DNS

Sujet

Chauffage d'un local

On considère un local dont la capacité thermique à pression constante est C . A l'instant t , la température du local supposée uniforme est notée $T(t)$.

Toutes les évolutions ont lieu à pression constante.

I. Chauffage du local par un radiateur en négligeant les fuites thermiques

Un radiateur qui fournit une puissance thermique P constante chauffe ce local, initialement à la température T_0 .

1. Quelle est l' unité de C ?
2. Quelle est l'unité de P ?
3. Exprimer en fonction de P la quantité de chaleur reçue δQ par le local en provenance du radiateur pendant la durée élémentaire dt .
4. Exprimer la variation d'enthalpie du local pendant dt .
5. Écrire et justifier l'équation différentielle donnant $T(t)$.
6. Résoudre et tracer la courbe $T(t)$.

II. Refroidissement du local sous l'effet de fuites thermiques

La température extérieure est constante et vaut T_A . On admet que la déperdition de « chaleur » est proportionnelle à la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur. La puissance des fuites thermiques s'écrit alors (Loi de Newton) : $P_{fuites}=G(T-T_A)$. Le local est initialement à la température T_0 et le radiateur est coupé.

7. Exprimer la quantité de chaleur « reçue » δQ par le local pendant la durée élémentaire dt. Vérifier le signe. en envisageant le cas $T > T_A$ et le cas $T < T_A$.
8. Écrire l'équation différentielle donnant $T(t)$. Introduire une constante de temps τ et une température limite.
9. Résoudre et tracer la courbe $T(t)$.

III. Chauffage du local par un radiateur en tenant compte des fuites thermiques

Le local est initialement à la température T_0 . Le radiateur fournit une puissance thermique P . La température extérieure vaut T_A . La puissance des fuites thermiques est donnée par la loi de Newton.

10. Faire le bilan et en déduire l'équation différentielle donnant $T(t)$ .On introduira une constante de temps τ et une température limite T_∞ .
11. Résoudre et tracer la courbe $T(t)$.

IV. Chauffage du local par une pompe à chaleur en négligeant les fuites thermiques

On suppose que l'on dispose d'une pompe à chaleur idéalement réversible pour chauffer le local. Cette pompe à chaleur fonctionne en utilisant comme sources l'extérieur à température $T_A < T(t)$ et le local à la température $T(t)$. Le compresseur de la pompe à chaleur fournit une puissance mécanique constante . On néglige pour cette partie les fuites thermiques.

12. Déterminer en fonction de $P_{méca}$ la quantité de chaleur reçue δQ , par le local, en provenance de l pompe à chaleur, pendant la durée élémentaire dt .
13. Écrire l'équation différentielle donnant $T(t)$.
14. Résoudre (on déterminera : t en fonction de T).
15. Comparer au chauffage par un radiateur.

V. Chauffage par une pompe à chaleur en tenant compte des fuites thermiques

On reprend la question précédente en tenant compte des fuites thermiques.

16. Écrire l'équation différentielle donnant $T(t)$.
17. Peut-on définir une température limite. Préciser.

Réponses

1) $$\boxed{C \text{ en } J.K^{-1}}$$

2) $$\boxed{P \text{ en } W}$$

3) $$\boxed{\delta Q_{source} = P\,dt}$$

4) $$dH_{(T,P)} = \underset{\substack{\downarrow \text{noté} \\ C}}{C_P}\,dT + \frac{\partial H(T,P)}{\partial P}\,dP$$

Ici, on se place à pression constante

$$dH = C\,dT \quad \text{ou encore}$$

$$\boxed{dH = C\,\frac{dT}{dt}\,dt}$$

5) Bilan pendant dt pour le local évoluant à P constant

$$dH_P = \delta Q_P$$

remarque

Pour une transformation à P constant (monobare) entre deux états d'équilibre

$$\begin{aligned}\Delta H &= \Delta(U + PV) \\ &= \Delta U + P_f V_f - P_i V_i \\ &= Q + \underset{\substack{\downarrow \\ \int_i^f - P_{ext}\,dV \\ -P_{ext}\,\Delta V}}{W} + P_{ext}\,\Delta V\end{aligned}$$

$$\Delta H = Q$$

Ici la transformation est lente, on peut la supposer monobare.

$$dH = \delta Q$$

$$dH = \delta Q_{\text{reçu par transfert avec l'intérieur}} + \delta Q_{\text{source produit à l'intérieur}}$$

$$dH = 0 + \delta Q_{\text{source}}$$

$$C \frac{dT}{dt} dt = 0 + P\,dt$$

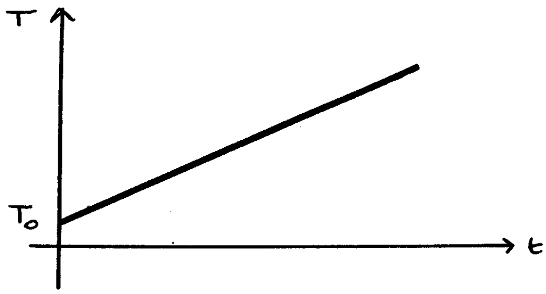
$$\boxed{C \frac{dT}{dt} = P}$$

---

6)

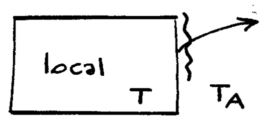
$$\int_{T_0}^{T} dT' = \frac{P}{C} \int_0^t dt'$$

$$\boxed{T - T_0 = \frac{P}{C} t}$$



---

7)



$$P_{\text{fuites}} = G\,(T - T_A)$$

G : conductance thermique de conducto-convection

$$\delta Q_{\text{reçue par local}} = P_{\text{reçue}}\,dt$$

$$= -P_{\text{fuites}}\,dt$$

$$\boxed{\delta Q = -G\,(T - T_A)\,dt}$$

si $T > T_A$ $\delta Q_{\text{reçue}} < 0$ (cf le local perd de l'énergie)

si $T < T_A$ $\delta Q_{\text{reçue}} > 0$ (cf le local reçoit de la chaleur)

---

8)
$$dH = \delta Q_{reçu} + \delta Q_{source}$$
$$C \frac{dT}{dt} dt = -G(T-T_A)\,dt + 0$$

$$\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{G}{C}(T-T_A) = 0}$$

- on a donc $\frac{G}{C}$ est un temps^{-1} (cf chaque terme est homogène à température . temps^{-1})

$$\boxed{\tau = \frac{C}{G}}$$

remarque :

Vérification "pour le plaisir"
$$\left[\frac{C}{G}\right] = \frac{[\text{energie}] \times \theta^{-1}}{[\text{puissance}] \times \theta^{-1}} = \text{temps}.$$

- s'il existe une température limite, T tend vers une constante et $\frac{dT}{dt}$ tend vers zéro.

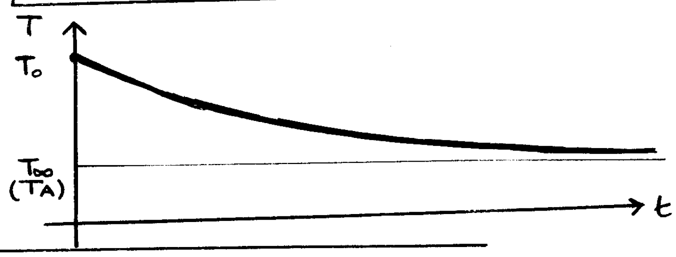
Si on fait $\frac{dT}{dt} = 0$, on obtient
$$T = T_A$$
$$\boxed{T_\infty = T_A}$$

---

9) Je réécris l'équation
$$\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau}(T - T_\infty) = 0}$$

$$(T - T_\infty) = A\, e^{-t/\tau}$$
C.I. $(T_0 - T_\infty) = A$

$$\boxed{(T - T_\infty) = (T_0 - T_\infty)\, e^{-t/\tau}}$$



---

10)
$$dH = \delta Q_{\text{reçu}} + \delta Q_{\text{source}}$$
$$C \frac{dT}{dt} dt = -G(T-T_A)\,dt + P\,dt$$
$$\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{G}{C}(T-T_A) = \frac{P}{C}}$$

on pose à nouveau $\tau = \frac{C}{G}$

on définit T_∞ ($\frac{dT}{dt}=0$, il s'agit de la solution particulière de l'équation avec second membre)

$$\boxed{T_\infty = T_A + \frac{P}{G}}$$

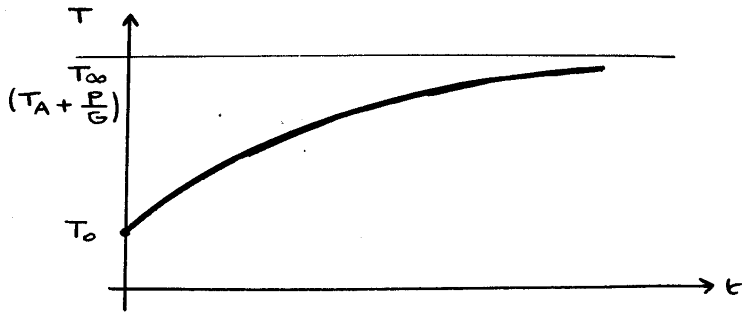
L'équation différentielle s'écrit alors comme précédemment (9)

$$\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau}(T-T_\infty) = 0}$$

---

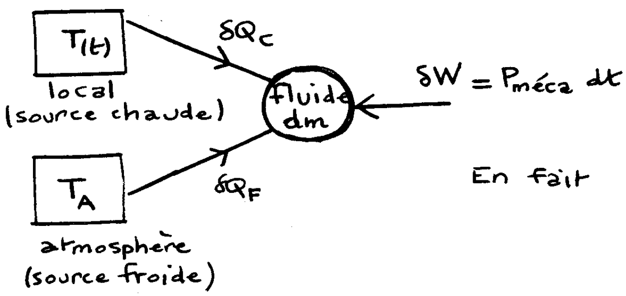
11) Dont la solution a déjà été obtenue (cf 9))

$$\boxed{(T - T_\infty) = (T_0 - T_\infty)\, e^{-t/\tau}}$$



---

13) Pendant dt, une masse dm avance au niveau du fluide caloporteur de la pompe à chaleur (supposée idéale)
On fait le bilan pour le fluide pendant dt



En fait $\delta Q_C < 0$
$\delta Q_F > 0$
$\delta W > 0$

Ceci revient à considérer un cycle élémentaire parcouru pendant dt par la masse dm

1er principe à dm pour un cycle $\quad \delta Q_C + \delta Q_F + \delta W = 0$

2ème principe à dm pour un cycle $\quad \dfrac{\delta Q_C}{T_{(t)}} + \dfrac{\delta Q_F}{T_A} = 0$

En éliminant δQ_F :

$$-\delta Q_C = \delta Q_F + \delta W$$
$$= -\delta Q_C \frac{T_A}{T} + \delta W$$
$$-\delta Q_C \left(1 - \frac{T_A}{T_{(t)}}\right) = \delta W$$

remarque :

L'efficacité de la pompe à chaleur est définie par

$$\eta(t) = \frac{\text{"ce qui nous intéresse"}}{\text{"ce que l'on paye"}}$$
$$= \frac{-\delta Q_C}{\delta W}$$
$$\eta(t) = \frac{1}{1 - \frac{T_A}{T_{(t)}}}$$
$$\boxed{\eta(t) = \frac{T_{(t)}}{T(t) - T_A} > 1}$$

Le local reçoit : $\quad \delta Q_{\text{"source"}} = -\delta Q_C$

$$\boxed{\delta Q_{\text{"source"}} = P_{méca} \frac{T_{(t)}}{T(t) - T_A} dt}$$

---

13) Equation différentielle. Le système étudié est le local

$$dH = \delta Q_{reçu} + \delta Q_{source}$$
$$C \frac{dT}{dt} dt = 0 + P_{meca} \frac{T(t)}{T(t) - T_A} dt$$

$$\boxed{C\ \frac{dT(t)}{dt} = P_{méca}\ \frac{T(t)}{T(t) - T_A}}$$

---

14) On sépare les variables t et T

$$dt = \frac{C}{P_{meca}}\left(dT - T_A\ \frac{dT}{T} \right)$$

et on fait une intégrale.

$$\int_0^t dt' = \frac{C}{P_{méca}}\left[\int_{T_0}^{T} dT' - T_A \int_{T_0}^{T} \frac{dT'}{T'}\right]$$

$$\boxed{t = \frac{C}{P_{méca}}\left[(T - T_0) - T_A\ \ln \frac{T}{T_0}\right]}$$

---

15) Dans le cas du chauffage électrique :

$$\delta Q_{source} = P\ dt$$

Dans le cas de la pompe à chaleur

$$\delta Q_{source} = \eta_{(t)}\ P'_{méca}\ dt$$

Si on suppose que le rendement du compresseur est idéal on aura $P_{électrique} = P_{méca}$

$$\boxed{\delta Q_{source} = \underbrace{\eta_{(t)}}_{>1}\ P\ dt}$$

(en effet, pour "chauffer" on récupère $P\ dt$ (cf énergie électrique) mais aussi l'énergie prise à l'extérieur à la source froide)

---

16) Avec les fuites :

$$\boxed{C\ \frac{dT}{dt} = -G\ (T - T_A) + P_{méca}\ \frac{T}{T - T_A}}$$

---

17) On trouve l'éventuelle température limite en faisant

$$\frac{dT}{dt} = 0$$

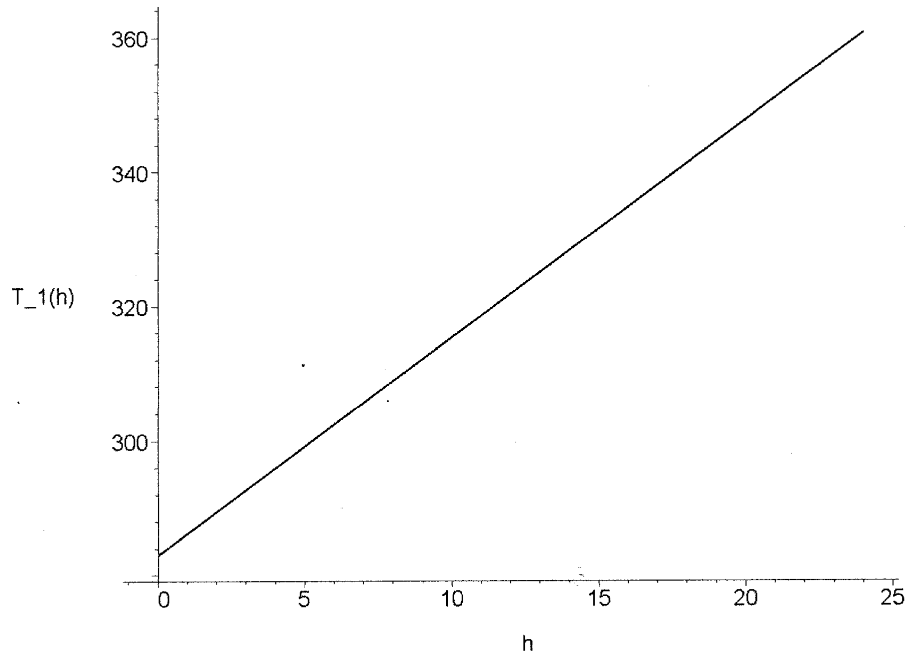
Cela donne :

$$\boxed{\frac{(T_\infty - T_A)^2}{T_\infty} = \frac{P_{méca}}{G}}$$

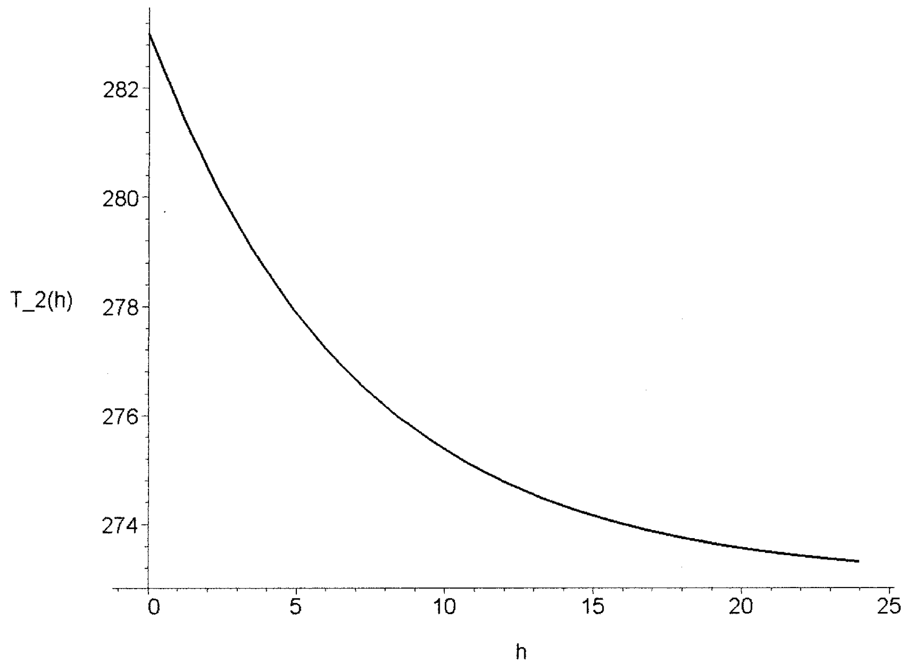
remarque : on trouve

$$T_\infty = T_A + \frac{P_{méca}}{2G}\left(\sqrt{1 + \frac{4\,T_A\,G}{P_{méca}}} - 1\right)$$

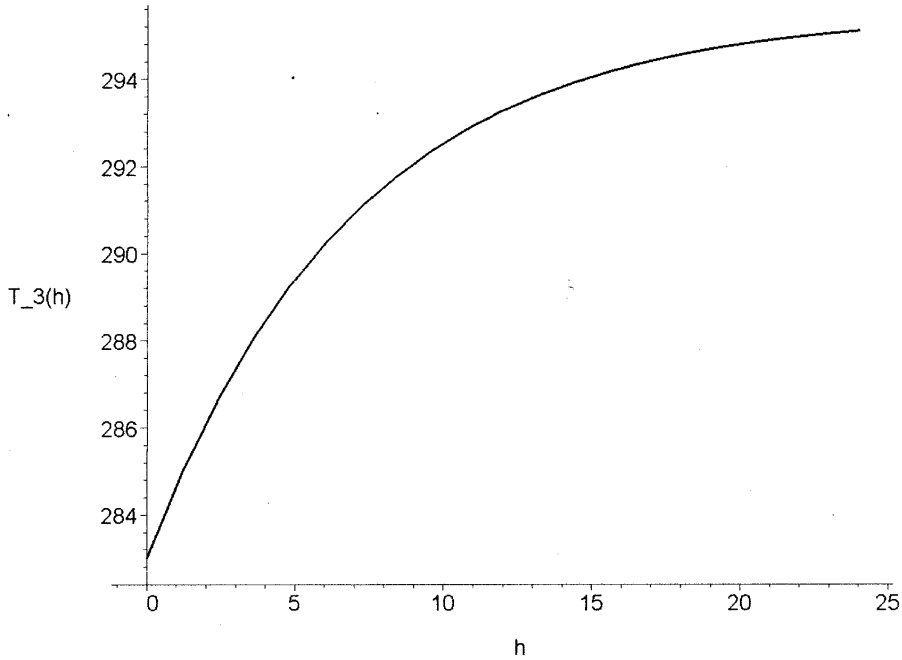
```
> restart;with(DEtools):
>
> #SIMULATION AVERC MAPLE
>
> C:=10^7:P:=9000*3600:Pmeca:=800*3600:G:=400*3600:tau:=C/G:Ta:=27
  3:To:=283:
>
> #les temps sont en heures, la puissance du chauffage est 9kW et
  la puissance mécanique de la pompe à chaleur ( très idéale...)
  n'est que de 0,8kW
>
> T1:=DEplot(diff(T_1(h),h)=P/C,[T_1(h)],0..24,{[0,To]},arrows=non
  e, linecolor=black):T1;
```



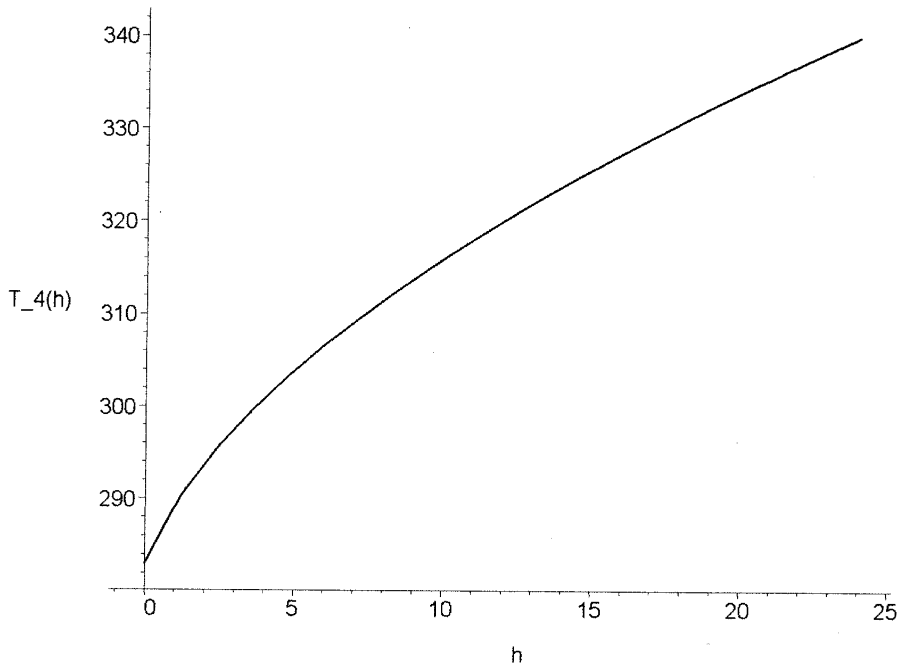

```
> T2:=DEplot(diff(T_2(h),h)=-1/tau*(T_2(h)-Ta),[T_2(h)],0..24,{[0,
  To]},arrows=none, linecolor=black):T2;
```



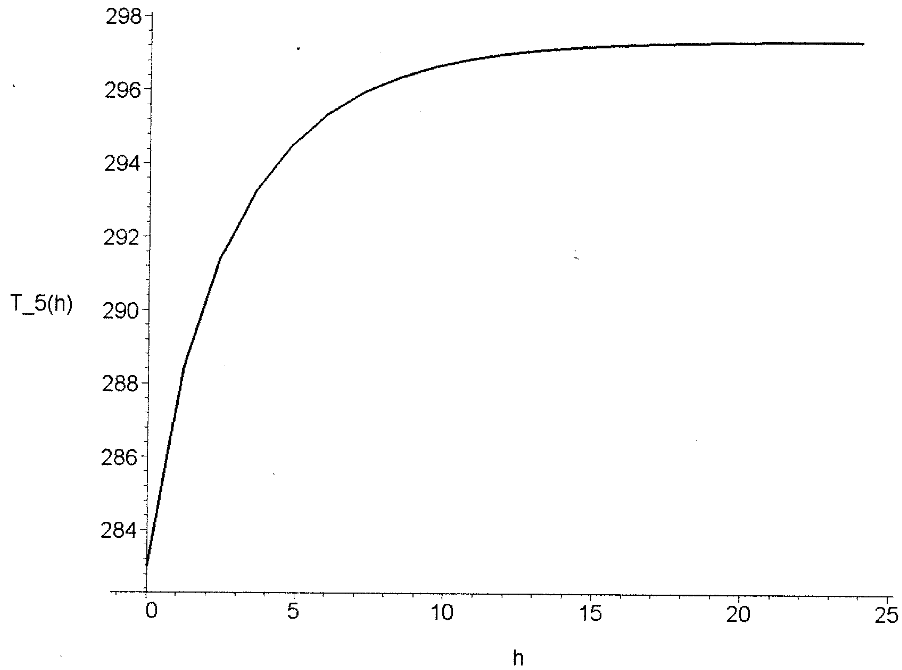

```
> T3:=DEplot(diff(T_3(h),h)=-1/tau*(T_3(h)-Ta)+P/C,[T_3(h)],0..24,
  {[0,To]},arrows=none, linecolor=black):T3;
```




```
> T4:=DEplot(diff(T_4(h),h)=Pmeca/C*T_4(h)/(T_4(h)-Ta),[T_4(h)],0.
  .24,{[0,To]},arrows=none, linecolor=black):T4;
```




```
> T5:=DEplot(diff(T_5(h),h)=-1/tau*(T_5(h)-Ta)+Pmeca/C*T_5(h)/(T_5
(h)-Ta),[T_5(h)],0..24,{[0,To]},arrows=none,
linecolor=black):T5;
```




```
>
>
```