DNS

Sujet

Thermique et cylindre

On considère un solide (C) en forme de cylindre droit à base circulaire de hauteur H et de rayon R , de masse volumique ρ , de chaleur massique c et de conductivité thermique λ .

A priori la température est une fonction de r , z , t : $T=T(r,z,t)$.

La température ambiante est notée T_a . En cas d'échanges conducto-convectifs, le coefficient de transfert conducto-convectif (supposé tenir compte aussi des échanges radiatifs linéarisés) est noté h (en fait la valeur numérique de h dépend des matériaux, de la nature de la surface, de la nature de l'écoulement du fluide, des températures...Ici, on le suppose fixé à une valeur connue).

I. Conduction longitudinale en régime permanent

1. La surface latérale du cylindre est isolée thermiquement et on suppose $R \ll H$ de sorte que $T=T(z,t)$ et l'on se place en régime permanent $T=T(z)$. La température au niveau de la section $z=0$ est maintenue à T_1 et la température au niveau de la section $z=H$ est maintenue à T_2 .
   - Faire un bilan thermique pour une tranche élémentaire en régime permanent.
   - Déterminer $T=T(z)$ en résolvant l'équation différentielle.
   - Donner l'expression du flux de chaleur $\Phi(z)$ compté positivement dans le sens croissant de l'axe Oz .
   - Retrouver l'expression de la résistance thermique.
2. Reprendre la question précédente (1a , 1b , 1c) en supposant, que le cylindre étant radioactif, il faille ajouter une densité volumique homogène et permanente de source de chaleur égale à p_V .
3. Reprendre la question (1a , 1b , 1c) , le cylindre est radioactif, mais de plus il y a des échanges conducto-convectifs au niveau des sections terminales du cylindre. Pour cette partie, on prendra l'origine de l'axe des z au milieu du cylindre.
   - Représenter pour $-H/2<z<H/2$: $T(z)$ et $\Phi(z)$. Commenter.

- Déterminer $T(z=0)$.
- Déterminer $\Phi(z=H/2)$ et $T(z=H/2)$. Montrer que cette valeur de flux pouvait s'obtenir directement. Montrer que la température du cylindre $T(z=H/2)$ pouvait s'obtenir directement en utilisant la notion de résistance thermique.

II. Conduction latérale en régime permanent

4. La surface latérale du cylindre n'est pas isolée thermiquement et on suppose $R \ll H$ de sorte que $T=T(r,t)$ et l'on se place en régime permanent $T=T(r)$. Le cylindre est radioactif: la densité volumique homogène et permanente de source de chaleur est égale à p_V . Le contact avec l'ambiant est ici supposé parfait.
    - Faire un bilan thermique pour un cylindre de rayon r en régime permanent.
    - Déterminer $T=T(r)$ en résolvant l'équation différentielle
    - Donner l'expression du flux de chaleur $\Phi(r)$ compté positivement dans le sens des r croissants.
5. Reprendre la question (4a , 4b , 4c) en supposant des échanges conducto-convectifs au niveau de la surface latérale.
    - Représenter $T(r)$ et $\Phi(r)$.
    - Déterminer $T(r=0)$.
    - Déterminer $\Phi(r=R)$ et $T(r=R)$. Montrer que cette valeur de flux pouvait s'obtenir directement. Montrer que la température du cylindre $T(r=R)$ pouvait s'obtenir directement en utilisant la notion de résistance thermique.

III. Isolation thermique d'une conduite de chauffage central en régime permanent

On se propose d'isoler une conduite cylindrique de rayon R dont la température est maintenue à T_0 en l'entourant d'un manchon cylindrique d'épaisseur e (de rayon compris entre R et $R+e$). La conductivité thermique du manchon est λ . En $r=R$ le contact thermique est parfait et en $r=R+e$, le coefficient d'échange est h . La conduction thermique dans le manchon isolant est supposée latérale.

On se place en régime stationnaire.

6. On considère un cylindre de rayon r ($R<r<R+e$) et de hauteur H . A partir d'un bilan, montrer que le flux thermique $\Phi(r)/H$ par unité de hauteur, compté positivement vers l'extérieur, à travers ce cylindre est indépendant de r . D'où provient ce flux alors qu'on étudie un régime stationnaire?

On travaille provisoirement en fonction de Φ/H alors que cette grandeur est inconnue.

7. Exprimer $\vec{j}(r)$ dans le manchon en fonction de Φ/H et de r .
8. En déduire $T(r)$ dans le manchon en fonction de Φ/H , λ , T_0 , R et r . En déduire

une première relation entre $T(r=R+e)$ et Φ/H .

9. En considérant les phénomènes conducto-convectifs en $r=R+e$ écrire une seconde relation entre la température $T(r=R+e)$ et le flux thermique linéique Φ/H . En déduire Φ/H en fonction des données.

10. Montrer que l'expression de ce flux pouvait s'obtenir directement en considérant deux résistances thermiques en série.

On travaille en variables adimensionnées: $\varphi=\dfrac{\Phi(e)/H}{\Phi(e=0)/H}$, $x=\dfrac{e}{R}$ et on posera $\alpha=\dfrac{R}{(\lambda/h)}$.

11. Quelle est la dimension de α .

12. Tracer $\varphi(x)$ pour $\alpha>1$. Quel est dans ce cas le rôle du manchon en ce qui concerne les échanges thermiques.

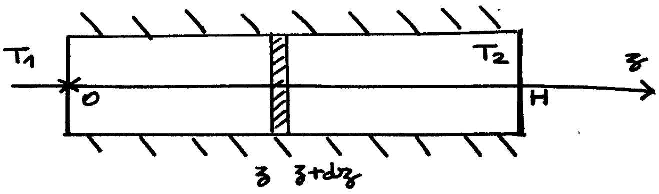
13. Tracer $\varphi(x)$ pour $\alpha<1$. Déterminer l'extremum.

14. A.N. On veut isoler une conduite d'eau chaude. On a $h=10\,S.I.$, $\lambda=0{,}5\,S.I.$ (valeur altérée par l'humidité). Le rayon externe de l'isolant est $5\,cm$. Commenter : l'isolation est-elle réussie?

15. Comment expliquer le paradoxe apparent ? Trouver une utilité pratique à ce phénomène a priori inattendu.

Réponses

1)



$$\vec{j} = -\lambda \, \overrightarrow{\text{grad}}\, T$$

$$\vec{j}_{(z)} = \underbrace{-\lambda \frac{dT}{dz}}_{j(z)} \vec{u_z}$$

→ bilan thermique à P constant

$$d^2H = \delta^2 Q_{\text{reçu}} + \delta^2 Q_{\text{produit}}$$

$$0 = j_{(z)} \pi R^2 dt - j(z+dz) \pi R^2 dt + 0$$

$$0 = -\frac{dj}{dz} dz \, \pi R^2 dt$$

donc

$$\frac{dj}{dz} = 0$$

$$\boxed{\vec{j} \text{ est uniforme}}$$

→ $-\lambda \dfrac{dT}{dz}$ est uniforme

$$T = A z + B$$

C.L. $\left| \begin{array}{l} T_1 = B \\ T_2 = A H + B \end{array} \right.$

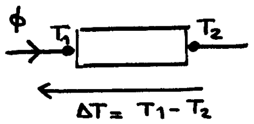
d'où A et B

$$\boxed{T_{(z)} = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{H} z}$$

→ $$j = -\lambda \frac{dT}{dz}$$

$$\boxed{j_{(z)} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{H} = j}$$

$$\boxed{\Phi = \lambda \frac{T_1 - T_2}{H} \pi R^2}$$



$$R_{therm} = \frac{\Delta T}{\phi}$$

$$\boxed{R_{therm} = \frac{H}{\lambda \ \pi R^2}}$$

---

2) $\longrightarrow$ bilan thermique ;

$$d^2H = \delta^2 Q_{reçu} + \delta^2 Q_{produit}$$

$$0 = -\frac{dj}{dz} dz \, \pi R^2 \, dt + P_v \, \pi R^2 \, dz \, dt$$

$$\boxed{\frac{dj}{dz} = P_v}$$

$\longrightarrow$ température :

$$-\lambda \frac{d^2T}{dz^2} = P_v$$

$$\frac{d^2T}{dz^2} = -\frac{P_v}{\lambda}$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{P_v}{\lambda} z + A$$

$$T = -\frac{P_v}{\lambda}\frac{z^2}{2} + Az + B$$

$$\text{C.L.} \left| \begin{array}{l} T_1 = B \\ T_2 = -\frac{P_v}{\lambda}\frac{H^2}{2} + AH + B \end{array} \right.$$

d'où A et B

$$\boxed{T(z) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{H} z + \frac{P_v}{2\lambda} z (H - z)}$$

$$\longrightarrow \boxed{j = \lambda \frac{T_1 - T_2}{H} - \frac{P_v}{2}(H - 2z)}$$

$$\phi = \pi R^2 j$$

---

3) $\longrightarrow$ L'equation différentielle est la même. Les échanges conducto convectifs modifient uniquement les conditions aux limites

$\longrightarrow$ $T = -\frac{P_v}{2\lambda} z^2 + Az + B$

$j = -\lambda \frac{dT}{dz} = P_v z - \lambda A$

On écrit les conditions aux limites

en $z = \frac{H}{2}$: $\quad j(z=H/2) = h\,(T_{(z=H/2)} - T_a)$

en $z = -\frac{H}{2}$: $\quad j(z=-H/2) = -h\,(T_{(z=-H/2)} - T_a)$

(Ici le sens positif de l'axe z correspond au sens fluide → solide)

donc :

$$P_v \frac{H}{2} - \lambda A = h\left(-\frac{P_v}{2\lambda}\frac{H^2}{4} + A\frac{H}{2} + B - T_a\right)$$
$$-P_v \frac{H}{2} - \lambda A = -h\left(-\frac{P_v}{2\lambda}\frac{H^2}{4} - A\frac{H}{2} + B - T_a\right)$$

somme : $-2\lambda A = h A H$ donc $A = 0$

différence : $B = T_a + P_v \frac{H}{2h} + P_v \frac{H^2}{8\lambda}$

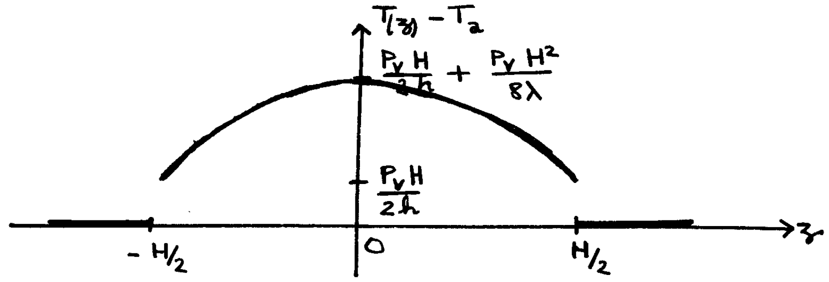
finalement

$$\boxed{T(z) = T_a + \frac{P_v}{2\lambda}\left(\frac{H^2}{4} - z^2\right) + \frac{P_v H}{2h}}$$

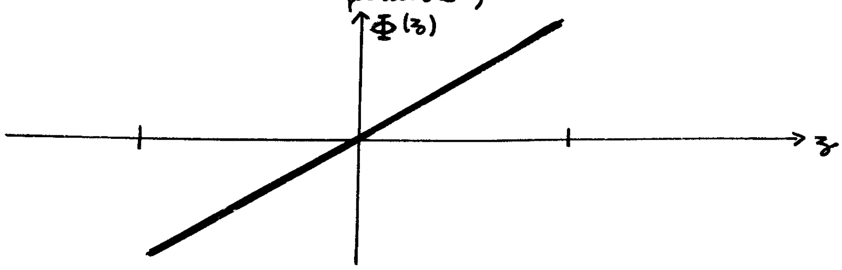
$\longrightarrow$ $j = P_v\, z$

$$\boxed{\Phi = P_v\, \pi R^2 z}$$

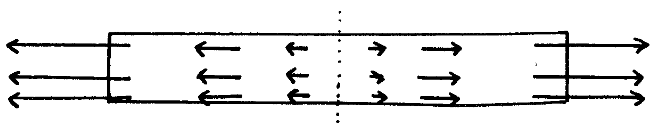
$\longrightarrow$



(T(z) fonction paire parabole)



($\Phi(z)$ fonction impaire linéaire)

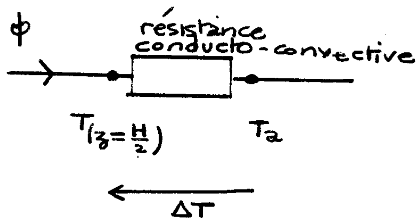


→ $$\boxed{T(z=0) = \frac{P_v H}{2h} + \frac{P_v H^2}{8\lambda} + T_a}$$

→ $$\phi(z=H/2) = P_v \overbrace{\pi R^2 \; H/2}^{\text{volume moitié droite}}$$

C'est la puissance produite par la moitié droite du cylindre, qui est exportée vers la droite.

$$T(z=H/2) = \frac{P_v H}{2h} + T_a$$

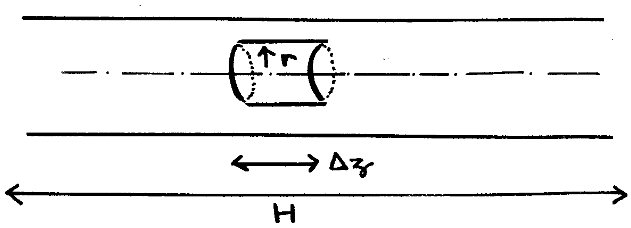


donc :

$$\boxed{\begin{array}{c} \Delta T = R_{therm}\,\phi \\ T(z=H/2) - T_a = \dfrac{1}{h\,\pi R^2}\, P_v\, \pi R^2 \dfrac{H}{2} \end{array}}$$

---

4)



$$\vec{j} = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\, T$$

$$\vec{j}(r) = \underbrace{-\lambda \frac{dT}{dr}}_{j(r)} \vec{u_r}$$

→ bilan thermique

$$\underbrace{dH}_{\text{nul en régime permanent}} = \delta Q_{reçu} + \delta Q_{produit}$$

$$\frac{\delta Q_{sortant}}{dt} = \frac{\delta Q_{produit}}{dt}$$

$$\oint \vec{j}\,\vec{dS} = \iiint P_v \, d\tau$$

$$j_{(r)}\, 2\pi r \,\Delta z = P_v \,\pi r^2 \Delta z$$

$$\boxed{\vec{j} = \frac{P_v \, r}{2} \,\vec{u_r}}$$

→ température

$$-\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{P_v\, r}{2}$$

$$dT = -\frac{P_v}{2\lambda}\, r\, dr$$

$$\int_T^{T_2} dT' = -\frac{P_v}{2\lambda}\int_r^R r'dr'$$

$$\boxed{T_{(r)} - T_2 = \frac{P_v}{4\lambda}\left(R^2 - r^2\right)}$$

→ $$\boxed{\frac{\Phi(r)}{H} = P_v \,\pi r^2}$$

---

5) Les échanges conducto convectifs n'interviennent qu'aux limites.

On aura toujours :

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{j} = \frac{P_v \, r}{2}\,\vec{u_r} \\ \frac{\Phi(r)}{H} = P_v \,\pi r^2\end{gathered}}$$

et

$$T = -\frac{P_v}{4\lambda} r^2 + A$$

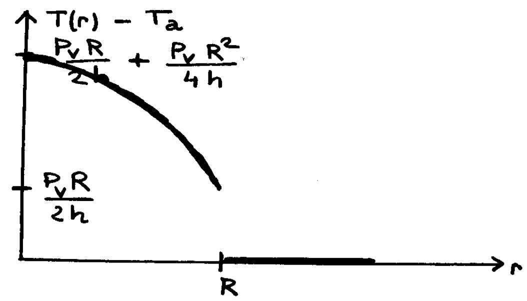
Pour la C.L. on a ici

$$j(R) = h\left(T(R) - T_2\right)$$

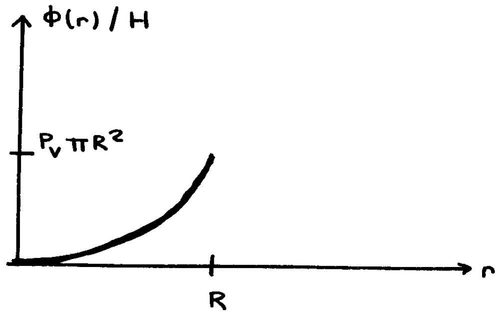
finalement :

$$\boxed{T - T_a = \frac{P_v}{4\lambda}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{P_v\, R}{2h}}$$

→



T(r) parabole (d'axe r=0)



→

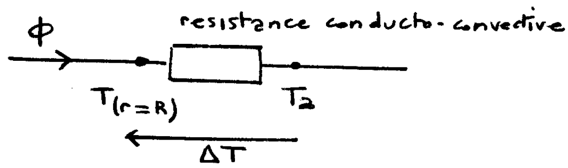
$$\boxed{T(r=0) = \frac{P_v\, R}{2h} + \frac{P_v}{4\lambda} R^2 + T_a}$$

→

$$\Phi(r=R) = P_v\, \pi R^2 H$$

c'est la puissance produite par la hauteur H de cylindre

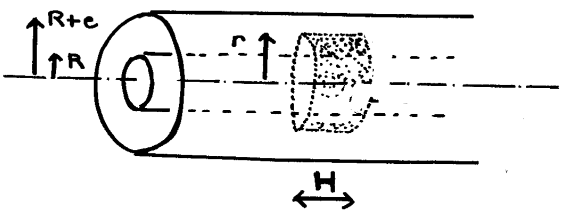
$$T(r=R) = \frac{P_v\, R}{2h} + T_a$$



donc

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta T &= R_{therm}\, \Phi \\ T(r=R) - T_a &= \frac{1}{h\, 2\pi R H}\, P_v\, \pi R^2 H \end{aligned}}$$

6)



→ On considère le volume entre r et $r+dr$

$$\underbrace{d^2H}_{\text{nul en régime stationnaire}} = \delta^2Q_{reçu} + \underbrace{\delta^2Q_{produit}}_{\text{nul}}$$

donc $\boxed{\delta^2Q_{reçu} \text{ est nul.}}$

Le flux entrant en r doit ressortir en $r+dr$

$$\boxed{\Phi/H \text{ ne dépend pas de } r}$$

→ Cette puissance correspond à la puissance perdue par l'eau dans le tuyau de canalisation.

La température n'y baisse pas car l'eau circule dans le tuyau et l'eau à la cote z a donc une température constante.

---

7) Φ est le flux à travers la surface latérale

$$\Phi = \iint_{\substack{\text{surface} \\ \text{latérale}}} \vec{j}\ \vec{dS}$$

$$= j\ 2\pi r\ H$$

$$\boxed{\vec{j}(r) = \frac{\Phi/H}{2\pi r}\ \vec{u_r}}$$

j est donc en $\frac{1}{r}$ dans le manchon isolant

---

8)

$$-\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{\Phi/H}{2\pi r}$$

$$\int_{T_0}^{T} dT' = -\frac{\phi/H}{2\pi\lambda}\int_R^r \frac{dr'}{r'}$$

$$\boxed{T(r) - T_0 = -(\phi/H)\ \frac{1}{2\pi\lambda}\ \ln\left(\frac{r}{R}\right)}$$

(de la forme : $T = A \ln r + B$)

$$\boxed{T_0 - T_{(r=R+e)} = (\phi/H)\ \frac{1}{2\pi\lambda}\ \ln\left(\frac{R+e}{R}\right)} \quad (1)$$

---

9) ϕ est continu. Les échanges conducto-convectifs donnent

$$\phi = h\ (T_{(r=R+e)} - T_a)\ 2\pi\ (R+e)\ H$$

$$\boxed{T_{(r=R+e)} - T_a = (\phi/H)\ \frac{1}{2\pi h}\ \frac{1}{R+e}} \quad (2)$$

On fait la somme des équations (1) et (2)

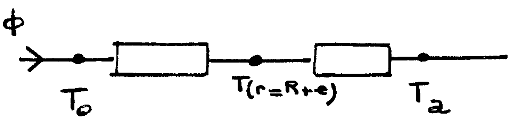
$$T_0 - T_a = (\phi/H)\left[\frac{1}{2\pi\lambda}\ln\left(\frac{R+e}{R}\right) + \frac{1}{2\pi h}\frac{1}{R+e}\right]$$

$$\boxed{\phi/H = (T_0 - T_a)\ \frac{1}{\frac{1}{2\pi\lambda}\ln\left(\frac{R+e}{R}\right) + \frac{1}{2\pi h}\frac{1}{R+e}}}$$

---

10) Le flux ϕ qui s'échappe du tuyau d'eau traverse le manchon isolant (résistance conductive) puis la couche limite (résistance conducto-convective)

On peut en effet modéliser par des résistances (pas de sources, régime permanent) puisqu'il existe bien un courant ϕ uniforme.



$$\boxed{R_{cond} = \frac{\ln\left(\frac{R+e}{R}\right)}{2\pi\lambda H}} \qquad \boxed{R_{cc} = \frac{1}{h\ 2\pi(R+e)H}} \quad \left(\text{cf } \frac{1}{hS}\right)$$

(question 8) (question 9)

On a effectivement obtenu :

$$\Delta T = \sum R \quad \phi$$
$$T_0 - T_a = (R_{cond} + R_{cc}) \quad \phi$$

---

11)
$$\alpha = \frac{R}{\lambda / h}$$
$$[\alpha] = \frac{[R][h]}{[\lambda]}$$

avec $[R] = L$
$[h] = [\text{Puissance}] \; L^{-2} \; \theta^{-1}$
$[\lambda] = [\text{Puissance}] \; L^{-2} \; \theta^{-1} \; L$

α est donc une grandeur sans dimension.

---

12) Expression de φ

$$\varphi = \frac{(T_0 - T_a) \dfrac{1}{\frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{R+e}{R} + \frac{1}{2\pi h} \frac{1}{R+e}}}{(T_0 - T_a) \dfrac{1}{0 + \frac{1}{2\pi h} \frac{1}{R}}}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{\alpha \ln(1+x) + \dfrac{1}{1+x}}} \quad \begin{matrix} (\varphi > 0) \\ (x > 0) \end{matrix}$$

φ admet un extremum si son dénominateur admet un extremum.

$$D = \alpha \ln(1+x) + \frac{1}{1+x}$$
$$\frac{dD}{dx} = \alpha \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

extremum pour $x = \frac{1}{\alpha} - 1$ (>0)

à la condition que $\alpha < 1$

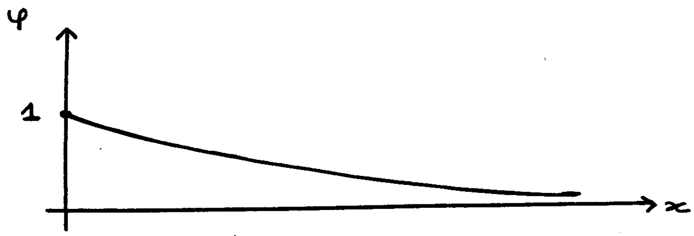
Si $x = 0$ $\varphi = 1$

$x \to \infty$ $\varphi \to 0$ (isolation parfaite...)

L'extremum (s'il existe) est un maximum donc.

$$\varphi_{MAX} = \frac{1}{\alpha(1 - \ln \alpha)}$$

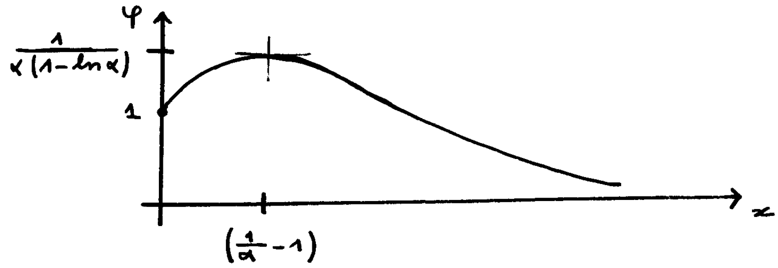
Donc pour $\alpha > 1$ pas d'extremum
φ décroît avec x



Le flux dissipé décroît continûment quand on augmente l'épaisseur de l'isolant.
c'est l'effet a priori attendu.

---

13) pour $\alpha < 1$ extremum



Le flux dissipé commence par augmenter quand on augmente l'épaisseur de "l'isolant".
c'est un effet a priori inattendu.

---

14) A.N. $\lambda/h = 0{,}05$

$R+e = 0{,}05$

donc $R < \lambda/h$

$\alpha < 1$

on se trouve dans le cas d'un extremum.

Pour l'extremum

$$x = \frac{1}{\alpha} - 1$$

$$\frac{e}{R} = \frac{1}{\alpha} - 1$$

$$\frac{R+e}{R} = \frac{\lambda/h}{R}$$

$$R+e = \lambda/h$$

C'est le cas proposé ici.
<u>on se trouve à l'extremum</u>

<u>Au contraire de l'isoler, on a maximisé le flux dissipé</u>

---

15) Il y a deux effets jouant en sens contraire :
- si l'épaisseur augmente, <u>la résistance de conduction augmente</u>
- mais la surface externe augmentant, <u>la résistance de conducto-convection diminue</u>

On peut donc en entourant une conduite d'un manchon bien calculé <u>augmenter la dissipation thermique</u>. C'est utile si on a besoin de favoriser le refroidissement.
