ; elle a pour norme v_0 . L'asymptote Δ à cette trajectoire incidente passe à la distance b de G . Exprimer le vecteur moment cinétique de A lorsqu'il se trouve à très grande distance de l'étoile. En déduire C en fonction de b et v_0 ; préciser en particulier le signe de C .

16.Lorsque la particule A s'est largement éloignée de l'étoile E , sa trajectoire est à nouveau une droite Δ' parcourue à la vitesse constante $\vec{v}_1$. Quelle est la norme de $\vec{v}_1$?

17.Exprimer, pour $t \rightarrow -\infty$ puis pour $t \rightarrow +\infty$, le vecteur $\vec{e}$ projeté sur la base $\vec{u}_x, \vec{u}_y$, en fonction de α , v_0 et de l'angle de déviation Φ entre les droites Δ et Δ' .

18.En déduire une expression de $\tan(\Phi/2)$ en fonction de v_0 , C , $\mathscr{G}$ et M .

B. Distance minimale d'approche

Lors de son mouvement, la particule A passe à un certain instant à une distance minimale d du centre de l'étoile E .

19.À partir de deux lois de conservation, déterminer une équation du second degré dont $1/d$ est solution. En déduire que : $d = \dfrac{C^2}{\mathcal{G} M + \sqrt{\mathcal{G}^2 M^2 + C^2 v_0^2}}$.

C. Lien déviation et distance minimale

20.Quel est le sens de variation, pour v_0 fixé, de la fonction $\Phi(d)$ reliant l'angle de déviation et la distance minimale d'approche ? Commenter.

21.Lorsque cette distance minimale correspond à une trajectoire rasante $(d=R)$, quelle est la valeur de la déviation Φ_0 ? On montrera que : $\tan\dfrac{\Phi_0}{2} = \dfrac{\mathcal{G} M}{v_0^2 \sqrt{R(R+\rho)}}$ où l'on exprimera ρ en fonction de $\mathcal{G}$, M et v_0 .

22.Déterminer numériquement ρ , appelé rayon de Schwarzschild, dans le cas du Soleil pour une particule de vitesse $v_0 \approx c$.

IV. Déviation de la lumière par le Soleil

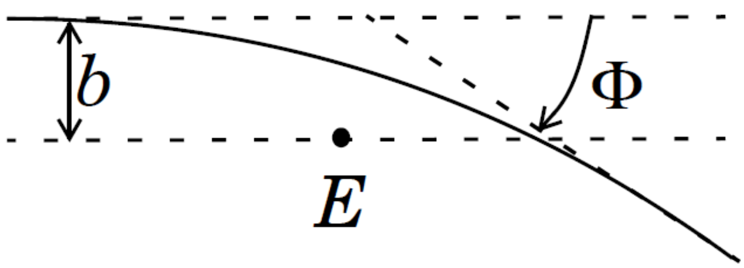
La lumière est ici traitée comme un faisceau de photons, particules dont la masse m n'a pas besoin d'être précisée dans la suite (même si on sait aujourd'hui qu'elle est nulle), et qu'on traitera dans le cadre de la mécanique non relativiste (même si cette approximation n'est pas légitime). Ces photons seront considérés comme soumis, comme une particule matérielle ordinaire, à l'interaction gravitationnelle avec l'étoile.

On admettra que, pour les photons passant à proximité du Soleil, $\rho \ll R$ (voir plus haut).

23.Déterminer, en secondes d'arc, la déviation Φ_0 correspondant à un photon rasant le Soleil. On prendra $v_0 = c$.

24.Une expédition fut montée en mai 1919 pour observer cette déviation à l'occasion d'une éclipse de Soleil. La météo ne fut pas très bonne, pas plus donc que la qualité des observations ; toutefois, des mesures ultérieures menées lors de diverses éclipses de 1922 à 1999 confirmèrent progressivement une valeur mesurée expérimentalement $\Phi_e = 1{,}75''$. Pourquoi la mesure doit-elle être menée lors d'une éclipse du Soleil ? Commenter la valeur de Φ_e .

V. Effets de lentille gravitationnelle



La présence d'un astre massif E sur le trajet d'un faisceau de lumière parallèle provoque une déviation des rayons lumineux formant ce faisceau. L'angle de déviation Φ dépend de la distance b entre le rayon étudié et l'astre E, sous la forme: $\Phi \approx \kappa \frac{\mathscr{G} M}{c^2 b}$, où M est la masse de l'astre E.

25.Par analyse dimensionnelle, préciser l'unité de la grandeur constante κ.

26.Montrer que la déviation gravitationnelle de la lumière par l'astre E se comporte, pour un rayon passant à la distance b de l'astre E (cf. figure), comme une lentille convergente dont on exprimera la distance focale f' en fonction de b, κ, c, $\mathscr{G}$ et M.

On considère un rayon lumineux rasant la surface du Soleil ; b est donc voisin du rayon R du Soleil.

27.Déterminer f' dans ces conditions ; on prendra $\kappa=4$ SI et on exprimera le résultat en années-lumière (une année-lumière est la distance parcourue par la lumière pendant une année).

28.L'observation des astres lointains et peu lumineux est parfois améliorée lorsque s'interpose, sur le trajet de la lumière entre ces astres et la Terre, une galaxie massive. Pouvez-vous expliquer ce fait ?

Réponses

Déviation de la lumière par les étoiles

1) Le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ est un référentiel :
- dans lequel le centre d'inertie G est fixe (en général, on prend l'origine en G)
- dont la base du repère d'espace est identique à la base du référentiel de référence $\mathcal{R}$

Ce référentiel $\mathcal{R}^*$ est donc en translation par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse $\overrightarrow{v_G}/\mathcal{R}$

Le système étudié $\Sigma = \{A + E\}$ est isolé.

On écrit le théorème de la résultante cinétique à ce système dans $\mathcal{R}$

$$\underbrace{\overrightarrow{F_{ext}}}_{\text{nul car système isolé}} = (M+m)\left(\frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$$

$$\overrightarrow{v_G}/\mathcal{R} = \text{constante}$$

$\mathcal{R}^*$ est donc en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ pour un système isolé. <u>$\mathcal{R}^*$ est alors un référentiel galiléen.</u>

---

2)

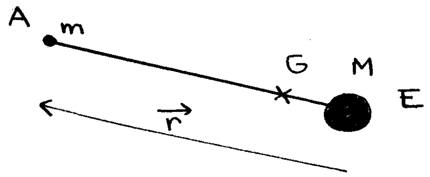
remarque :
Puisque $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ ont même base,

$$\frac{d}{dt}/\mathcal{R} = \frac{d}{dt}/\mathcal{R}^*$$

on écrit donc ici simplement $\frac{d}{dt}$

Pour obtenir $\overrightarrow{v_A}/\mathcal{R}$ et $\overrightarrow{a_{A/\mathcal{R}}}$, on va écrire $\overrightarrow{OA}$ (O fixe dans $\mathcal{R}$) et dériver

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}$$



avec $\overrightarrow{GA} = \dfrac{M}{M+m}\,\vec{r}$

Facile à démontrer. Par exemple

$$\begin{cases} m\,\overrightarrow{OA} + M\,\overrightarrow{OE} = (m+M)\,\underbrace{\overrightarrow{OG}}_{\vec{r}_G} \\ \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE} = \underbrace{\overrightarrow{EA}}_{\vec{r}} \end{cases}$$

d'où $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OE}$

Plus simple, en prenant l'origine en A dans la définition du barycentre :

$$m\,\overrightarrow{OA} + M\,\overrightarrow{OE} = (m+M)\,\overrightarrow{OG}$$

devient alors

$$\vec{0} + M\,\underbrace{\overrightarrow{AE}}_{-\vec{r}} = (m+M)\,\overrightarrow{AG}$$

donc :

$$\overrightarrow{GA} = \frac{M}{M+m}\,\vec{r}$$

$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_G + \frac{M}{M+m}\,\vec{r}$$

$$\boxed{\vec{v}_{A/\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}_G}_{\text{cf vitesse entraînement}} + \underbrace{\frac{M}{M+m}\,\vec{v}}_{\text{cf vitesse relative }/\mathcal{R}^*}}$$

$$\vec{a}_{A/\mathcal{R}} = \underbrace{\cancel{\vec{a}_G}}_{\text{nul}} + \frac{M}{M+m}\,\vec{a}$$

$$\boxed{\vec{a}_{A/\mathcal{R}} = \frac{M}{M+m}\,\vec{a}}$$

---

3)

$$\vec{\sigma}(O)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OA} \wedge m\,\vec{v}_{A/\mathcal{R}} + \overrightarrow{OE} \wedge M\,\vec{v}_{E/\mathcal{R}}$$

On néglige ici l'éventuel moment cinétique propre de l'étoile puisque on la traite dans ce calcul comme <u>un point matériel</u>.

→ Au lieu de faire tout le calcul, on utilise le théorème connu de <u>König pour le moment cinétique</u>

$$\vec{\sigma}(O)/\mathcal{R} = \vec{\sigma}(O) \text{ de toute la masse en } G/\mathcal{R} + \vec{\sigma}^* \text{ dans le référentiel barycentrique}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(O)/\mathcal{R} = \vec{r_G} \wedge m_T \vec{v_G} + \vec{\sigma}^*}$$

avec

$$\vec{\sigma}^* = \underbrace{\vec{r_A}^*}_{\frac{M}{M+m}\vec{r}} \wedge m \underbrace{\vec{v_A}^*}_{\frac{M}{M+m}\vec{v}} + \underbrace{\vec{r_E}^*}_{\frac{-m}{M+m}\vec{r}} \wedge M \underbrace{\vec{v_E}^*}_{\frac{-m}{M+m}\vec{v}}$$

(calculé ici en G)

→ Au lieu de faire tout le calcul, on utilise le fait que <u>le moment cinétique barycentrique est indépendant du point de calcul</u>. (On pense à la formule de transport du moment :

$$\vec{\sigma}^*(B) = \vec{\sigma}^*(A) + \vec{BA} \wedge \underbrace{\vec{P}^*}_{m_T \vec{v_G}/\mathcal{R}^* \text{ nul}}$$

donc $\vec{\sigma}^*_B = \vec{\sigma}^*_A \ \forall B \text{ et } A$)

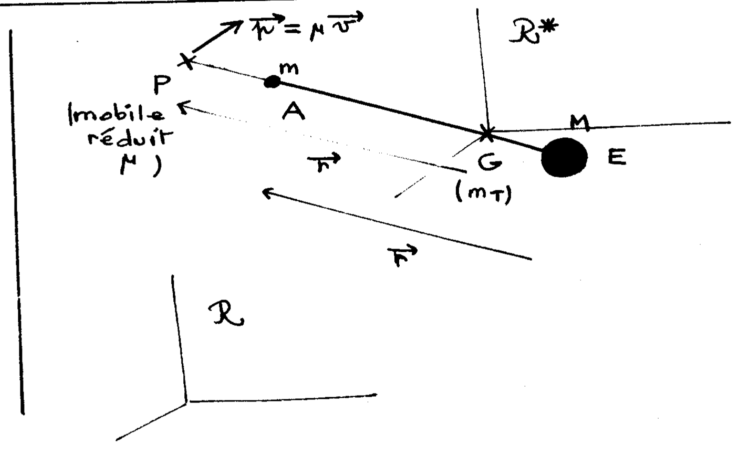
On calcule $\vec{\sigma}^*$ en E

$$\vec{\sigma}^* = \vec{EA} \wedge m \vec{v_A}^* + \vec{EE} \wedge M \vec{v_E}^*$$

$$= \vec{r} \wedge m \frac{M}{M+m} \vec{v}$$

$$= \vec{r} \wedge \underbrace{\mu \vec{v}}_{\text{quantité de mouvement du mobile réduit dans } \mathcal{R}^*}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(O)/\mathcal{R} = \vec{r_G} \wedge m_T \vec{v_G} + \vec{r} \wedge \mu \vec{v}}$$



4) $$E_{c/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m v_{A/\mathcal{R}}^2 + \frac{1}{2} M v_{E/\mathcal{R}}^2$$

En traitant l'étoile comme un point matériel donc en ne tenant pas compte de son énergie cinétique propre.

$\longrightarrow$ Au lieu de faire tout le calcul, on utilise le théorème connu de König̈ pour l'énergie cinétique

$E_{c/\mathcal{R}} =$ E_C de toute la masse en G $+$ E_C^* dans le référentiel barycentrique

$$\boxed{E_c/\mathcal{R} = \frac{1}{2} m_T v_G^2 + E_c^*}$$

avec

$$E_c^* = \frac{1}{2} m v_A^{*2} + \frac{1}{2} M v_E^{*2}$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{M \vec{v}}{M+m}\right)^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{-m \vec{v}}{M+m}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{m} \left(\frac{mM}{M+m} v\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{M} \left(\frac{mM}{M+m} v\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)}_{\frac{1}{\mu}} \mu^2 v^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \mu v^2}_{\text{énergie cinétique du mobile réduit dans } \mathcal{R}^*}$$

$$\boxed{E_c/\mathcal{R} = \frac{1}{2} m_T v_G^2 + \frac{1}{2} \mu v^2}$$

---

5) On écrit le principe fondamental à A dans $\mathcal{R}^*$ galiléen.

$$\overrightarrow{F_A} = m \vec{a}_{A/\mathcal{R}}$$

$$-\frac{\mathcal{G} m M}{r^3} \vec{r} = m \frac{M}{M+m} \vec{a}$$

$$-\frac{\mathcal{G}\, m M}{r^3}\vec{r} = \mu\,\vec{a}$$

$$-\frac{\mathcal{G}\, m M}{r^3}\vec{r} = \mu\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{\mathcal{G}\, m M}{\mu}\,\frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{0}}$$

---

6) Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ on peut écrire le théorème du moment cinétique en un point fixe O

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(O)_{/\mathcal{R}} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext}(O)$$

Dans un référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ (associé à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$) on peut écrire

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext}(G)$$

Ici, le référentiel $\mathcal{R}^*$ est galiléen

Ici, il n'y a d'action extérieure sur Σ

On peut
- soit appliquer le théorème du moment cinétique en G dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$
- soit appliquer le théorème du moment cinétique en G dans un référentiel galiléen d'origine G et en translation par rapport à $\mathcal{R}$ $\left(\vec{\sigma}_{G/\mathcal{R}_G} = \vec{\sigma}^*\right)$

Donc quel que soit le théorème cité, on a

$$\boxed{\vec{\sigma}^* = \text{constante}}$$

La question exige peut être la démonstration du théorème.

Par exemple dans le cas de l'exercice :

$$\vec{\sigma}^* = \vec{r} \wedge \mu\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \wedge \mu\vec{v} + \vec{r} \wedge \underbrace{\mu\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{F_A}}$$

$\vec{F_A}$ est selon $\vec{r}$ donc

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \vec{0}$$

---

7) Dans le référentiel barycentrique, on aura

$$d E_c^* = \delta W_{\text{forces intérieures interaction}}$$

donc $\boxed{E_m^* = E_c^* + E_{p,int} = \text{constante}}$

$\boxed{E_c^* \text{ ne se conserve pas.}}$

Le problème exige-t-il le calcul ?

$$E_c^* = \frac{1}{2}\mu \vec{v}^2$$

$$\frac{dE_c^*}{dt} = \mu \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v}$$

$$= -\frac{\mathcal{G} m M \vec{r}}{r^3} (\dot{r}\,\vec{u_r} + \vec{v}_{\perp \vec{u}_r})$$

$$\frac{dE_c^*}{dt} = -\frac{\mathcal{G} m M \dot{r}}{r^2}$$

---

8) $\longrightarrow$ $$\vec{GA} = \frac{1}{1+\frac{m}{M}}\vec{r}$$

$$\vec{GA} \simeq \left(1 - \frac{m}{M}\right)\vec{r} \quad \text{à l'ordre 1 en } \frac{m}{M}$$

$$\vec{GA} \simeq \vec{r} \quad \text{à l'ordre 0 en } \frac{m}{M}$$

$\longrightarrow$ En dérivant $\vec{GA}$, on aura de même

$$\vec{v}_A^* \simeq \left(1 - \frac{m}{M}\right)\vec{v} \simeq \vec{v}$$

$\longrightarrow$ Puis

$$\vec{\sigma}^* = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}$$

$$= \vec{GA}\left(1+\frac{m}{M}\right) \wedge \frac{m}{\left(1+\frac{m}{M}\right)} v_A^* \left(1+\frac{m}{M}\right)$$

$$= \vec{\sigma_A}^* \left(1+\frac{m}{M}\right)$$

$$\simeq \vec{\sigma_A}^*$$

$\longrightarrow$ Et

$$E_c^* = \frac{1}{2}\mu v^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m}{\left(1+\frac{m}{M}\right)} \; v_A^{*2}\left(1+\frac{m}{M}\right)^2$$

$$= E_{c_A}^{*}\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

$$\simeq E_{c_A}^{*}$$

---

9) On sait cf 6) que $\overrightarrow{\sigma}^*$ est une constante or

$$\overrightarrow{\sigma}^* = \overrightarrow{r} \wedge \mu \overrightarrow{v} \quad \text{ici (cf approximation)}$$

$$= \overrightarrow{GA} \wedge m \overrightarrow{v_A}^*$$

donc $\boxed{\text{A appartient au plan passant par G et perpendiculaire à } \overrightarrow{\sigma}^*}$

---

10)

$$\overrightarrow{\sigma}^* = r\,\overrightarrow{u_r} \wedge m\left(\dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

$$= m\,\underbrace{r^2\dot{\theta}}_{C}\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{C = r^2\dot{\theta}}$$

(constante des aires)

---

11) On sait cf 5) que le principe fondamental permet d'écrire

$$-\frac{\mathcal{G}\,m\,M}{r^3}\,\overrightarrow{r} = \mu\,\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}$$

μ confondu avec m (cf approximation)

donc

$$\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -\frac{\mathcal{G}M}{r^3}\,\overrightarrow{r}$$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}}$$

avec

$$\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{v}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{d\overrightarrow{v}}{d\theta}\,\frac{C}{r^2}$$

finalement :

$$\frac{d\vec{v}}{d\theta}\,\frac{C}{r^2} = -\frac{\mathcal{G} M}{r^2}\,\vec{u_r}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\frac{\mathcal{G} M}{C}\,\vec{u_r}}$$

---

12) On veut que :

$$\vec{e} = \alpha\,\vec{v} - \vec{u_\theta}$$

soit une constante.

Dérivons / θ

$$\frac{d\vec{e}}{d\theta} = \alpha\,\frac{d\vec{v}}{d\theta} - \frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta}$$

On sait que

$$\frac{d\vec{u_r}}{dt} = \frac{d\vec{u_r}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \vec{u_\theta}\,\dot\theta$$

$$\frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = \frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = -\vec{u_r}\,\dot\theta$$

$$\frac{d\vec{e}}{d\theta} = \alpha\left(-\frac{\mathcal{G} M}{C}\,\vec{u_r}\right) - \left(-\vec{u_r}\right)$$

$$= \vec{u_r}\left(1 - \alpha\,\frac{\mathcal{G} M}{C}\right)$$

qui doit donc être nul, ce qui implique

$$\boxed{\alpha = \frac{C}{\mathcal{G} M}}$$

---

13)

$$e\,\vec{u_y} = \alpha\,\vec{v} - \vec{u_\theta}$$

donc

$$\alpha\,\vec{v} = \vec{u_\theta} + e\,\vec{u_y}$$

on multiplie par $\vec{u_\theta}$:

$$\alpha\,\underbrace{\vec{v}\,\vec{u_\theta}}_{r\dot\theta} = 1 + e\,\underbrace{\vec{u_y}\,\vec{u_\theta}}_{\cos\theta}$$

$$\alpha\,\frac{C}{r} = 1 + e\cos\theta$$

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\theta \qquad \text{avec:}$$

$$\boxed{p = \alpha\,C}$$

$$\boxed{p = \frac{C^2}{\mathcal{G} M}}$$

14) On a obtenu l'équation d'une conique.

Si la conique admet des <u>points à l'infini</u> c'est une hyperbole (une parabole dans le cas limite)

$\frac{1}{r}$ s'annule pour : $1 + e \cos\theta = 0$

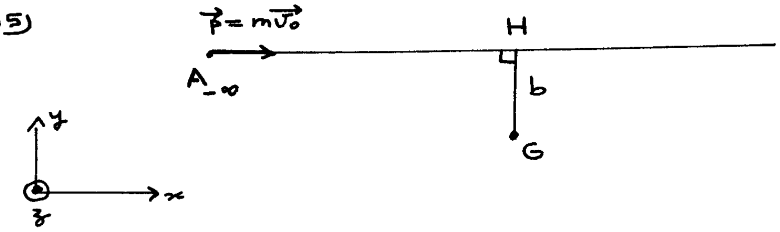
ce qui impose $e \geq 1$

il faut donc :

$$\boxed{e > 1}$$

---

15)



$$\vec{\sigma}^*_{(-\infty)} = \overrightarrow{GA_{-\infty}} \wedge \vec{P}$$

$$= \left(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HA_{-\infty}}\right) \wedge m\vec{v_0}$$

$$= \overrightarrow{GH} \wedge m\vec{v_0}$$

$$= b\,\vec{u_y} \wedge m v_0\,\vec{u_x}$$

$$= -m\,v_0\,b\,\vec{u_z}$$

Et puisque $\vec{\sigma}^*$ est une constante

$$\boxed{\vec{\sigma}^* = -m\,v_0\,b\,\vec{u}_z}$$

$$\boxed{C = -\,v_0\,b}$$

---

16) Il y a conservation de l'énergie mécanique totale

$$E^*_m = \text{constante}$$

$$E^*_{m(-\infty)} = E^*_{m(+\infty)}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + E_{P_{-\infty}} = \frac{1}{2} m v_1^2 + E_{P_{+\infty}}$$

avec $E_{P_{-\infty}} = E_{P_{+\infty}} = 0$

$$\boxed{\|\vec{v_1}\| = v_0}$$

---

17)
$$\vec{e} = \text{constante}$$
$$= \alpha \vec{v} - \vec{u}_\theta$$

On écrit donc

$$\vec{e}_{(-\infty)} = \vec{e}_{(+\infty)}$$

$$\alpha v_0 \vec{u_x} - \vec{u_\theta}(-\infty) = \alpha v_0 (\cos\phi \, \vec{u_x} - \sin\phi \, \vec{u_y}) - \vec{u_\theta}(+\infty)$$

avec $\vec{u_\theta} = -\sin\theta \, \vec{u_x} + \cos\theta \, \vec{u_y}$

$\rightarrow$ Pour $\vec{u_\theta}(-\infty)$ on a $\theta = \pi$ donc

$u_\theta(-\infty) = -\vec{u_y}$

$\rightarrow$ Pour $\vec{u_\theta}(+\infty)$ on a $\theta = -\phi$ donc

$u_\theta(\infty) = \sin\phi \, \vec{u_x} + \cos\phi \, \vec{u_y}$

$$\alpha v_0 \vec{u_x} + \vec{u_y} = \alpha v_0 (\cos\phi \, \vec{u_x} - \sin\phi \, \vec{u_y}) - (\sin\phi \, \vec{u_x} + \cos\phi \, \vec{u_y})$$

Ce qui donne deux relations :

$\rightarrow$ selon $\vec{u_x}$:

$$\boxed{\alpha v_0 = \alpha v_0 \cos\phi - \sin\phi}$$

$\rightarrow$ selon $\vec{u_y}$:

$$\boxed{1 = -\alpha v_0 \sin\phi - \cos\phi}$$

---

18) • En passant à l'angle moitié, la première relation donne :

$$\alpha v_0 = \alpha v_0 \left(2\cos^2\frac{\phi}{2} - 1\right) - 2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}$$
$$2\alpha v_0 \sin^2\frac{\phi}{2} = -2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}$$
$$\tan\frac{\phi}{2} = -\frac{1}{\alpha v_0}$$

• De même, pour la deuxième relation

$$1 = -\alpha v_0 \, 2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2} - \left(2\cos^2\frac{\phi}{2} - 1\right)$$
$$2\cos^2\frac{\phi}{2} = -\alpha v_0 \, 2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}$$
$$\tan\frac{\phi}{2} = -\frac{1}{\alpha v_0}$$

Ces deux relations sont équivalentes à

$$\tan\frac{\phi}{2} = -\frac{1}{\alpha v_0}$$

$$\boxed{\tan\frac{\phi}{2} = -\frac{GM}{v_0 C}}$$

---

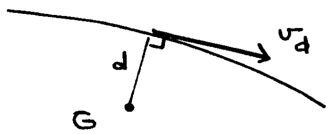
19) On écrit la conservation de E_m^*
et la conservation de σ^*
entre $-\infty$ et la distance minimale.

$\longrightarrow$ $E_m^*(-\infty) = E_m^*(d)$

(1) $$\boxed{\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_{(d)}^2 - \frac{GMm}{d}}$$

$\longrightarrow$ $\sigma^*(-\infty) = \sigma^*(d)$

(2) $$\boxed{-m v_0 b = -m v_d\, d \qquad (= mC)}$$



donc (2) $v_d = \overbrace{v_0 b}^{-C} \dfrac{1}{d}$

on reporte dans (1) :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m\, C^2 \left(\frac{1}{d}\right)^2 - GMm\left(\frac{1}{d}\right)$$

$$\left(\frac{1}{d}\right)^2 - 2\cdot\frac{GM}{C^2}\left(\frac{1}{d}\right) - \frac{V_0^2}{C^2} = 0$$

d'où

$$\frac{1}{d} = \frac{GM}{C^2} \oplus \sqrt{\left(\frac{GM}{C^2}\right)^2 + \frac{V_0^2}{C^2}}$$

$$\boxed{d = \frac{C^2}{GM + \sqrt{G^2M^2 + C^2 V_0^2}}}$$

---

20) On cherche $\tan\frac{\phi}{2}$ en fonction de d

$$\tan\frac{\phi}{2} = -\frac{GM}{v_0\, C} \qquad (\text{cf } 18))$$

Il faut écrire C en fonction de d

$$\frac{1}{C^2} = \frac{1/(d^2 v_0^2)}{1 + 2\frac{GM}{v_0^2 d}} \quad (\text{cf } 19))$$

$$-\frac{1}{C} = \frac{\frac{1}{v_0 d}}{\sqrt{1 + \frac{2GM}{v_0^2 d}}} \quad (\text{cf } C < 0)$$

finalement

$$\boxed{\tan\frac{\phi}{2} = \frac{\frac{GM}{V_0^2 d}}{\sqrt{1+\frac{2GM}{V_0^2 d}}}}$$

$y = \frac{x}{\sqrt{1+2x}}$
est une fn croissante de x
(cf dérivée)

donc $\tan\frac{\phi}{2}$ est une fn croissante de $\frac{1}{d}$

$$\boxed{\phi \text{ est une fonction décroissante de } d}$$

Plus la particule s'approche près de l'étoile, plus la déviation est importante

---

21) $$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{GM/v_0^2}{\sqrt{d^2 + \frac{2GM}{v_0^2}d}}$$

$$= \frac{GM/v_0^2}{\sqrt{d\left(d+\frac{2GM}{v_0^2}\right)}}$$

Pour $d = R$, on trouve bien la reponse proposée

$$\tan\frac{\phi_0}{2} = \frac{GM/v_0^2}{\sqrt{R\left(R+\frac{2GM}{v_0^2}\right)}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{2GM}{v_0^2}}$$

---

22) A.N. $$= \frac{2 \quad 6{,}67\ 10^{-11} \quad 1{,}99\ 10^{30}}{(3\ \ 10^8)^2}$$

$$\boxed{\rho = 2{,}95 \text{ km}}$$

---

23) $$\tan\frac{\phi_0}{2} = \frac{GM}{v_0^2\sqrt{R(R+\rho)}}$$

$$\boxed{\phi_0 = 2\,\frac{GM}{c^2 R}}$$

A.N. $\phi_0 = 2\,\dfrac{6{,}67\ 10^{-11}\quad 1{,}99\ 10^{30}}{(3.\ 10^8)^2\ 6{,}95\ 10^8}$

$= 4{,}24\ 10^{-6}$ radian

soit en secondes d'arc

$= \dfrac{4{,}24\ 10^{-6}}{\pi} \times 180 \times 60 \times 60$

$$\boxed{\phi_0 = 0{,}875''}$$

---

24) La mesure expérimentale donne un résultat <u>double</u>

$$\boxed{\phi_e = 2\,\phi_0}$$

<u>La mécanique classique est en échec</u>. Il faudra faire appel à la relativité pour comprendre le résultat.

Il faut faire la mesure lors d'une éclipse du soleil pour ne pas être gêné par la lumière du soleil qui ne permettrait plus de <u>distinguer la lumière provenant de l'étoile</u>, située au bord du disque solaire.

---

25)

$$\phi = K\,\frac{GM}{c^2 b}$$

$$\underbrace{\phi}_{\text{sans dimension}} = \underbrace{k}_{?}\ \underbrace{\frac{GMm/b}{mc^2}}_{\text{sans dimension}}$$

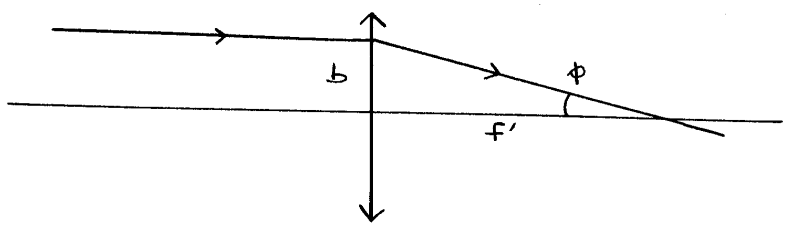
GMm/b → dimension : énergie potentielle

mc^2 → dimension énergie cinétique

$\boxed{K \text{ est donc une grandeur sans dimension.}}$

---

26) Pour une lentille :



avec $\quad \phi = \dfrac{b}{f'}$

Ici $\quad = K \dfrac{\mathcal{G} M}{c^2 b}$

donc, pour l'analogie, on posera :

$$\boxed{f' = \frac{c^2 b^2}{K \mathcal{G} M}}$$

(remarquer : f' dépendrait de b)

---

27) $$f' = \frac{c^2 R^2}{4 \mathcal{G} M}$$

avec cf 24)

$\phi_e = \dfrac{4 \mathcal{G} M}{c^2 R} = 1,75''$

$= 8,48\ 10^{-6}$ radian

A.N. $\quad f' = R \big/ \phi_e$

$= 6,95\ 10^{8} \big/ 8,48\ 10^{-6}$

$= \underline{8,2\ 10^{13}\ m}$

$= \dfrac{8,2\ 10^{13}}{3,16\ 10^{7}\ 3\ 10^{8}}$

$$\boxed{f' = 8,6\ 10^{-3} \text{ anneé-lumiere}}$$

---

28) Effet de lentille, donc convergence de la lumière.
L'étoile semble plus lumineuse.
