# DNS

## Sujet



---

# Conducteur et condensateur cylindriques en électrostatique

On donne permittivité du vide : $\varepsilon_0$ telle que $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\approx 9\,10^9$ .

Dans la suite les cylindres métalliques envisagés sont, sauf précision contraire, de rayon $a$ . Les conducteurs sont très longs. On négligera donc les effets de bords ce qui revient à supposer l'invariance en translation selon l'axe $z$ des cylindres ( comme si les cylindres étaient de longueur infinie ).

## I. Conducteur seul dans l'espace

On considère un seul conducteur dans l'espace vide de charge linéique notée $\lambda_0$ .

1. Pourquoi peut-on parler du potentiel de ce conducteur ? Justifier. On désignera ce potentiel par $V_0$ .
2. Démontrer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ en tout point de l'espace. Commencer par l'étude des symétries. Travailler en coordonnées cylindriques et tracer le graphe traduisant le résultat obtenu en fonction de la position.
3. Démontrer l'expression du potentiel $V$ en tout point de l'espace et tracer le graphe. Commenter la valeur du potentiel quand on s'éloigne à l'infini de l'axe du cylindre.
4. Vérifier la relation de continuité ( ou de passage ) pour le champ électrostatique entre intérieur et extérieur du cylindre.
5. Y a-t-il une différence dans les résultats obtenus selon que le cylindre est creux ou plein? Si oui préciser laquelle.

## II. Condensateur cylindrique

On considère ici deux conducteurs cylindriques coaxiaux. Le cylindre intérieur a pour rayon $a_1$ , le cylindre extérieur a pour rayon intérieur $a_2$ et pour rayon extérieur $a_3$ . On donne aussi la différence de potentiel entre les deux cylindres, notée $U$ = potentiel du cylindre intérieur moins potentiel du cylindre extérieur.

6. Déterminer l'expression de la capacité par unité de longueur $\Gamma$ du condensateur coaxial. Pour répondre à cette question, on aura intérêt à partir de la charge ( inconnue ) par unité de longueur du conducteur intérieur qu'on pourra noter $\lambda_1$ .

7. Le cylindre intérieur est appelé âme. Le cylindre extérieur ou gaine métallique ou blindage est à la masse. Son potentiel est fixé à la valeur zéro. Déterminer le champ et le potentiel en tout point ( rappel : les réponses ne doivent pas faire intervenir l'inconnue $\lambda_1$ ). Tracer les courbes $E(r)$ ( coordonnée de $\vec{E}$ selon $u_r$ ) et $V(r)$ en fonction de $r$ .

8. Que devient l'expression de la capacité linéique lorsque $a_2=a_1+e$ avec $\frac{e}{a_1}=\varepsilon\ll 1$ . Montrer que le résultat obtenu est concordant avec la formule donnant la capacité pour un condensateur plan.

## III. Ligne bifilaire

On considère deux conducteurs cylindriques identiques, parallèles entre eux, seuls dans l'espace. Le rayon est $a$ , la distance entre les deux axes est $d$ . Le conducteur (1) d'axe $x=d/2, y=0$ est chargé par une charge linéique $+\lambda_0$ et le conducteur (2) d'axe $x=-d/2, y=0$ est chargé par une charge linéique $-\lambda_0$ . Dans la mesure où $a$ est supposé très petit par rapport aux autres distances intervenant dans le problème, on pourra supposer que la répartition de charge sur chaque conducteur est invariante en rotation autour de l'axe.

9. Trouver un plan d'antisymétrie pour la distribution de charges. On fait $V=0$ sur ce plan.

10. Exprimer le potentiel $V(M)$ en un point $M$ aux distances $r_1>a$ de l'axe du conducteur (1) et $r_2>a$ de l'axe du conducteur (2). En déduire l'expression du potentiel $V_0$ auquel est porté le conducteur (1). Que vaut le potentiel du conducteur (2) ? Simplifier l'expression de $V_0$ en tenant compte de $\frac{a}{d}\ll 1$ .

11. A.N. On donne :

$a=0,5\,cm$

$d=12\,m$

$V_0=1500\,V$

Calculer $\lambda_0$ .

12. Tracer qualitativement les équipotentielles et les lignes de champ dans un plan $z=cste$ . Justifier que le système peut-être considéré ici « comme un condensateur » bien que l'un des conducteurs n'entoure pas l'autre.

13. On définit alors la capacité des deux conducteurs en présence de la même manière que pour un condensateur habituel. Déterminer la capacité linéique $\Gamma$ du système. Application numérique.

14.Montrer que les équipotentielles dans un plan $z=cste$ sont des cercles. En travaillant en coordonnées cartésiennes, donner l'équation de l'équipotentielle $V=V_K$ . On pourra poser $K=\exp\left(-\frac{2\pi\varepsilon_0 V_K}{\lambda_0}\right)$ . Préciser rayon et centre du cercle en fonction de K.

15.Application numérique pour $V_K=\pm 300\text{V}$ . Tracer ces deux équipotentielles avec précision.

## IV. Conducteur en présence du sol

Un conducteur cylindrique est parallèle au plan du so1 à une hauteur $h=6\,m$ ; son rayon est $a=0,5\,cm$ ; il est porté au potentiel $V_0=1500\,V$ . Au point de vue électrique, le sol peut être assimilé à un conducteur plan au potentiel zéro pris comme origine des potentiels.

16.Montrer l'analogie existant entre les propriétés électriques pour les deux cas étudiés: conducteur au dessus du plan du so1 et système de deux conducteurs aux potentiels $+V_0$ et $-V_0$ , faisant l'objet de la partie précédente. On pourra se contenter, en première approche, de montrer l'analogie au niveau des lignes de champ.

17.Montrer que le sol se charge sous l'influence du conducteur et dessiner qualitativement la répartition de charge apparue sur le plan et sur le conducteur.

18.On admet ici que le problème mathématique « étant bien posé et identique dans les deux cas », il n'admet qu'une seule solution, pour la partie $x>0$ champ et potentiels sont les mêmes dans les deux cas. On définit une nouvelle grandeur : la capacité d'un conducteur en présence du sol définie par : $C_u$ = charge du conducteur / potentiel du conducteur. Donner l'expression et la valeur numérique de la capacité linéique $\Gamma_u$ . de ce conducteur, en présence du sol.

19.Calculer le champ à la surface du conducteur cylindrique.

20.Déterminer le champ au niveau du sol en fonction de $y$ et donner l'expression de la densité de charge surfacique apparaissant sur le sol.

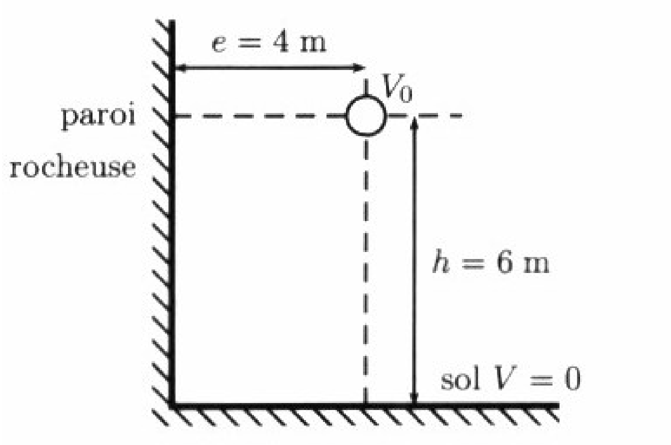
## V. Conducteur en présence du sol et d'un mur

De plus le conducteur passe à une distance $e=4\,m$ d'une paroi plane ( supposée conductrice ) verticale et très haute.

21.Les propriétés électriques du système constitué par le conducteur au potentiel $V_0$ , le plan du sol et la paroi rocheuse verticale, sont équivalentes à celles d'un système de plusieurs conducteurs. Indiquer le nombre en justifiant (trois ? quatre ? ) et définir les positions et les états électriques.

22.Donner l'expression de la capacité linéique du conducteur en présence du sol et de la paroi.

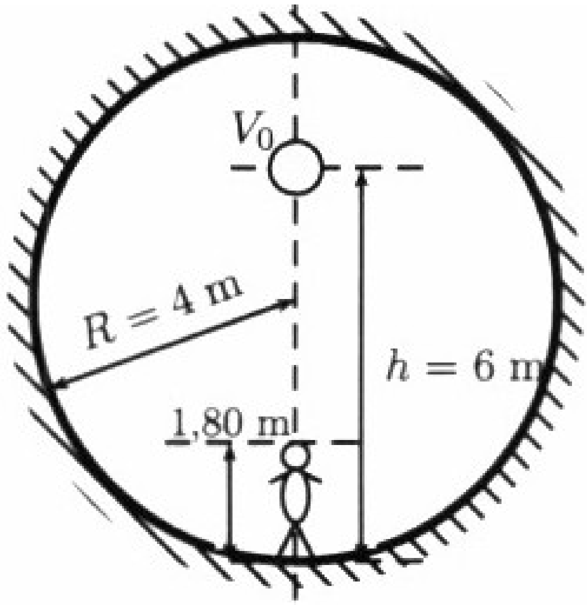
23.Que devient la grandeur du champ électrique à la surface du conducteur ?




*Conducteur en présence du sol et du mur*

## VI. Conducteur dans un tunnel

Le conducteur cylindrique pénètre dans un tunnel cylindrique de rayon $R=4m$ ; il reste à une hauteur de $6m$ au dessus du sol, suivant la verticale passant par le centre du tunnel.




*Conducteur dans un tunnel*

24.Montrer que les propriétés électriques du système constitué par le conducteur au potentiel $V_0$ , et le tunnel au potentiel zéro sont, à un décalage global des potentiels près, équivalentes à celles d'un système de deux conducteurs dont on définira les positions et les états électriques.

25.Donner l'expression de la capacité linéique du conducteur en présence du tunnel.

26. Que devient la grandeur du champ électrique à la surface du conducteur ?

27. Quelle est la valeur du potentiel à la cote de 1,80 m au dessus du niveau du sol, à la verticale du conducteur ? Un individu mesurant 1,80 m est-il en danger lorsqu'il se déplace dans le tunnel ?

---

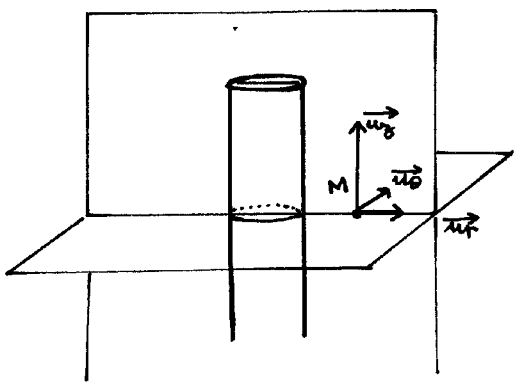
## Réponses

1) Dans un conducteur en équilibre électrostatique, le champ $\vec{E}$ est nul. Donc le potentiel est uniforme.

$\boxed{\text{On peut donc parler du potentiel d'un conducteur en équilibre électrostatique puisque ce conducteur est un volume équipotentiel. } V = V_0}$

---

2) Symétries :




Les plans $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ sont des plans de symétrie contenant M. Donc $\vec{E}(M)$ appartient à ces 2 plans donc à leur intersection

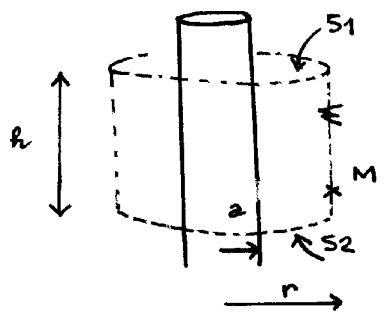
$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, z)\ \vec{u_r}$$

De plus, puisqu'il s'agit d'un problème à symétrie cylindrique, il y a invariance en translation selon $z$ et invariance en rotation selon $\theta$

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\ \vec{u_r}}$$

champ :

On applique le théorème de Gauss à un cylindre de hauteur $h$ (cf $dS$ selon $\vec{u_r}$ et $r =$ constante)




surface de Gauss : $\Sigma + S_1 + S_2$

$$\underset{\text{surface fermée}}{\oiint} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{q_{\text{intérieure}}}{\varepsilon_0}$$

$$\iint_{\Sigma} \vec{E}\,\vec{dS} + \underbrace{\iint_{S_1} \vec{E}\,\vec{dS}}_{\substack{\text{nul} \\ \vec{E}\perp\vec{dS}}} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{E}\,\vec{dS}}_{\substack{\text{nul} \\ \vec{E}\perp\vec{dS}}} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\iint_{\Sigma} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E_{(r)}\,2\pi r h = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

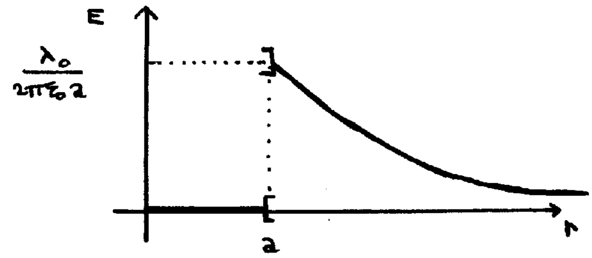
$r > a$

$$E(r)\,2\pi r h = \frac{\lambda_0 h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}(r>a) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,\vec{u_r}}$$

$r < a$ pas de $q_{int}$

$$\boxed{\vec{E}(r<a) = \vec{0}}$$




---

3) Dans ce problème à symétrie cylindrique $V = V(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$

$$\vec{E} = \overrightarrow{grad}\,V$$

$$E\,\vec{u_r} = -\frac{dV}{dr}\,\vec{u_r}$$

donc

$$dV = -E\,dr$$

$r \geq a$ (potentiel continu)

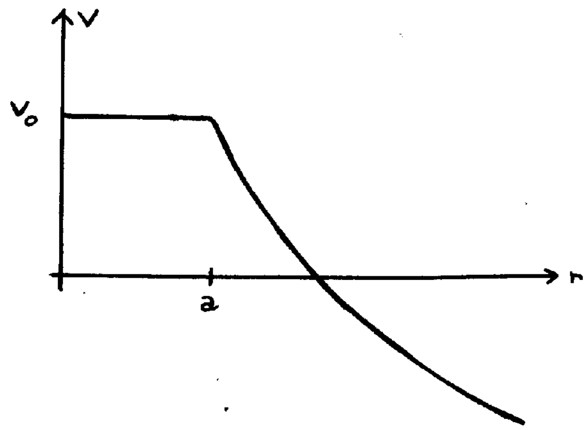
$$\int_{V_0}^{V} dV' = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'}$$

$$\boxed{V - V_0 = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}}$$

$r \leq a$

$$dV = 0$$

$$\boxed{V = V_0}$$




(en présence de charges à l'infini – quand $z \to \pm\infty$ – on ne peut choisir $V_{nul}$ à l'infini – selon $r$ – )

---

4) La charge du cylindre est $dq = \lambda_0 \, dz$ pour une hauteur $dz$.
Elle s'écrit en fonction de la densité surfacique sous la forme

$$dq = \sigma \, dz \int_0^{2\pi} a \, d\theta$$
$$= 2\pi\sigma a \, dz$$

donc

$$\boxed{\sigma = \frac{\lambda_0}{2\pi a}}$$

La relation de discontinuité ici correspond au théorème de Coulomb.
On doit avoir

$$\boxed{\vec{E}_{\substack{\text{voisinage}\\(r=a^+)}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \underbrace{\vec{n}_{ext}}_{\vec{u_r}}}$$

Vérifions :

$$\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 a} \vec{u_r} \stackrel{?}{=} \frac{\lambda_0/2\pi a}{\varepsilon_0} \vec{u_r}$$

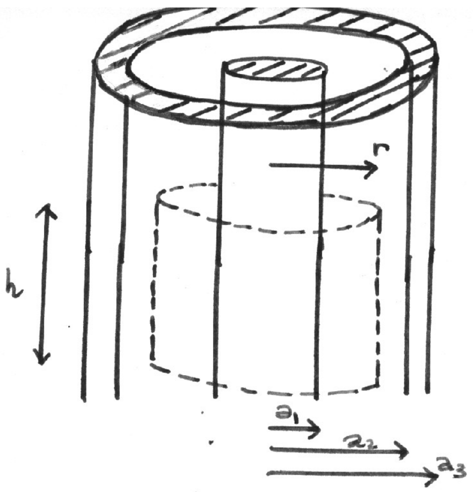
C'est correct.

---

5) Il n'y a aucune différence entre cylindre creux ou plein.
La charge est portée par la surface extérieure dans le cadre du cylindre creux. L'ensemble est équipotentiel (métal et cavité intérieure)

---

6)




On applique le théorème de Gauss à un cylindre fermé puisque les symétries sont les mêmes qu'à la question (2).

avec $a_1 < r < a_2$

On obtient (même analyse qu'en (2))

$$\vec{E}_{(a_1<r<a_2)} = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{u_r}$$

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\int_{a_1}^{a_2}\frac{dr}{r}$$

$$-U = -\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a_2}{a_1}$$

De plus
$$C = \frac{Q_1}{U} = \frac{\lambda_1 h}{U}$$

et
$$\Gamma' = C/h = \lambda_1/U$$

$$\boxed{\Gamma' = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(a_2/a_1)}}$$

---

7) $r < a_1$ $\boxed{\vec{E} = \vec{0} \quad \text{(conducteur en équilibre)}}$

$a_1 < r < a_2$ $\vec{E} = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{u_r}$

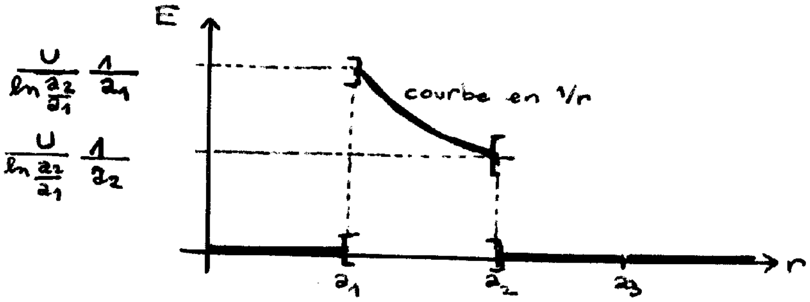
$$\boxed{\vec{E} = \frac{U}{\ln\frac{a_2}{a_1}}\frac{1}{r}\vec{u_r}}$$

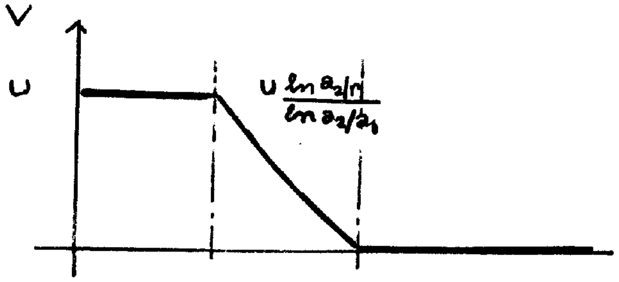
$a_2 < r < a_3$ $\boxed{\vec{E} = \vec{0} \quad \text{(conducteur en équilibre)}}$

Pour $r > a_3$ puisque le potentiel du conducteur extérieur est à zéro comme le potentiel de l'infini, il ne peut y avoir de lignes de champ partant vers l'infini (cf $\vec{E}$ selon les potentiels décroissants donc impossible d'avoir des lignes de champ du potentiel zéro vers le potentiel zéro)

$$\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$$

Finalement :




---

8) On doit retrouver la formule du condensateur plan avec $S = 2\pi a_1 h$.

$$\Gamma' = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{a_1+e}{a_1}\right)}$$

or : $\ln(1+\varepsilon) \simeq \varepsilon$ (au 1er ordre en $\varepsilon$)

$$\Gamma' \simeq \frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{e}{a_1}}$$

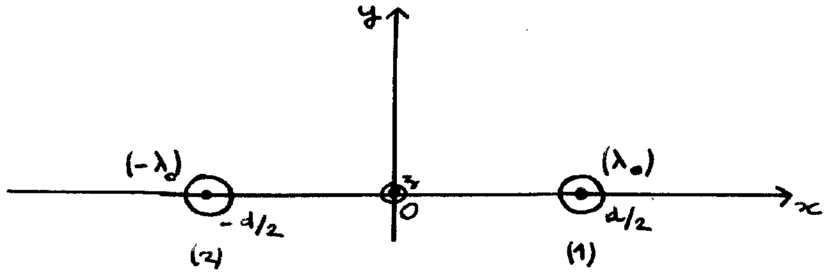
et

$$C = \Gamma' h = \frac{\varepsilon_0 (2\pi a_1 h)}{e}$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$$

---

9)




Le plan $\boxed{yOz \text{ est un plan d'antisymétrie.}}$

On fait $V=0$ sur ce plan médiateur.

---

10)

$$V = V_1 + V_2$$

$$= -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_1 + \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_2 + Cste \qquad \text{(cf 3))}$$

Sur le plan $x=0$ on fait $V=0$

$$0 = -\frac{\lambda_0}{\pi\varepsilon_0}\ln r_1 + \frac{\lambda_0}{\pi\varepsilon_0}\ln \underbrace{r_2}_{=r_1} + Cste$$

donc $cste = 0$

$$\boxed{V = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

Pour le conducteur (1), on a $r_1 = a$

$r_2$ entre $(d-a)$ et $(d+a)$ selon le point de (2) considéré

Cette imprécision apparente est en lien avec l'approximation $a \ll d$ et sa conséquence : la charge est supposée uniformément répartie en surface. On fait donc

$r_2 = d$

$$\boxed{V_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a}}$$

Pour le conducteur (2), on a $r_2 = a$

$r_1 \simeq d$

$$V = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{d}$$

$$\boxed{V = -V_0}$$

---

11) A.N.

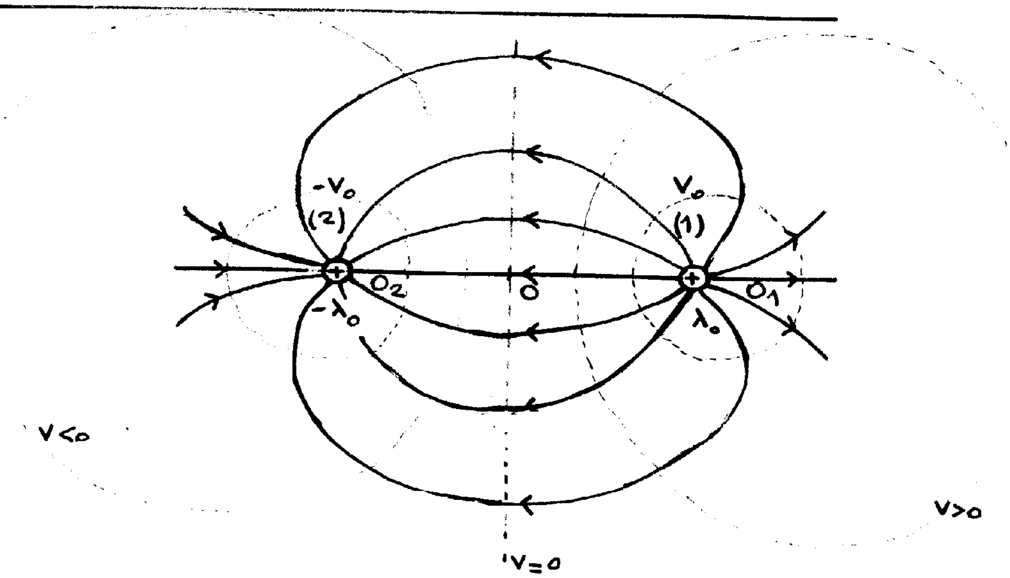
$$\lambda_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{a}}V_0$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{9\,10^9}\;1{,}5\,10^3}{\ln\frac{12}{0{,}5\,10^{-2}}}$$

$$\boxed{\lambda_0 = 10{,}7\ \text{nC.m}^{-1}}$$

---

12)




Dans cette configuration "antisymétrique", toutes les lignes de champ issues de (1) arrivent sur (2).

On peut donc considérer ce système comme un condensateur.

---

13) Pour une hauteur $h$ :

$$Q = C\,U$$

$$Q_1 = C\,(V_1 - V_2)$$

$$\lambda_0 h = C\,(V_0 - (-V_0))$$

$$\downarrow$$

$$\Gamma h$$

$$\boxed{\Gamma = \frac{\lambda_0}{2V_0}}$$

$$\boxed{\Gamma' = \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln \frac{d}{a}}}$$

A.N. $$= \frac{\frac{1}{4}\,\frac{1}{9.10^9}}{\ln \frac{12}{0,5\,10^{-2}}}$$

$$\boxed{\Gamma' = 3,57\ \mathrm{pF.m^{-1}}}$$

---

14) Détermination de l'équipotentielle $V = V_K$

$$V_K = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

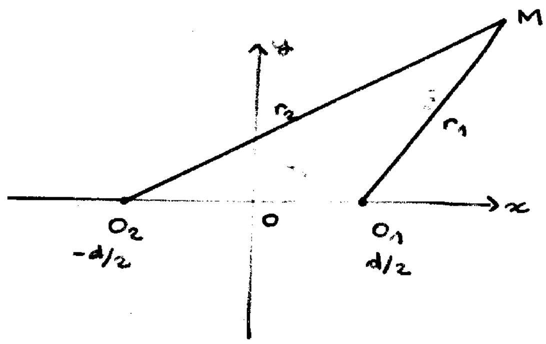
$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{2\pi\varepsilon_0 V_K}{\lambda_0} \qquad \text{avec} \quad \frac{1}{K} = \exp\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 V_K}{\lambda_0}\right)$$

$$\boxed{\frac{r_1}{r_2} = K}$$

Dans le plan $xy$, il s'agit du <u>lieu des points tels que le rapport des distances à deux points fixes soit une constante</u>. On sait que ceci définit un <u>cercle</u> (et dans l'espace ici un cylindre d'axe selon $z$).

On retrouve ici, en utilisant les coordonnées cartésiennes, rayon et centre.

$$\frac{r_1}{r_2} = K$$




$$\frac{\sqrt{(x-\frac{d}{2})^2+y^2}}{\sqrt{(x+\frac{d}{2})^2+y^2}} = K$$

$$\frac{(x-\frac{d}{2})^2+y^2}{(x+\frac{d}{2})^2+y^2} = K^2$$

$$x^2(1-K^2) - dx\,(1+K^2) + y^2\,(1-K^2) + \frac{d^2}{4}\,(1-K^2) = 0$$

$$x^2 - dx\left(\frac{1+K^2}{1-K^2}\right) + y^2 + \frac{d^2}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{d}{2}\left(\frac{1+K^2}{1-K^2}\right)\right)^2 - \frac{d^2}{4}\left(\frac{1+K^2}{1-K^2}\right)^2 + y^2 + \frac{d^2}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{d}{2}\left(\frac{1+K^2}{1-K^2}\right)\right)^2 + y^2 = \frac{d^2}{4}\left(\left(\frac{1+K^2}{1-K^2}\right)^2 - 1\right)$$

$$\boxed{\left(x - \frac{d}{2}\left(\frac{1+K^2}{1-K^2}\right)\right)^2 + y^2 = \frac{d^2K^2}{(1-K^2)^2}}$$

on trouve un cercle de centre $\boxed{C \quad \left(y_C = 0 \text{ et } x_C = \frac{d}{2}\left(\frac{1+K^2}{1-K^2}\right)\right)}$

de rayon $\boxed{R = d\,\frac{K}{|1-K^2|}}$

remarque

Au lieu de travailler en cartésiennes :

$$\frac{r_1}{r_2} = K \qquad (K \neq 1)$$

$$\frac{\|\overrightarrow{O_1M}\|}{\|\overrightarrow{O_2M}\|} = K$$

$$\frac{\overrightarrow{O_1M}^2}{\overrightarrow{O_2M}^2} = K^2$$

$$\overrightarrow{O_1M}^2 - K^2\,\overrightarrow{O_2M}^2 = 0$$

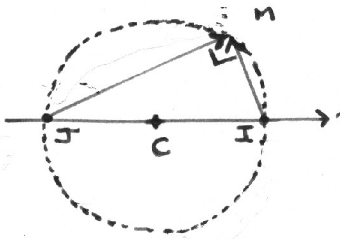
$$(\overrightarrow{O_1M} - K\,\overrightarrow{O_2M})\,(\overrightarrow{O_1M} + K\,\overrightarrow{O_2M}) = 0$$

I barycentre de $O_1$ et $O_2$ avec coeff $1$ et $-K$

J " " " $1$ et $+K$

$$(1-K)\,\overrightarrow{IM}\quad(1+K)\,\overrightarrow{JM} = 0$$

$$\overrightarrow{IM}\quad\overrightarrow{JM} = 0$$




donc $\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{JM}$

M appartient au cercle de diamètre IJ

avec $\overrightarrow{OI} = \dfrac{\overrightarrow{OO_1} - K\,\overrightarrow{OO_2}}{1-K} = \dfrac{d}{2}\left(\dfrac{1+K}{1-K}\right)\overrightarrow{u_x}$

$\overrightarrow{OJ} = \dfrac{\overrightarrow{OO_1} + K\,\overrightarrow{OO_2}}{1+K} = \dfrac{d}{2}\left(\dfrac{1-K}{1+K}\right)\overrightarrow{u_x}$

centre C $\overrightarrow{OC} = \dfrac{\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}}{2} = \dfrac{d}{2}\left(\dfrac{1+K^2}{1-K^2}\right)\overrightarrow{u_x}$

rayon $R = \dfrac{\|\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}\|}{2} = d\,\dfrac{K}{|1-K^2|}$

15) A.N. pour $V_K = +300\,V$

$$K_1 = \exp\left(-\frac{2\pi\varepsilon_0 V_K}{\lambda_0}\right)$$
$$= \exp\left(-\ln\left(\frac{d}{a}\right)\frac{V_K}{V_0}\right)$$
$$= 0{,}21$$

$\overline{OI} = 9{,}2\ m$

$\overline{OJ} = 3{,}9\ m$

$\overline{OC} = 6{,}6\ m$

$R = 2{,}6\ m$

pour $V_K = -300\,V$

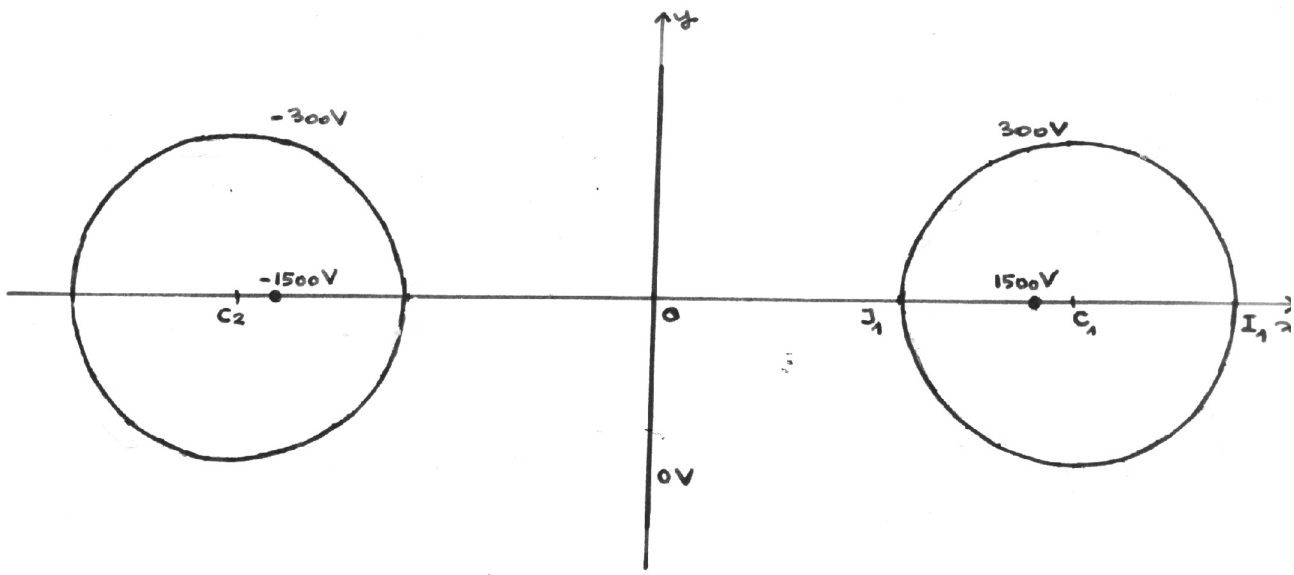
$$K_2 = \frac{1}{K_1}$$

$\overline{OI} = -9{,}2\ m$

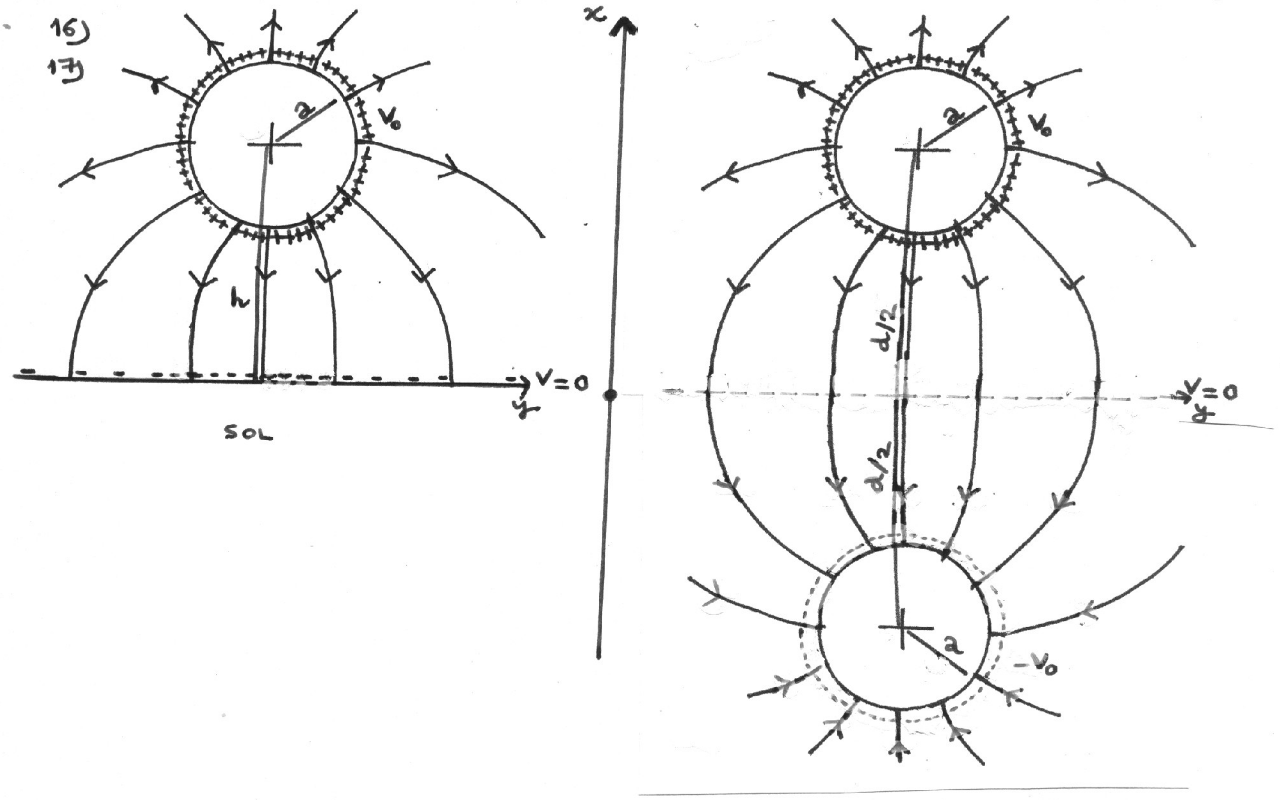
$\overline{OJ} = -3{,}9\ m$

$\overline{OC} = -6{,}6\ m$

$R = 2{,}6\ m$



16)
17)




Les dimensions ( $a \ll d$) ne sont pas respectées ici.
La répartition de charges sur les cylindres est supposée uniforme
(en lien avec $a \ll d$)
Sur le sol la répartition de charges n'est pas uniforme.
Il y a eu appel de charges négatives.

---

remarque

La solution de $\Delta V = 0$ est unique si le problème est "bien posé" c'est à dire si les conditions aux limites sont "données correctement"
(Maths : problème de Dirichlet
problème de Cauchy
problème de Neumann )

On admet ici pour $x \geq 0$ que les conditions sont les mêmes dans les deux problèmes.

→ $V=0$ en $x=0$
→ $V=V_0$ sur une sphère de rayon R en $h = d/2$
→ identité entre les deux situations à l'infini.
(plus délicat ...)

18) Pour une hauteur $h$

$$Q = C_u V_o$$

$$\lambda_o h = \Gamma'_u h V_o$$

$$\Gamma'_u = \frac{\lambda_o}{V_o} \qquad \text{(cf question 13)}$$

$$\boxed{\Gamma'_u = \frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln \frac{d}{a}}}$$

$$= 2\,\Gamma'$$

A.N. $\boxed{\Gamma'_u = 7{,}14 \text{ pF.m}^{-1}}$

---

19) Le champ est donné par le théorème de Coulomb.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{u_r}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda_o}{2\pi a \varepsilon_o}\vec{u_r}$$

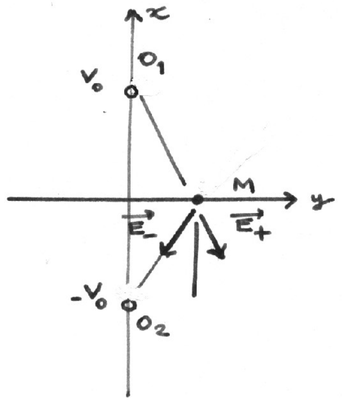
$$\boxed{\vec{E} = \frac{V_o}{a \ln\left(\frac{2h}{a}\right)}\vec{u_r}}$$

A.N. $E = \dfrac{1{,}5\ 10^3}{0{,}5\ 10^{-2} \ln \dfrac{12}{0{,}5\ 10^{-2}}}$

$$\boxed{E = 38{,}5 \text{ kV m}^{-1}}$$

---

20) Le champ est donné en considérant l'analogie avec les deux cylindres




$$\vec{E}_{plan} = \vec{E_+} + \vec{E_-}$$

$$= \frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o}\frac{1}{O_1M}\vec{u_+} - \frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o}\frac{1}{O_2M}\vec{u_-}$$

$$\overrightarrow{E}_{plan} = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\overrightarrow{O_1M}}{O_1M^2} - \frac{\overrightarrow{O_2M}}{O_2M^2}\right)$$

$$= \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0(h^2+y^2)}\underbrace{\overrightarrow{O_1O_2}}_{\hookrightarrow -2h\overrightarrow{u_x}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{plan} = \frac{-\lambda_0 h}{\pi\varepsilon_0(h^2+y^2)}\overrightarrow{u_x}}$$

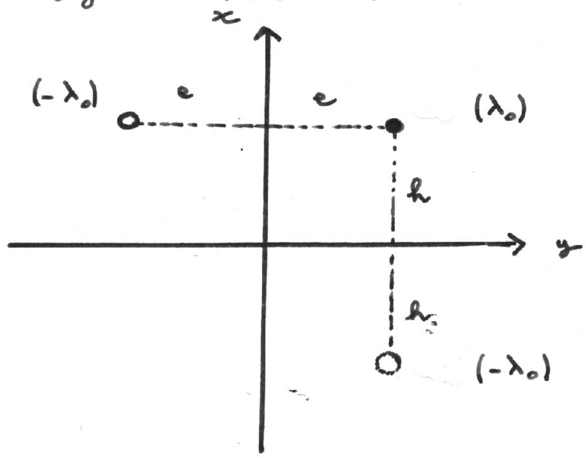
$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\underbrace{\overrightarrow{n_{ext}}}_{\hookrightarrow +\overrightarrow{u_x}}$$

$$\boxed{\sigma_{plan}(y) = -\frac{\lambda_0 h}{\pi(h^2+y^2)}}$$

---

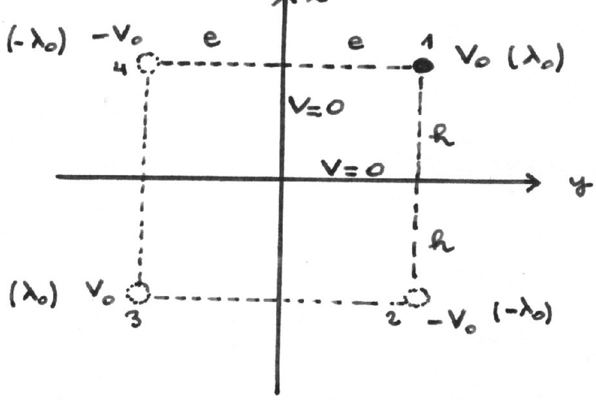
2) On utilise la même démarche. Le plan $x=0$ et $y=0$ doivent être <u>au potentiel zéro</u> pour les images électriques utilisées.

Avec la configuration suivante :



ce n'est pas le cas.

Il faut quatre conducteurs au total



---

22) le potentiel sur la surface du conducteur est la somme de 4 termes : (on fait $a \ll h$ et $a \ll e$)

$$V = \frac{-\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_1 - \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_3 + \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_2 + \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_4 + Cste$$

nul sur le plan $x = 0$

$$0 = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} (-\ln r_1 - \ln r_3 + \ln r_1 + \ln r_3) \underbrace{+ Cste}_{nulle}$$

idem pour le plan $y = 0$

$$0 = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} (-\ln r_1 - \ln r_3 + \ln r_3 + \ln r_1) \underbrace{+ Cste}_{nulle}$$

Finalement, sur le conducteur :

$$V_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} (-\ln a - \ln \sqrt{4e^2+4h^2} + \ln 2h + \ln 2e)$$

$$\boxed{V_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2he}{a\sqrt{e^2+h^2}}}$$

$$\Gamma_u = \frac{\lambda_0}{V_0}$$

$$\boxed{\Gamma_u = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{2he}{a\sqrt{e^2+h^2}}}}$$

A.N.

$$= \frac{\frac{1}{18\ 10^9}}{\ln \frac{2\times 6\times 4}{5.10^{-3}\sqrt{4^2+6^2}}}$$

$$\boxed{\Gamma_u = 7{,}72\ 10^{-12}\ F.\ m^{-1}}$$

---

23) $$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u_r}$$

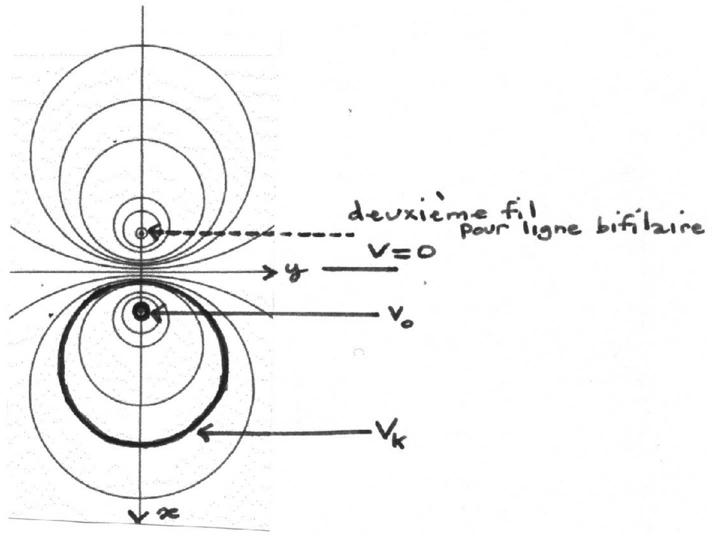
$$= \frac{\lambda_0}{2\pi a\, \varepsilon_0} \vec{u_r}$$

$$= \frac{\Gamma_u\, V_0}{2\pi a\, \varepsilon_0} \vec{u_r}$$

$$\boxed{E = 41{,}7\ 10^3\ kV\ m^{-1}}$$

---

24)

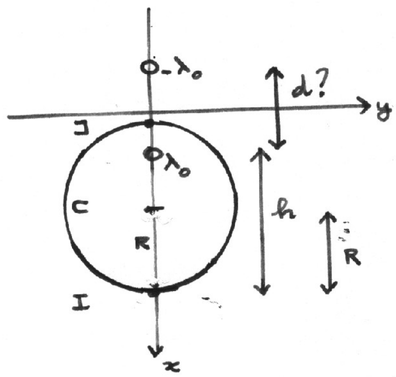



Le problème de la ligne bifilaire donne des équipotentielles cylindriques.

Ici on ne fera plus $V=0$ sur le plan médiateur.

---

25)




On imagine le deuxième fil à une distance d inconnue.

On a :

- potentiel du conducteur

$$V_0 = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln a + \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln d + Cte$$

- potentiel du tunnel en J

$$0 = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln(2R-h) + \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln(d-2R+h) + Cte$$

en I

$$0 = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln h + \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln(d+h) + Cte$$

Les deux dernières équations donnent :

- $$\frac{d-2R+h}{2R-h} = \frac{d+h}{h}$$

d'où
$$\boxed{d = \frac{(2R-h)h}{h-R}}$$

A.N.
$$\boxed{d = 6m}$$

- et
$$cte = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{h}{d+h}$$
$$= -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(1+\frac{d}{h}\right)$$
$$\boxed{cte = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R}{h-R}}$$

La première équation donne alors :

$$\boxed{V_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{h(2R-h)}{aR}}$$

$$\Gamma_u = \frac{\lambda_0}{V_0}$$

$$\boxed{\Gamma_u = 2\pi\varepsilon_0 \Big/ \ln \frac{h(2R-h)}{aR}}$$

A.N.
$$= \frac{\frac{1}{18\ 10^9}}{\ln \frac{6}{5\ 10^{-3}} \frac{(8-6)}{4}}$$

$$\boxed{\Gamma_u = 8{,}68\ 10^{-12}\ F.m^{-1}}$$

---

26)
$$E = \frac{\Gamma_u V_0}{2\pi a \varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = 46{,}9\ 10^3\ kV\ m^{-1}}$$

---

27) En utilisant l'image des fils $\lambda_0$ et $-\lambda_0$ on cherche le potentiel au point considéré (sommet du crâne de l'individu) ($h' = 1{,}80m$)

$$V_{\substack{\text{sommet}\\ \text{individu}}} = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln(h-h') + \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln(d+h-h') + Cte$$

$$V_{\substack{\text{sommet}\\ \text{individu}}} = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(d+h-h')(h-R)}{(h-h')\,R}$$

Les pieds de l'individu sont sur le tunnel au potentiel nul. V représente donc la ddp à laquelle l'individu est soumis.

$$\boxed{ddp = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(d+h-h')(h-R)}{(h-h')\,R}}$$

avec $\lambda_0 = \Gamma'_u V_0$

A.N.
$$ddp = \frac{8{,}68\ 10^{-12}\ 1500}{\frac{1}{18\ 10^{9}}}\ln\frac{(6+6-1{,}8)(6-4)}{(6-1{,}8)\,4}$$

$$\boxed{ddp = 45{,}5\,V}$$

pas de danger.