DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

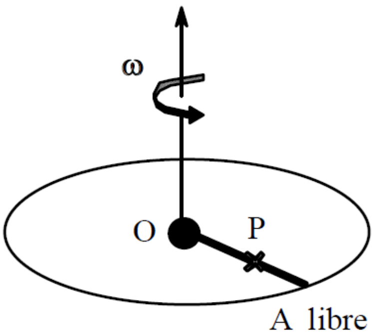
Sujet

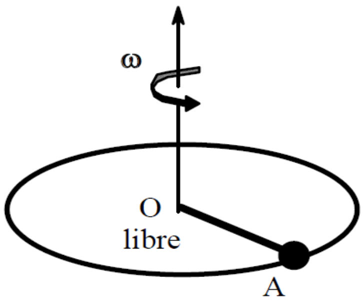
Tensions et compressions dans des corps en rotation

I. Rotation d'une barre rigide

Une barre OA, de longueur au repos L_0 et de section s constante et très petite devant L_0^2 a, au repos, une masse linéique λ_0. Cette barre tourne autour d'un axe vertical avec la vitesse angulaire constante ω. On appelle $\vec{T}(r)$ la tension de la barre au point P à une distance r de l'axe de rotation ; cette grandeur représente l'action du reste de la barre sur la longueur OP.

On posera $\vec{T}(r)\ \vec{u}_r = T(r)$ avec $\vec{u}_r$ désigne le vecteur unitaire radial selon OA.





1. Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour un élément de barre de longueur dr. En déduire qu'en régime permanent T, vérifie: $\frac{dT}{dr} = -\lambda\omega^2 r$. Justifier avec précision les signes dans les équations.

A. Barre rigide (solide)

On suppose que la barre est rigide, alors $\lambda = \lambda_0$ est constant.

2. L'extrémité A est libre, l'extrémité O est fixe. Déterminer l'évolution de la tension, notée $T_1(r)$, le long de la barre. Commenter le signe de $T_1(r)$.

3. L'extrémité O est libre, l'extrémité A est fixée à un mur vertical tournant à la vitesse angulaire ω. Exprimer la nouvelle tension, notée $T_2(r)$. Commenter le signe de $T_2(r)$.

4. Mais, si l'on envisage le cas où les deux extrémités distantes de L_0 sont attachées au mécanisme

assurant la rotation, on ne sait pas déterminer la constante d'intégration de l'équation différentielle obtenue à la *question* 1 . Commenter: pour quelle raison observe-t-on cette difficulté?

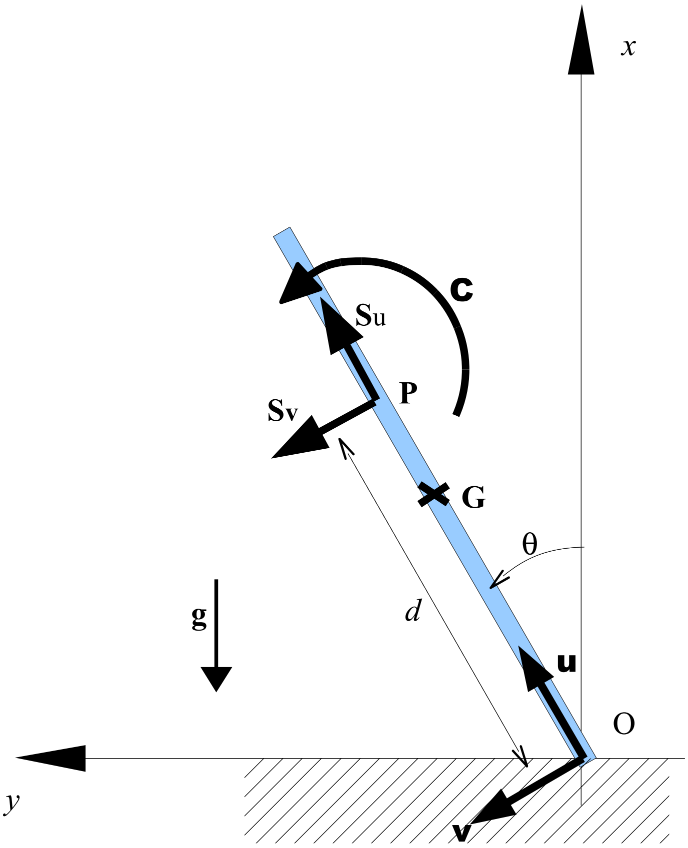
B. Barre déformable

On envisage à nouveau le cas où les deux extrémités distantes de L_0 sont attachées au mécanisme assurant la rotation. On abandonne maintenant l'hypothèse de rigidité. On adopte pour la barre l'équation d'état: $\lambda(r)=\lambda_0\left(1-\frac{T(r)}{sE}\right)$ où E est une constante appelée module de rigidité et s la section constante de la barre (le module de rigidité de la barre rigide de la partie précédente était donc supposé infini, ici il est fini).

Dans la pratique, l'inégalité $\varepsilon'(r)=\frac{T(r)}{sE}\ll 1$ est vérifiée pour les corps solides.

5. Intégrer l'équation et donner le résultat au premier ordre en $\varepsilon'(r)$ .Le résultat sera mis sous la forme $T(r)=f(r)+K'$, où K' est une constante d'intégration, indéterminée à ce stade.
6. Déterminer la constante K' en exprimant la conservation de la masse. En déduire que la loi de répartition de la tension $T(r)$ est indépendante du module de rigidité (fini). En quel point de la barre cette tension est-elle nulle ?

II. Rotation à vitesse angulaire variable



Une cheminée verticale est modélisée par un cylindre homogène de masse M , de longueur D et de rayon très petit devant D . Pour une raison quelconque, l'équilibre de la cheminée est détruit; cette dernière amorce une rotation autour de sa base dans le plan vertical (O, x, y) . On appelle θ l'angle de la cheminée avec la verticale. On étudie le mouvement de la cheminée dans le repère R_G en projection sur la base mobile de coordonnées polaires $\vec{u}$, $\vec{v}$ où $\vec{u}$ est porté par l'axe de la cheminée, $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ dans le sens de rotation de l'angle θ et G est le centre de masse de la cheminée. Les moments d'inertie en G autour de l'axe Gz et en O autour de l'axe Oz sont respectivement $J_G = \frac{1}{12} M D^2$ et $J_O = \frac{1}{3} M D^2$.

La liaison en O est supposée parfaite.

A. Mouvement de la cheminée

7. Déterminer, par application du théorème du moment cinétique en O , l'équation d'évolution de l'angle θ .

8. Retrouver cette équation par un raisonnement énergétique.

9. Donner dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$, en fonction de l'angle θ , l'expression de la réaction du sol en O .

10. On pose alors $\vec{R} = R_x \vec{u}_x + R_y \vec{u}_y$ .Tracer, sur un même graphe, les courbes $R_x = R_x(\theta)$ et $R_y = R_y(\theta)$. Que peut-on alors prévoir dans le cadre du modèle : la cheminée va se mettre à glisser, ou: la cheminée va décoller du sol ?. En quoi le modèle proposé pour la cheminée manque-t-il ici de réalisme ?

On continue l'étude dans le cadre du modèle de départ, en supposant ni glissement, ni décollage à la base de la cheminée.

B. Brisure de la cheminée

En réalité, une cheminée peut se briser au cours de sa chute. L'étude suivante va préciser les contraintes subies par la cheminée pendant sa chute. Une longueur $OP = d$ de cheminée subit l'action du sol en O , l'action de son poids ainsi que l'action du reste de la cheminée sur elle-même, en P . Cette action assure la rigidité de la cheminée.

Le contact en P n'étant pas ponctuel, l'action du reste de la cheminée sur la longueur d est modélisée par une force $\vec{S}$ de composantes S_u (effort de traction) et S_v (effort de cisaillement) mais aussi par un couple $\vec{C} = C \vec{u}_z$ (couple de flexion) porté par l'axe horizontal Oz . ($\vec{C}$ désigne le moment des actions, il est indépendant du point de calcul).

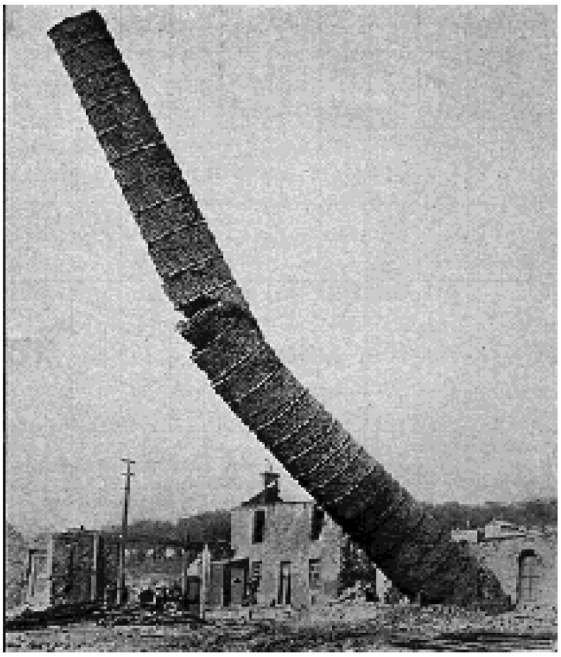
11. En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la longueur d de cheminée, exprimer S_u et S_v en fonction de M , g , θ , d et D .

12. Montrer que le théorème du moment cinétique en O , appliqué à la longueur d de cheminée conduit à l'expression suivante de C : $C = -\frac{1}{4} M g d \left(\frac{d}{D} - 1\right)^2 \sin\theta$

13. Si la cheminée perd sa rigidité, elle s'effrite. Elle aura tendance à s'effriter au point où l'effort de cisaillement S_v est le plus important (en valeur absolue). Tracer le graphe donnant S_v , en fonction du rapport $\frac{d}{D}$ (θ est donné). En quel point la cheminée aura-t-elle le plus tendance à s'effriter?

14.Si ce couple (en valeur absolue) est supérieur au couple maximum que peut subir la cheminée, celle-ci se brise. Tracer le graphe donnant C ,en fonction du rapport $\frac{d}{D}$ (θ est donné). En quel point la cheminée se brisera-t-elle ?

15.Commenter alors les deux photographies ci-dessous.



Photographie 1

Photographie 2

16.Quand on casse un morceau de sucre en deux parties, en le tenant entre deux pouces et deux index, est-il plus aisé de le faire par traction, par rotation (flexion) ou par cisaillement ?

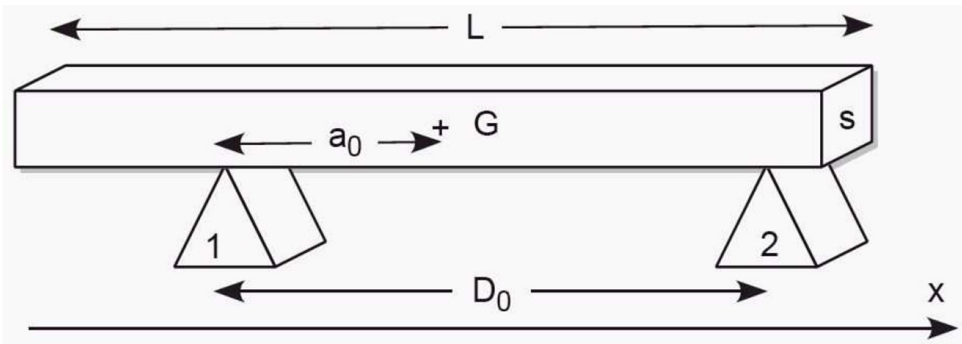
Principe du mouvement «collé-glissé» (stick-slip)

Le frottement solide joue un rôle considérable dans de nombreuses situations, statiques ou dynamiques. On analyse ici quelques aspects du mouvement d'un solide qui peut soit glisser (« slip») soit adhérer(« stick ») sur son support. Ce phénomène a pour origine le fait que les coefficients de frottement statique et cinétique diffèrent. Il est ainsi responsable du grincement des portes, du crissement des craies sur le tableau noir, ou dans un registre plus harmonieux, de la mise en vibration d'une corde de violon.

Définitions et rappels :

Lois du frottement solide/solide (lois de Coulomb) : T et N étant respectivement les composantes scalaires tangentielle et normale de l'action de contact exercée par un solide sur un autre, μ_S et μ_C les coefficients de frottement « statique» et «cinétique » avec $\mu_S > \mu_C$,

- *si la vitesse de glissement est nulle, alors $|T| \leq \mu_S |N|$*
- *si la vitesse de glissement est non nulle, alors $|T| = \mu_C |N|$, l'action de contact tangentielle est de sens opposé à la vitesse de glissement.*



Une poutre rigide et homogène,de longueur L , de masse m et de section carrée s , est posée en équilibre à l'horizontale sur deux supports (numérotés 1 et 2) séparés de la distance D_0 (*Figure1*).Les coefficients de frottement solide statique et cinétique entre cette poutre et chacun des supports sont respectivement μ_S et μ_C , avec $\mu_S > \mu_C$. Le centre de gravité G de la poutre se trouve initialement à la distance horizontale a_0 du support 1 , avec $a_0 < D_0/2$.

A. Repos

La poutre est immobile.

1. En utilisant le théorème de la résultante cinétique et (ou) le théorème du moment cinétique, donner l'expression des composantes verticales (axe vers le haut) des réactions supports sur la poutre, N_1 et N_2 , en fonction des données du problème.

2. Comparer N_1 et N_2 .

B. Mouvement des deux supports

Les supports 1 et 2 sont maintenant animés l'un vers l'autre de vitesses horizontales et constantes, respectivement $v_0/2$ et $-v_0/2$ selon Ox . La poutre ne peut se déplacer qu'en translation horizontale selon cette même direction. La distance entre les deux supports s'écrit donc : $D(t)=D_0-v_0t$.

3. Que deviennent les forces $N_1(t)$ et $N_2(t)$ en fonction notamment de $D(t)$ et de $a(t)$, distance horizontale entre le centre de gravité G de la poutre et le support 1 à l'instant t ?

1) Première phase: glissement sur un seul support

On suppose que la poutre glisse d'abord par rapport à un seul des deux supports.

4. Si on suppose que le glissement s'effectue sur le seul support 1 , quelle est la vitesse de la poutre ? Dépend-elle du temps? Mêmes questions en supposant un glissement cette fois sur le seul support 2 .

5. On désigne par $T_1(t)$ et $T_2(t)$ les composantes horizontales de frottement agissant sur la poutre (ce sont des grandeurs algébriques, comptées positivement dans le sens de l'axe x). Trouver une relation entre $T_1(t)$ et $T_2(t)$.

6. Sur quel support le glissement s'effectue-t-il en réalité. Justifier.

7. Déterminer $T_1(t)$ et $T_2(t)$ lors de cette phase du mouvement. On justifiera les signes de ces grandeurs.

8. Montrer qualitativement que ce mouvement ne peut se perpétuer. A quel instant désigné par t_1 la poutre se met-elle à glisser sur l'autre support. Déterminer la distance $D_1=D(t_1)$ en fonction de a_0 , μ_S et μ_C .

2) Deuxième phase: glissement sur deux supports

9. Justifier qu'il existe alors une phase du mouvement où nécessairement il y a glissement sur les deux supports.

10. Exprimer alors la somme des forces de frottement en fonction de $a(t)$, $D(t)$ et des constantes du problème. Dans quel sens agit-elle?

11. Donner le critère qui détermine la fin de cette seconde phase en précisant le support sur lequel le glissement cesse. Soit t'_1 l'instant correspondant.

3) Troisième phase

12. Décrire la phase suivante du mouvement. Elle se termine à l'instant t_2 . Montrer que:

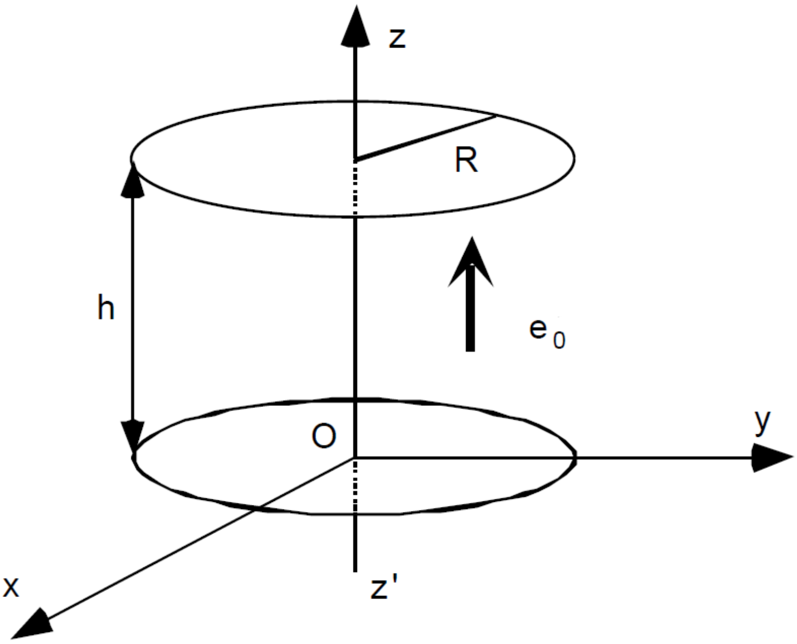
$$D(t_2)=\left(1+\frac{\mu_C}{\mu_S}\right)\cdot[D(t'_1)-a(t'_1)]$$

13. On admettra que,pour une faible vitesse de rapprochement des supports et une distance a_0 suffisamment grande, les modifications de $D(t)$ et de $a(t)$ durant la phase transitoire (*deuxième phase*) restent faibles en valeur relative. En les négligeant, montrer que

$D(t_2) \simeq \frac{\mu_C}{\mu_S} D(t_1)$. En déduire un moyen simple d'évaluer le rapport μ_C / μ_S . On donnera une description sommaire de l'expérience à réaliser.

Champ électromagnétique dans un condensateur plan cylindrique

Un condensateur plan est constitué par des armatures métalliques circulaires de rayon R et de même axe $\Delta = z'z$, séparées d'une hauteur h. Ce condensateur est soumis à une tension alternative donnée, de fréquence $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$, qui produit à l'instant t dans l'espace vide entre les armatures un champ électrique. En première approximation, ce champ est décrit à basse fréquence par $\vec{E}_0 = \vec{e}_0 \cos \omega t$ uniforme, sinusoïdal dans le temps et axial (c'est à dire parallèle à l'axe Δ), qu'on écrit en notation complexe : $\underline{\vec{E}}_0(t) = \vec{e}_0 \exp(i\omega t)$. Ce champ vérifie donc $\overrightarrow{rot}\, \vec{E}_0 = \vec{0}$ et $div\, \vec{E}_0 = 0$.



Dans une description plus précise, on considère, lorsque l'on monte en fréquence, que le champ électrique $\vec{E}_0$ crée un champ magnétique $\vec{B}_1$, lequel engendre un champ électrique $\vec{E}_2$, qui crée à son tour un champ magnétique $\vec{B}_3$, qui engendre $\vec{E}_4$, etc.

Dans tout le problème, on négligera les effets de bord et le champ sur l'axe restera désigné par $\underline{\vec{E}}_0(t) = \vec{e}_0 \exp(i\omega t)$.

Les coordonnées cylindriques sont désignées ici par (ρ, θ, z).

I. Calcul des champs B$_1$ et E$_2$

Les variations dans le temps du champ électrique $\vec{E}_0$ créent un champ magnétique $\vec{B}_1$. On veut calculer $\underline{\vec{B}}_1$.

1. En un point M entre les plaques, quelle est l' équation de Maxwell qui permet de déterminer $\underline{\vec{B}}_1$ à partir de $\underline{\vec{E}}_0$? En déduire l'équation satisfaite par $\underline{\vec{B}}_1(M, t)$ en fonction de ω, c (vitesse de la lumière dans le vide) et $\underline{\vec{E}}_0$.

2. Justifier la direction de $\vec{B}_1(M,t)$

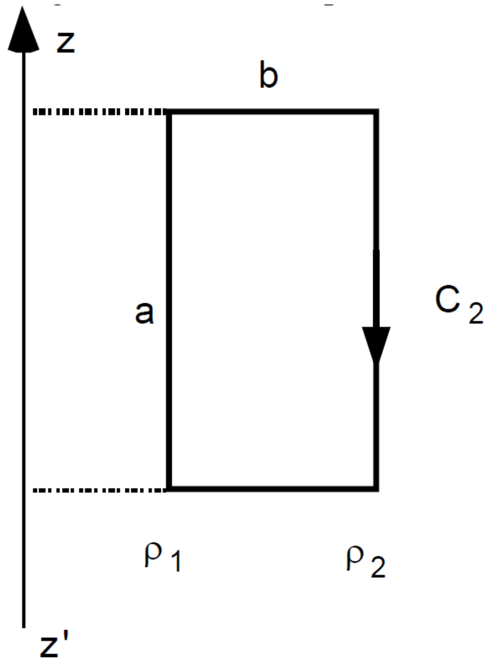
3. Soit le cercle C_1 parallèle au plan xOy , centré sur Δ et passant par M . Déterminer la circulation de $\vec{B}_1(M,t)$ sur le contour C_1 . En déduire $\vec{B}_1(M,t)$ en fonction de c , $X=\dfrac{\omega\rho}{2c}$ et $\vec{E}_0$. Quelle est la dimension de X ?

Les variations dans le temps du champ magnétique $\vec{B}_1$, créent un champ électrique $\vec{E}_2$. On veut calculer $\vec{E}_2$.

4. Quelle équation de Maxwell permet de déterminer $\vec{E}_2$ à partir de $\vec{B}_1$? En déduire l'équation satisfaite par $\vec{E}_2(M,t)$ en fonction de c , X , ω et $\vec{E}_0$

5. Sans faire de calculs, montrer que l'on peut supposer $\vec{E}_2$ axial.

6. Soit le contour orienté rectangulaire C_2 dans un plan méridien (voir figure) . Déterminer la circulation de $\vec{E}_2$ sur C_2 (en faisant intervenir notamment $X_1=\dfrac{\omega\rho_1}{2c}$ et $X_2=\dfrac{\omega\rho_2}{2c}$). En déduire l'expression de $\vec{E}_2$ en fonction de X et $\vec{E}_0$ en prenant $\vec{E}_2(\rho=0)=\vec{0}$.



II. Comportement à basse fréquence

A basse fréquence ($X \ll 1$) on décide ici de négliger les termes en X de degré supérieur à 2 .

A. Champs

7. Exprimer, dans ces conditions, en utilisant les résultats précédents, le champ magnétique total $\vec{B}_{BF}(M,t)$ et le champ électrique total $\vec{E}_{BF}(M,t)$ qui règnent en M à l'instant t à l'intérieur du condensateur, en fonction de c , X et $\vec{E}_0$.

B. Étude énergétique

8. Exprimer la densité volumique instantanée $\varepsilon_e(t)$ d'énergie électrique et la densité volumique instantanée $\varepsilon_m(t)$ d'énergie magnétique dans le condensateur en fonction de ε_0 (la permittivité du vide), X , ωt et $e_0 = |\vec{e}_0|$.

9. On note $<\varepsilon_{e,m}(t)>_t$ les moyennes temporelles correspondantes. Exprimer, en fonction de X , le rapport $\dfrac{<\varepsilon_m>_t}{<\varepsilon_e>_t}$. Que peut-on en conclure ?

C. Puissance rayonnée

Soit $\vec{\Pi}$ le vecteur de Poynting associé à ce champ électromagnétique.

10. Exprimer $\vec{\Pi}$ à l'ordre le plus bas en X , en fonction de ε_0 , c , X , e_0 et ωt . En déduire que les échanges par rayonnement se limitent à la surface latérale du condensateur.

11. Exprimer la puissance rayonnée instantanée $\mathscr{P}(t)$ et en déduire $<\mathscr{P}(t)>_t$. Comment interprétez-vous ce résultat ?

III. Comportement à haute fréquence .

A. Champs

A haute fréquence, on ne peut plus négliger les termes en X de degré supérieur à 2. On va donc calculer $\vec{B}_3$ dont $\vec{E}_2$ est la source, $\vec{E}_4$ dont $\vec{B}_3$ est la source, etc ...

12. Donner l'orientation de $\vec{B}_3$

13. Quelle est l'équation satisfaite par $\underline{\vec{B}}_3(M,t)$? Déterminer l'expression de $\underline{\vec{B}}_3(M,t)$ en fonction de c , X et $\underline{E}_0$.

14. Donner l'expression de $\underline{\vec{E}}_4(M,t)$.

On admet que : $\underline{\vec{E}}_{2n}(M,t) = \dfrac{1}{(n!)^2}(iX)^{2n}\underline{\vec{E}}_0(t)$.

15. Montrer que le champ électrique total $\underline{\vec{E}}(M,t)$ qui règne à l'intérieur du condensateur s'exprime simplement en fonction de $\underline{\vec{E}}_0$ et de la fonction de Bessel $J_0(x)$ (donnée en annexe), à condition d'attribuer à x une expression littérale qu'on donnera.

16. En déduire qu'à la périphérie du condensateur, certaines valeurs de ω , que l'on précisera, annulent le champ électrique.

B. Réalisation d'une cavité

On ferme le condensateur au niveau de sa surface latérale $\rho = R$ par une feuille d'aluminium assimilé à un conducteur parfait. On cherche les fréquences propres de la cavité ainsi constituée, c'est-à-dire les fréquences particulières permettant l'existence d'une onde décrite par: $\underline{\vec{E}} = \sum_n \underline{\vec{E}}_{2n}$ avec les notations du paragraphe précédent.

17. Quelles sont les conditions aux limites imposées aux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ par la présence de la

feuille d'aluminium ?

18.Quelles sont les pulsations possibles pour le champ électromagnétique dans cette cavité cylindrique ?

19.On excite la cavité à l'aide d'un générateur électrique délivrant une tension sinusoïdale de fréquence f aux bornes du condensateur. On constate expérimentalement que l'amplitude du champ dans la cavité prend des valeurs très importantes pour certaines fréquences f_i . Comment appelle-t-on ce phénomène ?

20.Calculer la fréquence f_1 , en GHz, la plus basse du champ $\vec{E}_0$ dans la cavité pour $R=4.10^{-2} m$. On donne $c=3.10^8 m.s^{-1}$.

ANNEXE: LES FONCTIONS DE BESSEL

Les fonctions de Bessel $B_\nu(z)$ sont des solutions de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 B_\nu(z)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d B_\nu(z)}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)B_\nu(z)=0 \quad \nu\in\mathcal{R}, z\in C$$

Les fonctions de Bessel de première espèce $J_\nu(z)$ sont définies par la série :

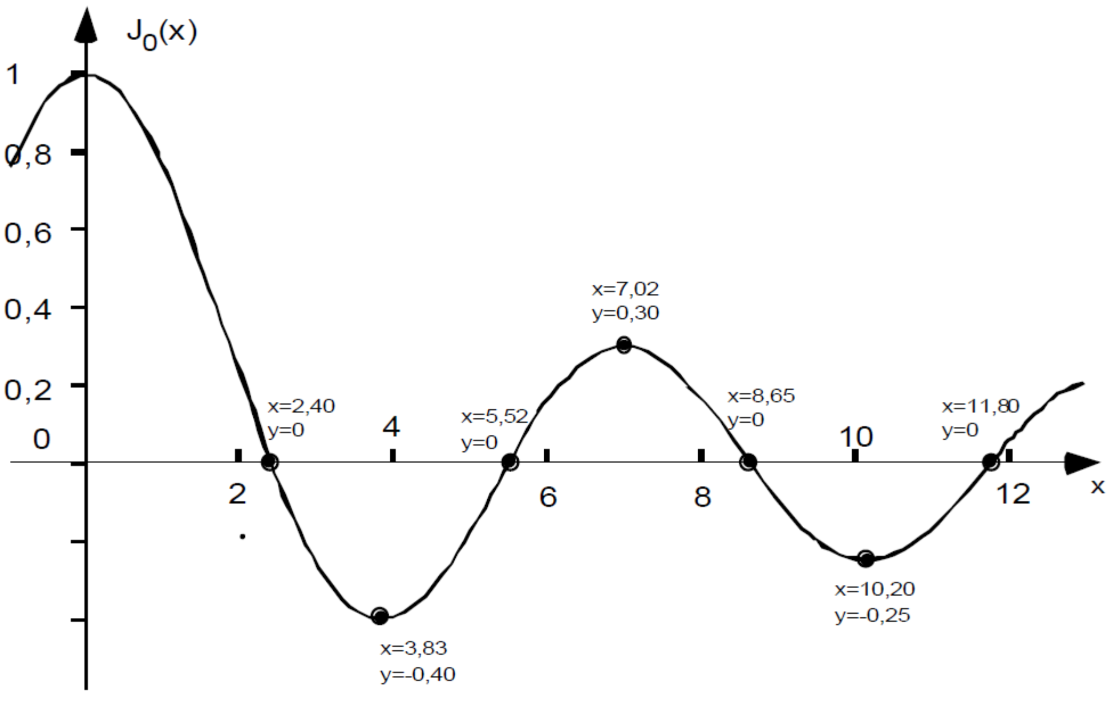
$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad \text{avec} \quad |arg\, z|<\pi$$

où Γ est la fonction qui généralise la fonction factorielle.

Dans le cas particulier $\nu=0$, nous avons :

$$J_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

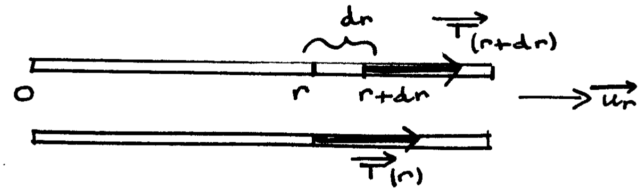
Pour x réel, le graphe de la fonction $J_0(x)$ est, pour sa partie $x>0$, le suivant :



Réponses

Tensions et compressions dans des corps en rotation

1)



sur l'élément dr :

Dans le référentiel galiléen : $-\overrightarrow{T}(r)$

$$\boxed{\overrightarrow{T}(r+dr) - \overrightarrow{T}(r) + dm\,\overrightarrow{g} = dm\,\overrightarrow{a}}$$

avec $\overrightarrow{a} = -\omega^2\overrightarrow{r}$ (accélération centripète)

On projette sur $\overrightarrow{u_r}$

$$T(r+dr) - T(r) = \lambda\,dr \times -\omega^2 r$$

$$\frac{dT}{dr}\,dr = -\lambda\omega^2 r\,dr$$

$$\boxed{\frac{dT}{dr} = -\lambda\omega^2 r}$$

---

2) On intègre :

$$dT = -\lambda_0\omega^2 r\,dr$$

$$\boxed{T = -\frac{\lambda_0\omega^2 r^2}{2} + K}$$

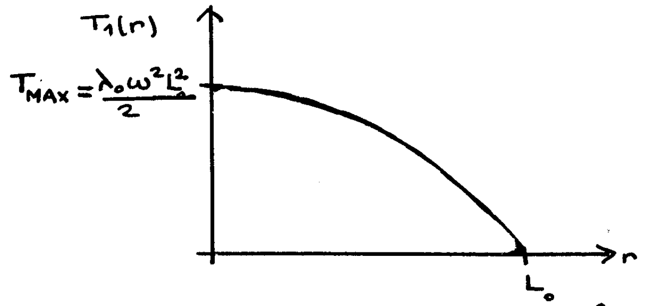
cste à déterminer par les C.L.

On a ici T nul en A soit en $r = L_o$ (la longueur vaut toujours L_o puisqu'il s'agit d'une tige rigide)

C.L. $\quad 0 = -\dfrac{\lambda_o\omega^2 L_o^2}{2} + K$

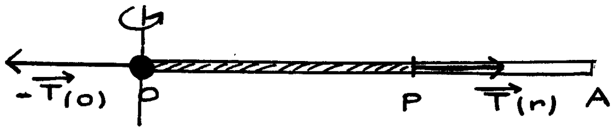
Finalement :

$$\boxed{T_1(r) = \frac{\lambda_o\omega^2}{2}(L_o^2 - r^2)}$$



(arc de parabole)

La tension est positive, la tige étant soumise à une traction



3)

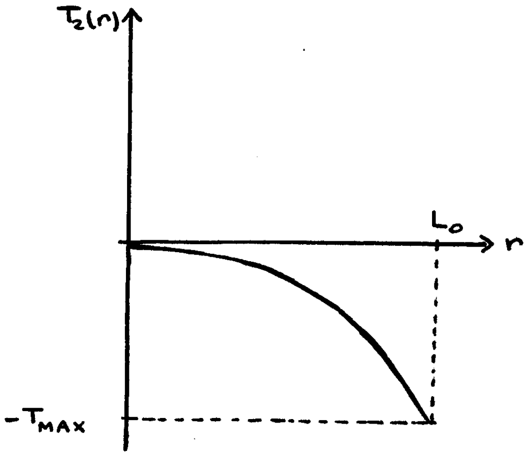
$$T = -\frac{\lambda_0 \omega^2 r^2}{2} + K$$

Ici, T est nul en O et non plus en A

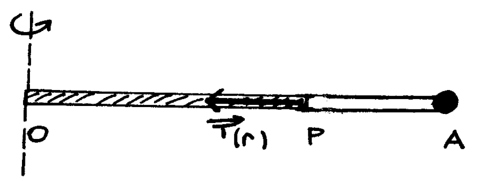
C.L. $\quad 0 = K$

Finalement

$$\boxed{T_2(r) = -\frac{\lambda_0 \omega^2 r^2}{2}}$$



La tension est négative, la tige étant soumise à une compression



(en considérant OP dans le référentiel tournant on voit que la force centrifuge sur OP doit être compensée par une tension centripète exercée par PA sur OP)

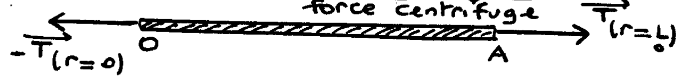
4) Il n'y a plus de C.L. précise. On ne connait ni $T(r=0)$ ni $T(r=L)$. On ne peut résoudre.

Par exemple, on a ici

$$T(r=0) = K$$

$$T(r=L_0) = -\frac{\lambda_0 \omega^2 L_0^2}{2} + K$$

$$T(r=L_0) - T(r=0) + \underbrace{\frac{\lambda_0 \omega^2 L_0^2}{2}}_{\text{force centrifuge}} = 0$$



(On obtiendrait cette équation en appliquant le principe fondamental à toute la tige dans le référentiel tournant)

On voit bien qu'on dispose d'une seule équation pour deux inconnues $T(r=L_0)$ et $T(r=0)$

---

5)

$$\frac{dT}{dr} = -\lambda_0 \left(1 - \frac{T(r)}{sE}\right) \omega^2 r$$

$$\frac{dT}{1 - \frac{T}{sE}} = -\lambda_0 \omega^2 r \, dr$$

$$sE \int \frac{d\left(\frac{T}{sE}\right)}{1 - \frac{T}{sE}} = -\lambda_0 \omega^2 \int r \, dr$$

$$-sE \underbrace{\ln\left(1 - \frac{T}{sE}\right)}_{-\frac{T}{sE} \text{ (au premier ordre en } \varepsilon')} = -\lambda_0 \omega^2 \frac{r^2}{2} + \text{constante, à déterminer}$$

On retrouve la même équation que précédemment :

$$\boxed{T = -\frac{\lambda_0 \omega^2 r^2}{2} + K'}$$

---

6) On écrit la conservation de la masse.

$$m = \underbrace{\int_0^{L_0} \lambda \, \rho \, dr}_{\text{en rotation}} = \underbrace{\int_0^{L_0} \lambda_0 \, \rho \, dr}_{\text{au repos}}$$

soit :

$$\int_0^{L_0} \cancel{\lambda_0} \left(1 - \frac{T(r)}{sE}\right) \cancel{\rho}\, dr = \cancel{\lambda_0} \cancel{\rho} \, L_0$$

$$\int_0^{L_0} \left(1 + \frac{\frac{\lambda_0 \omega^2 r^2}{2} - K'}{sE}\right) dr = L_0$$

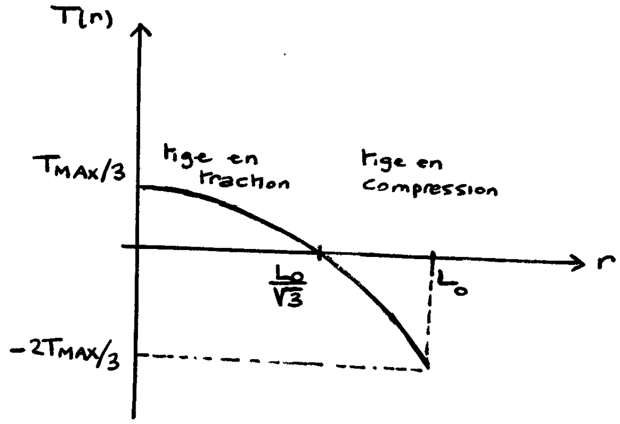
$$L_0 + \frac{\lambda_0 \omega^2}{2sE} \frac{L_0^3}{3} - \frac{K'}{sE} L_0 = L_0$$

$$\boxed{K' = \frac{\lambda_0 \omega^2 L_0^2}{6}}$$

(indépendant de E)

Finalement, on a résolu la question 4)

$$\boxed{T_{(r)} = \underbrace{\frac{\lambda_0 \omega^2 L_0^2}{2}}_{\substack{\text{noté plus haut} \\ T_{MAX}}} \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{L_0^2}\right)}$$



La tension est nulle pour

$$\boxed{r = \frac{L_0}{\sqrt{3}} \simeq 0{,}58 \, L_0}$$

7) On applique le théorème du moment cinétique dans le référentiel galiléen, à la cheminée, en O (fixe)

$$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{(O)\,\text{poids}} + \vec{\mathcal{M}}_{(O)\,\text{liaisons en }O}$$

en projection selon Oz

$$\underbrace{J_o}_{\frac{1}{3}MD^2} \frac{d\dot\theta}{dt} = Mg\frac{D}{2}\sin\theta + \underset{\text{(liaison parfaite)}}{0}$$

$$\boxed{\ddot\theta - \frac{3}{2}\frac{g}{D}\sin\theta = 0}$$

---

8) soit : par la conservation de l'énergie

L'énergie est conservée puisque la liaison parfaite en O ne travaille pas

avec

$$E_c = \frac{1}{2} J_o \dot\theta^2$$

$$E_p = Mg\frac{D}{2}\cos\theta \ \cancel{+\text{cste}}$$

$$\frac{1}{2}J_o\dot\theta^2 + Mg\frac{D}{2}\cos\theta = E$$

On porte les conditions initiales $(\theta = 0,\ \dot\theta = 0)$

$$\frac{1}{2}J_o\dot\theta^2 + Mg\frac{D}{2}\cos\theta = Mg\frac{D}{2}$$

$$\boxed{\dot\theta^2 = \frac{3g}{D}(1-\cos\theta)}$$

En dérivant cette intégrale première par rapport au temps, on retrouve l'équation différentielle du second ordre.

$$2\dot\theta\ddot\theta = \frac{3g}{D}\sin\theta\ \dot\theta$$

($\dot\theta = 0$ est une solution parasite)

$$\boxed{\ddot\theta - \frac{3}{2}\frac{g}{D}\sin\theta = 0}$$

soit : par le théorème de la puissance cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = \text{Puissance de ttes forces}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \underbrace{M\vec{g}\,\vec{v}_G}_{\text{puissance du poids}} + \underbrace{\vec{R}_{liaison}\,\vec{v}_{O\,\in\,cheminée} + \vec{\mathcal{M}}_{liaison}\,\vec{\omega}}_{\text{puissance des liaisons sur la cheminée}}$$

mais : $\vec{v}_O = \vec{0}$

$\vec{\mathcal{M}}_{liaison}\,\vec{\omega} = \mathcal{M}_z(O)\,\dot{\theta}$

↑ nul car liaison parfaite

$$\frac{dE_c}{dt} = M\vec{g}\,\vec{v}$$

$$\begin{array}{c|c|c|} & \begin{array}{c} -Mg\cos\theta \\ Mg\sin\theta \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \frac{D}{2}\dot{\theta} \\ 0 \end{array} \end{array}$$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$

$$= Mg\sin\theta\ \frac{D}{2}\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{3}MD^2\dot{\theta}^2\right) = Mg\sin\theta\ \frac{D}{2}\dot{\theta}$$

$$\frac{1}{3}MD^2\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta} = Mg\sin\theta\ \frac{D}{2}\dot{\theta}$$

finalement on retrouve bien

$$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{3}{2}\frac{g}{D}\sin\theta = 0}$$

Pour retrouver l'intégrale première, on intègre :

$$\ddot{\theta}\,\dot{\theta} - \frac{3}{2}\frac{g}{D}\sin\theta\ \dot{\theta} = 0$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{3}{2}\frac{g}{D}\cos\theta = K$$

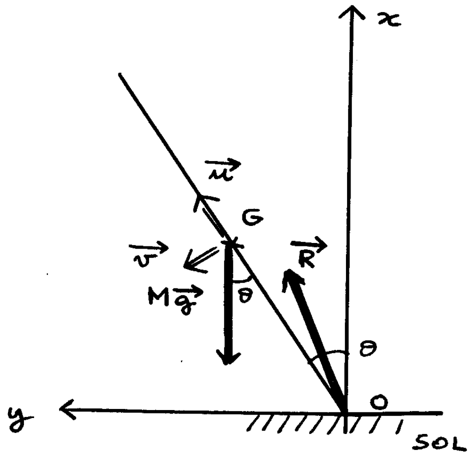
C.I. $\qquad \frac{3}{2}\frac{g}{D} = K$

finalement

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{D}(1-\cos\theta)}$$

---

9) on écrit le théorème de la résultante cinétique



$$\vec{R} + M\vec{g} = M\,\vec{a}_G \quad \text{(mvt circulaire)}$$

$$/\vec{u} \qquad R_u - Mg\cos\theta = -M\frac{D}{2}\dot{\theta}^2$$

$$/\vec{v} \qquad R_v + Mg\sin\theta = M\frac{D}{2}\ddot{\theta}$$

On remplace $\dot{\theta}^2$ et $\ddot{\theta}$ par leurs expressions en fonction de θ

$$R_u = Mg\cos\theta - M\frac{D}{2}\frac{3g}{D}(1-\cos\theta)$$

$$\boxed{\frac{R_u}{Mg} = \frac{1}{2}(5\cos\theta - 3)}$$

$$R_v = -Mg\sin\theta + \frac{MD}{2}\frac{3g}{2D}\sin\theta$$

$$\boxed{\frac{R_v}{Mg} = -\frac{1}{4}\sin\theta}$$

---

10) On a besoin en fait de R_x et R_y

(R_x composante perpendiculaire au sol

R_y composante tangentielle au sol)

$$R_x = R_u\cos\theta - R_v\sin\theta$$

$$\frac{R_x}{Mg} = \frac{1}{2}(5\cos\theta-3)\cos\theta + \frac{1}{4}\sin\theta\sin\theta$$

$$= \frac{5}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{4}\underbrace{\sin^2\theta}_{1-\cos^2\theta} - \frac{3}{2}\cos\theta$$

$$= \frac{9}{4}\cos^2\theta - \frac{3}{2}\cos\theta + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\frac{R_x}{Mg} = \left(\frac{3\cos\theta - 1}{2}\right)^2}$$

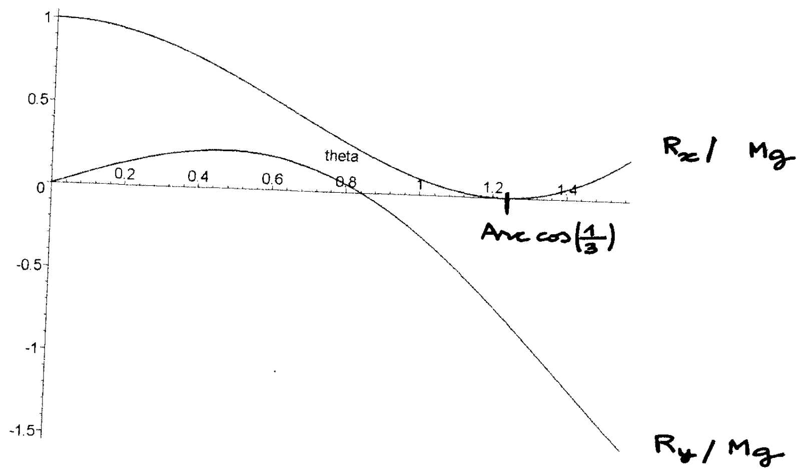
$$R_y = R_u \sin\theta + R_v \cos\theta$$

$$\frac{R_y}{Mg} = \frac{1}{2}(5\cos\theta - 3)\sin\theta - \frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{9}{4}\sin\theta\cos\theta - \frac{3}{2}\sin\theta$$

$$\boxed{\frac{R_y}{Mg} = \frac{3}{2}\sin\theta\left(\frac{3}{2}\cos\theta - 1\right)}$$

On trace les courbes avec la calculatrice graphique :



→ Dans la mesure où $R_x \geqslant 0$ toujours (et ne devient pas négatif), il n'y aura pas décollage

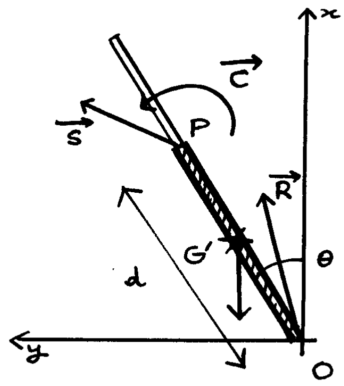
→ D'ailleurs avant de décoller, on aura obligatoirement l'inégalité $\left|\frac{R_x}{R_y}\right| \leqslant f$ qui deviendra fausse.

Il y aura donc glissement à la base de la cheminée.

(cf pour $\cos\theta = 1/3$ $\left|\frac{R_x}{R_y}\right| \to \infty$)

Le modèle étudié semble incorrect. Il oublie les fondations de la cheminée qui exercent un moment s'opposant à la rotation autour de Oz. La liaison n'est pas parfaite alors.

11) On applique le théorème de la résultante cinétique à la partie OP de la cheminée



→ La masse de OP est donc : $M' = M \frac{d}{D}$

→ le moment d'inertie de OP: $J'_O = \frac{1}{3} M' d^2$

$$= \frac{1}{3} \frac{M d^3}{D}$$

Les actions sur OP sont : la liaison en O (résultante $\vec{R}$ et moment en O), le poids $M'\vec{g}$, l'action du reste de la cheminée (résultante $\vec{S}$ et couple $\vec{C}$)

<u>th résultante cinétique :</u>

$$\vec{R} + M'\vec{g} + \vec{S} = M' \vec{a}_{G'}$$

$/\vec{u}$ $\quad R_u - M'g\cos\theta + S_u = -M' \frac{d}{2} \dot{\theta}^2$

$/\vec{v}$ $\quad R_v + M'g\sin\theta + S_v = M' \frac{d}{2} \ddot{\theta}$

$$S_u = M'g\cos\theta - M' \frac{d}{2} \dot{\theta}^2 - R_u$$

$$= M'g\cos\theta - M' \frac{d}{2} \frac{3g}{D}(1-\cos\theta) - Mg \frac{1}{2}(5\cos\theta - 3)$$

$$\boxed{\frac{S_u}{Mg} = -\frac{3}{2}\left(\frac{d}{D}\right)^2 (1-\cos\theta) + \left(\frac{d}{D}\right)\cos\theta - \frac{1}{2}(5\cos\theta - 3)}$$

$$S_v = M'\frac{d}{2}\ddot{\theta} - M'g\sin\theta - R_v$$

$$= M'\frac{d}{2}\frac{3g}{2D}\sin\theta - M'g\sin\theta + \frac{Mg}{4}\sin\theta$$

$$\boxed{\frac{S_v}{Mg} = \left[\frac{3}{4}\left(\frac{d}{D}\right)^2 - \left(\frac{d}{D}\right) + \frac{1}{4}\right]\sin\theta}$$

12) <u>théorème du moment cinétique</u> en O pour la partie OP

en projection sur Oz

$$J'_O\,\ddot{\theta} = M'g\,\frac{d}{2}\sin\theta + \underbrace{0}_{\text{liaison parfaite en O}} + \underbrace{C}_{\text{moment du couple dû au reste de la cheminée}} + S_v\,d$$

donc :

$$C = J'_O\,\ddot{\theta} - M'g\,\frac{d}{2}\sin\theta - S_v\,d$$

$$= \frac{1}{3}\frac{Md^3}{D}\left(\frac{3}{2}\frac{g}{D}\sin\theta\right) - M\frac{d}{D}g\frac{d}{2}\sin\theta - Mgd\sin\theta\left(\frac{3}{4}\left(\frac{d}{D}\right)^2 - \left(\frac{d}{D}\right) + \frac{1}{4}\right)$$

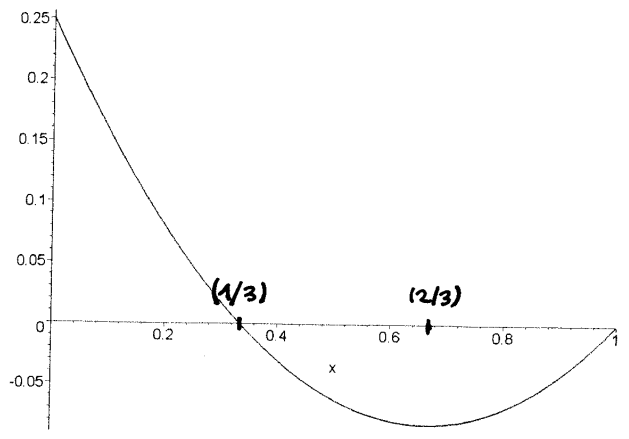
$$= Mgd\sin\theta\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d}{D}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{D}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{d}{D}\right)^2 + \left(\frac{d}{D}\right) - \frac{1}{4}\right]$$

$$= Mgd\sin\theta\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d}{D}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{D}\right) - \frac{1}{4}\right]$$

$$\boxed{C = -\frac{MgD\sin\theta}{4}\left(1-\left(\frac{d}{D}\right)\right)^2\left(\frac{d}{D}\right)}$$

---

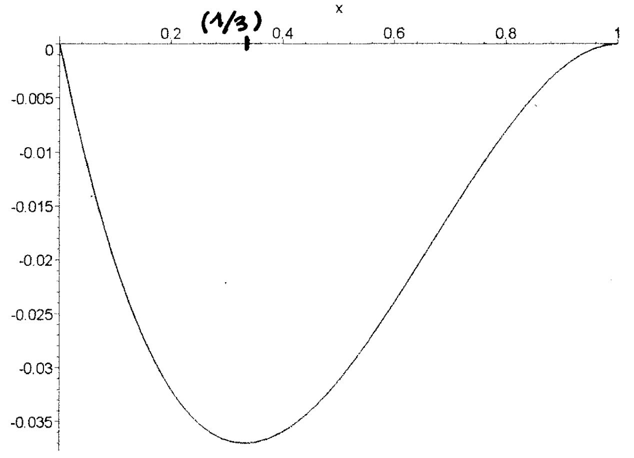
13) on trace $\frac{S_v}{Mg\sin\theta}$ en fonction de $\left(\frac{d}{D}\right) = x$



$|S_v|$ est le plus important à la base $\left(\frac{d}{D} = 0\right)$
C'est donc, à la base, que la cheminée a le plus tendance à s'effriter.

---

14) On trace $C / MgD \sin\theta$ en fonction de $\left(\frac{d}{D}\right) = x$



En faisant la dérivée, on s'aperçoit que l'extremum est pour $x = \frac{1}{3}$

$\boxed{\text{La cheminée se brise donc au } 1/3}$

---

15) photo 1 : la cheminée se brise
photo 2 : la cheminée s'effrite à la base.

La cheminée (photo 1) ne semble pas se briser au 1/3

→ soit l'angle sous lequel est prise la photo modifié le rapport apparent

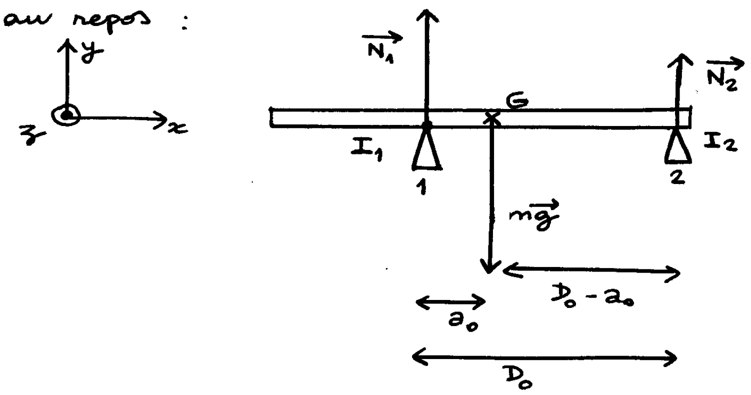
→ soit le modèle est à améliorer (ne serait-ce que parce que une cheminée n'est pas cylindrique mais elle est plus large à la base.

---

16) La cassure s'opère facilement par <u>flexion</u>.

Collé - glissé

1) au repos :



avec $\overrightarrow{N_1} = N_1 \overrightarrow{u_y}$
$\overrightarrow{N_2} = N_2 \overrightarrow{u_y}$

On peut appliquer
- le théorème de la résultante cinétique à la poutre
- le théorème du moment cinétique (en G fixe par exemple) à la poutre.

→ Il est plus rapide d'appliquer le théorème du moment cinétique en I_1 fixe (le moment cinétique de la poutre fixe est nul)

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{m\vec{g}}(I_1) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{N_2}}(I_1) = \vec{0}$$

selon z $\quad -mg\,a_o + N_2 D_o = 0$

$$\boxed{\frac{N_2}{mg} = \frac{a_o}{D_o}}$$

→ Idem en I_2 fixe

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{m\vec{g}}(I_2) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{N_1}}(I_2) = \vec{0}$$

selon z $\quad mg(D_o - a_o) - N_1 D_o = 0$

$$\boxed{\frac{N_1}{mg} = 1 - \frac{a_o}{D_o}}$$

---

2) On aura $\boxed{N_1 > N_2}$

vérification $\quad 1 - \frac{a_o}{D_o} \overset{?}{>} \frac{a_o}{D_o}$

$$1 \overset{?}{>} \frac{2a_0}{D_0}$$

exact puisque le texte indique $a_0 < \frac{D_0}{2}$

---

3) en mouvement :

Le théorème de la résultante cinétique à la poutre donnera en projection selon u_y :

$$N_1 + N_2 - mg = 0$$

Le théorème du moment cinétique <u>dans le référentiel barycentrique</u> donnera en projection selon u_z : (cf pas de rotation)

$$-N_1\, a(t) + N_2 \big(D(t) - a(t)\big) = 0$$

On obtient à nouveau puisque ce sont les mêmes équations qu'en 1) (si on avait travaillé par le th de la résultante cinétique et le théorème du moment cinétique – alors en G fixe –)

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{N_2(t)}{mg} = \dfrac{a(t)}{D(t)} \\[2ex] \dfrac{N_1(t)}{mg} = 1 - \dfrac{a(t)}{D(t)} \\[2ex] \text{avec } D(t) = D_0 - v_0 t \end{array}}$$

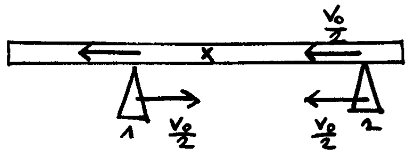
---

4) a) <u>si le glissement s'effectue sur 1 uniquement</u>

donc pas de glissement sur 2

$$\overrightarrow{v}_{\text{poutre}} = \overrightarrow{v}_{\text{support 2}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \overrightarrow{v}_{\text{poutre}} = -\dfrac{v_0}{2}\,\overrightarrow{u_x} \\ \text{indépendant du temps} \end{array}}$$



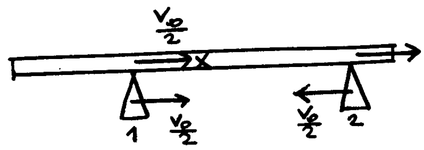
(la vitesse de glissement de poutre/1 vaut alors $-v_0\overrightarrow{u_x}$)

b) si le glissement s'effectue sur 2 uniquement

pas de glissement sur 1

$$\vec{v}_{poutre} = \vec{v}_{support\,1}$$

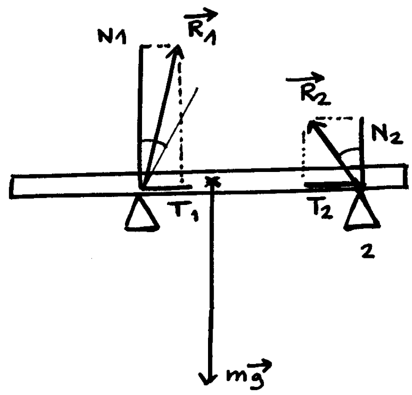
$$\boxed{\vec{v}_{poutre} = \frac{v_0}{2}\,\vec{u}_x \quad \text{indépendant du temps}}$$



(la vitesse de glissement de poutre/2 vaut alors $v_0\,\vec{u}_x$)

---

5) (dessin en supposant glissement sur 2).



Théorème de la résultante cinétique à la poutre :

$$\vec{R_1} + \vec{R_2} + m\vec{g} = m\underbrace{\vec{a}}_{\text{nul}}$$

nul (on a vu que la vitesse de la poutre est cste : $\pm\frac{v_0}{2}\vec{u}_x$)

$$/\vec{u}_x \quad \boxed{T_1(t) + T_2(t) = 0}$$

---

6) On a vu (en $t=0$) $|T_1| = |T_2|$ cf 5)

$N_1 > N_2$ cf 2)

$$\boxed{\left|\frac{T_1}{N_1}\right| < \left|\frac{T_2}{N_2}\right|}$$

Donc $\left|\frac{T_2}{N_2}\right|$ étant supérieur, c'est lui qui atteint le coefficient de frottement et le glissement s'effectue sur 2

---

7) La vitesse de glissement de la poutre / support 2 vaut $v_0 \vec{u_x}$ (vu en 4)

Dans ce cas T_2 étant opposé au glissement, T_2 est négatif (voir dessin en 5)

or

$$\left|\frac{T_2}{N_2}\right| = \mu_c$$

$$\frac{T_2(t)}{mg} = -\mu_c \frac{a(t)}{D(t)}$$

Puisque en 1, il n'y a pas glissement, $a(t)$ reste égal à a_0

$$\boxed{\frac{T_2(t)}{mg} = -\mu_c \frac{a_0}{D_0 - v_0 t}}$$

$$\boxed{\frac{T_1(t)}{mg} = +\mu_c \frac{a_0}{D_0 - v_0 t}}$$

---

8) Dans cette première phase, I_1G reste égal à a_0
I_2G diminue

Au fur et à mesure que ce mouvement se produit N_1 diminue et N_2 augmente

Au fur et à mesure que I_2G se rapproche de a_0, la situation tend vers la symétrie. $\vec{R_1}$ se rapproche du cône de frottement. On peut s'attendre au glissement lorsque $D(t) = 2a_0$ ou $\frac{a_0}{D(t)} = \frac{1}{2}$

En fait le résultat est légèrement différent puisque en 1 on part d'une situation de non glissement et puisque $\mu_s \neq \mu_c$. Il n'y a pas véritablement symétrie.

Il n'y a pas glissement sur 1 tant que :

$$\left|\frac{T_1}{N_1}\right| \leqslant \mu_s$$

$$\frac{\mu_c \dfrac{a_0}{D(t)}}{1 - \dfrac{a_0}{D(t)}} \leqslant \mu_s$$

$$\frac{a_0}{D(t)} \leqslant \frac{\dfrac{\mu_s}{\mu_c}}{1 + \dfrac{\mu_s}{\mu_c}}$$

finalement $\boxed{D(t_1) = \left(1 + \frac{\mu_c}{\mu_s}\right) a_0 \text{ ou } D_0 - v_0 t_1}$

(on obtient $D(t_1) < 2a_0$)

---

9) → A l'instant t_1^-, la poutre a une vitesse $\frac{v_0}{2}\overrightarrow{u_x}$ cette vitesse est <u>continue</u>. Donc puisque le support 2 garde une vitesse $-\frac{v_0}{2}\overrightarrow{u_x}$ il y a nécessairement glissement sur 2 en t_1^+

→ Il y aussi glissement sur 1 puisque l'on vient de voir que <u>la relation de non glissement n'est plus vérifiée</u>.

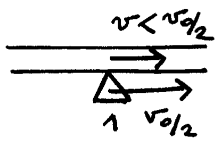
---

10) Au départ de cette phase en t_1^+ :

- vitesse de glissement de poutre sur 2 : $v_0 \overrightarrow{u_x}$
  donc <u>T_2 est négatif</u>
- vitesse de glissement de poutre sur 1 : inconnue

• <u>Si on suppose</u> cette vitesse <u>positive</u> selon x, on aura T_1 négatif donc $T_1 + T_2$ négatif

$$v_{poutre} \text{ diminue } < \frac{v_0}{2}$$



} incohérent (la vitesse de glissement serait <u>négative</u>)

• on suppose donc $T_1 > 0$
(comme dans la première phase d'ailleurs)

donc :

$$
\begin{array}{rcl}
T_2 & = & -\mu_c N_2 \\
T_1 & = & +\mu_c N_1 \\
\hline
T_1 + T_2 & = & \mu_c \,(N_1 - N_2)
\end{array}
$$

$$\boxed{\frac{T_1+T_2}{mg} = \mu_c \left(1 - \frac{2a(t)}{D(t)}\right)}$$

Au début de cette phase en t_1^+

$$a(t_1) = a_0$$

$$D(t_1) = \left(1 + \frac{\mu_c}{\mu_s}\right) a_0$$

$$\frac{2a}{D}(t_1) = \frac{2}{1+\frac{\mu_c}{\mu_s}} > 1$$

$$\boxed{T_1 + T_2 < 0}$$

ce qui est cohérent avec l'hypothèse $v_{\substack{\text{glissement} \\ \text{poutre}/1}} < 0$
(à cause de la décélération)

---

11) L'accélération de la poutre est donnée par

$$\frac{dv}{dt} = \frac{T_1+T_2}{m} < 0$$

La vitesse de la poutre qui valait au départ de cette phase $\vec{v} = \frac{v_0}{2}\vec{u_x}$ diminue.

Il y a fin de la phase de glissement sur les deux supports si la vitesse de glissement par rapport au support 1 ou par rapport au support 2 s'annule.

→ <u>si le glissement s'annule par rapport à 1</u>

la vitesse de la poutre vient d'atteindre la vitesse $\frac{v_0}{2}\vec{u_x}$
<u>Impossible</u> puisque l'accélération étant négative $v < \frac{v_0}{2}$
(vitesse de départ)

→ si le glissement s'annule par rapport à 2

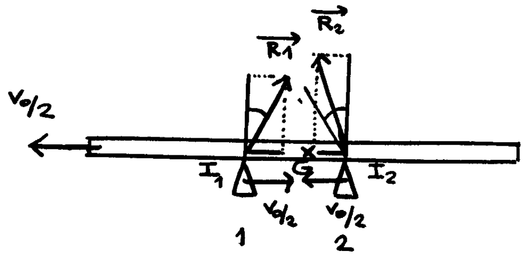
la vitesse de la poutre vient d'atteindre la vitesse $-\frac{v_0}{2}\overrightarrow{u_x}$ ce qui est possible. Au cours de cette deuxième phase, la vitesse de la poutre sera passée de $\frac{v_0}{2}\overrightarrow{u_x}$ à $-\frac{v_0}{2}\overrightarrow{u_x}$

$$\boxed{\text{Le glissement cesse sur 2 en } t'_1 \text{ avec } v(t'_1) = -\frac{v_0}{2}}$$

---

12) La poutre glisse sur 1 et ne glisse pas sur 2 au cours de la troisième phase.

C'est la situation symétrique de la première phase.



on va donc trouver cf 8) en inversant $(GI_1 \to GI_2)$

$$D(t_2) = \left(1+\frac{\mu_c}{\mu_s}\right)(GI_2)_{\text{début de cette 3}^e\text{ phase}}$$

$$\boxed{D(t_2) = \left(1+\frac{\mu_c}{\mu_s}\right)\left[D(t'_1) - a(t'_1)\right]}$$

---

13) On néglige les distances parcourues pendant la phase transitoire

donc :

$$D(t'_1) = D(t_1) = \left(1+\frac{\mu_c}{\mu_s}\right)a_0$$

$$a(t'_1) = a(t_1) = a_0$$

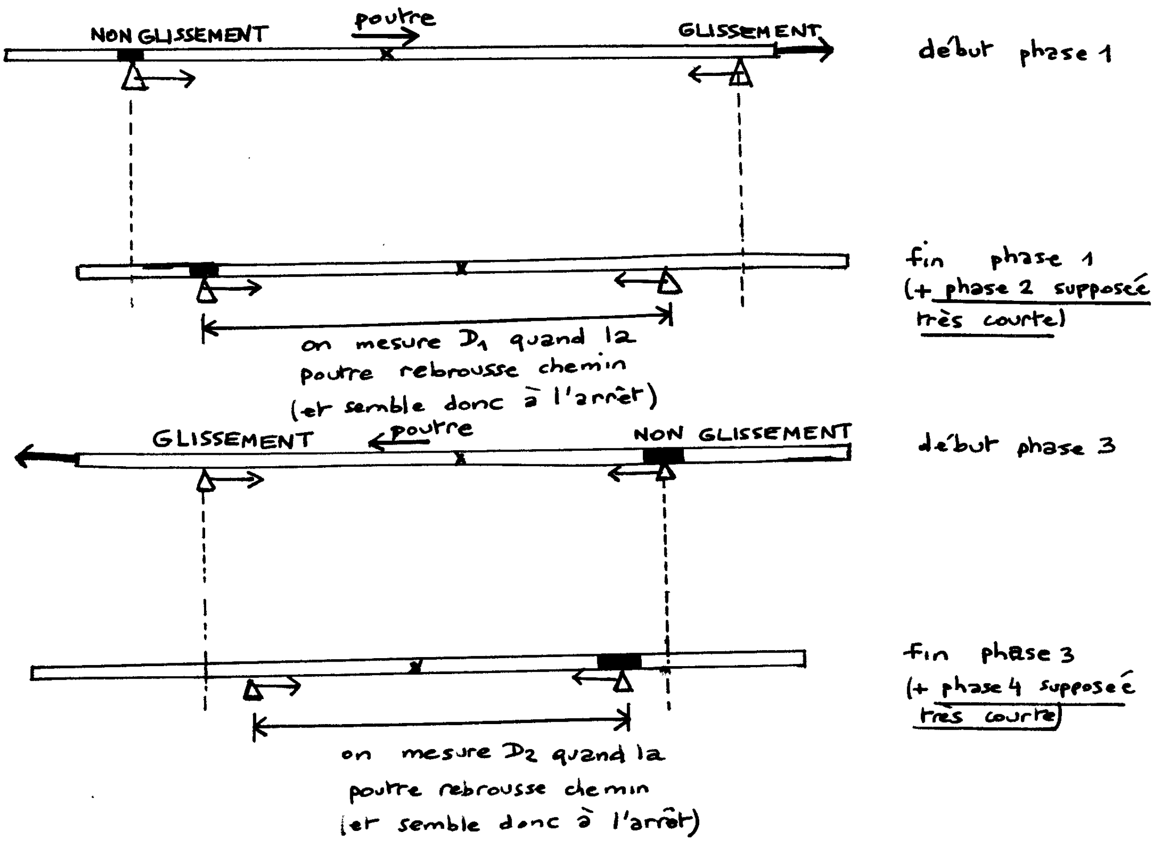
$$\left[D(t'_1) - a(t'_1)\right] = \frac{\mu_c}{\mu_s}a_0$$

finalement

$$D(t_2) = \underbrace{\left(1+\frac{\mu_c}{\mu_s}\right)a_0}_{D(t_1)}\frac{\mu_c}{\mu_s}$$

$$\boxed{D(t_2) = D(t_1)\,\frac{\mu_c}{\mu_s}}$$

La manipulation :



... puis nouvelle phase 1 ... etc

(Ex sur cette figure, on aurait $\frac{\mu_c}{\mu_s} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{4,7}{5,9} = 0,80$)

Champ électromagnétique dans un condensateur plan cylindrique

1) On utilise l'équation de Maxwell-Ampère

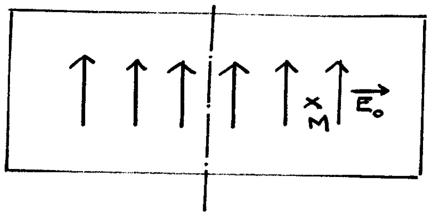
$$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B_1} = \cancel{\mu_0 \vec{j}} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{E_0}}{\partial t}$$

$\vec{j}$ nul dans le vide

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\ \underline{\overrightarrow{B_1}} = \frac{1}{c^2} i\omega \underline{\overrightarrow{E_0}}}$$

---

2)



Tout plan contenant Oz est plan de symétrie

Donc $\overrightarrow{B_1}(M)$ est perpendiculaire au plan de symétrie

$$\boxed{\underset{(M,t)}{\overrightarrow{B_1}} = B_1(\rho, \cancel{z}, t)\ \overrightarrow{u_\theta}}$$

cf $\underline{\overrightarrow{E_0}}$ indépendant de z

---

3) En partant de

$$\overrightarrow{rot}\ \underline{\overrightarrow{B_1}} = \frac{1}{c^2} i\omega \underline{\overrightarrow{E_0}}$$

on retrouve le théorème d'Ampère (généralisé) dans ce cas

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{rot}\ \underline{\overrightarrow{B_1}}\ \overrightarrow{dS} = \frac{1}{c^2} i\omega \iint_{S_1} \underline{\overrightarrow{E_0}}\ \overrightarrow{dS} \quad \text{(th de Stokes)}$$

$$\boxed{\oint_{C_1} \underline{\overrightarrow{B_1}}\ \overrightarrow{dl} = \frac{i\omega}{c^2} \phi_{\underline{\overrightarrow{E_0}}}}$$

$$\underline{B_1}\ 2\pi\rho = \frac{i\omega}{c^2} \underline{E_0}\ \pi\rho^2$$

$$\underline{\overrightarrow{B_1}} = \frac{i\omega\rho}{2c^2} \underline{E_0}\ \overrightarrow{u_\theta}$$

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{B_1}} = \frac{iX}{c} \underline{E_0}_{(t)}\ \overrightarrow{u_\theta}}$$

avec

$$X = \frac{\omega\rho}{2c}$$

$$[X] = \frac{T^{-1} L}{L . T^{-1}}$$

$$\boxed{X \text{ est une grandeur sans dimension}}$$

---

4) On utilise l'équation de Maxwell - Faraday

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E_2} = -\frac{\partial \overrightarrow{B_1}}{\partial t}$$

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\underline{\overrightarrow{E_2}} = -i\omega\,\underline{\overrightarrow{B_1}}}$$

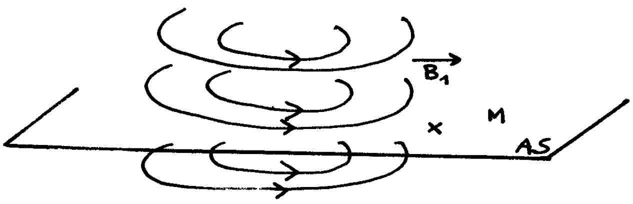
$$= -i\omega\,\frac{i\,X}{c}\,\underline{E_0}(t)\,\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\underline{\overrightarrow{E_2}} = \frac{\omega\,X}{c}\,\underline{E_0}(t)\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

---

5) La source de $\overrightarrow{E_2}$ c'est $\overrightarrow{B_1}$

Ce champ $\overrightarrow{B_1}$ ne dépend que de ρ et t (et finalement n'est pas fonction de z si ce n'est par le fait que le champ est limité pour z entre 0 et h)



un plan horizontal, contenant M, par rapport auquel $\overrightarrow{B_1}$ est symétrique, est donc un plan d'antisymétrie

(on considère ici qu'il n'y a pas d'effets de "bords" selon z)

$\overrightarrow{E_2}(M)$ est donc perpendiculaire au plan d'antisymétrie

$$\boxed{\overrightarrow{E_2}(M,t) = E_2(\rho,t)\,\overrightarrow{u_z}}$$

---

6) On retrouve la loi de Faraday à partir de 4)

$$\iint \overrightarrow{rot}\,\underline{\overrightarrow{E_2}}\,\overrightarrow{dS} = -i\omega \iint \underline{\overrightarrow{B_1}}\,\overrightarrow{dS} \qquad (\text{th de Stokes})$$

$$\oint_{C_2} \underline{\overrightarrow{E_2}}\,\overrightarrow{dl} = -i\omega\,\underline{\phi}_{\overrightarrow{B_1}}$$

$$= -i\omega\,\frac{i}{c}\,\underline{E_0}(t)\,\phi_{(X\overrightarrow{u_\theta})}$$

$$\boxed{\oint_{C_2} \underline{\overrightarrow{E_2}}\,\overrightarrow{dl} = \frac{\omega}{c}\,\underline{E_0}(t) \iint_{S_2} X\,\overrightarrow{u_\theta}\,\overrightarrow{dS}}$$

ce qui donne

$$\underline{E}_2(\rho_1,t)\,a - \underline{E}_2(\rho_2,t) = \frac{\omega}{c}\underline{E}_0(t)\underbrace{\iint_{S_2} X\,d\rho\,dz}_{\frac{2c}{\omega}\iint X\,dX\,dz}$$

$$= 2\,\underline{E}_0(t)\,a\left(\frac{X_2^2}{2}-\frac{X_1^2}{2}\right)$$

$$\boxed{\underline{E}_2(\rho_1,t) - \underline{E}_2(\rho_2,t) = \underline{E}_0(t)\,(X_2^2-X_1^2)}$$

On fait alors $\left|\begin{array}{l}\rho_1=0 \quad \text{avec } \underline{E}_2(\rho=0,t)=0\\ \rho_2=\rho \quad (X_2=X)\end{array}\right.$

$$0 - \underline{E}_2(\rho,t) = \underline{E}_0(t)\,X^2$$

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{E}_2}(\rho,t) = -X^2\,\underline{E}_0(t)\,\overrightarrow{u_z}}$$

---

7)

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{\underline{B}}_{BF} &= \frac{iX}{c}\,\underline{E}_0(t)\,\overrightarrow{u_\theta}\\ \overrightarrow{\underline{E}}_{BF} &= (1-X^2)\,\underline{E}_0(t)\,\overrightarrow{u_z}\end{aligned}}$$

---

8) on travaille en réels (à l'ordre 2 en X)

$$\overrightarrow{B}_{BF} = -\frac{X}{c}\,e_0\sin\omega t\,\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{E}_{BF} = (1-X^2)\,e_0\cos\omega t\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{BF}^2$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\,(1-X^2+\ldots)^2\,e_0^2\cos^2\omega t$$

$$\boxed{\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,(1-2X^2)\,e_0^2\cos^2\omega t}$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\frac{B_{BF}^2}{\mu_0}$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\frac{X^2}{c^2}\,e_0^2\sin^2\omega t$$

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,X^2\,e_0^2\sin^2\omega t}$$

---

9)

$$\frac{\langle \mathcal{E}_m \rangle}{\langle \mathcal{E}_e \rangle} = \frac{\frac{1}{2}\,\varepsilon_0 X^2 e_0^2\ \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\,\varepsilon_0 (1-2X^2)\, e_0^2\ \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\frac{\langle \mathcal{E}_m \rangle}{\langle \mathcal{E}_e \rangle} = \frac{X^2}{1-2X^2}} \quad (\text{avec } X \ll 1)$$

$$\simeq X^2\,(1+2X^2)$$

$$\boxed{\frac{\langle \mathcal{E}_m \rangle}{\langle \mathcal{E}_e \rangle} = X^2 \quad (\text{à l'ordre } 2)}$$

$$\ll 1$$

L'energie magnétique est négligeable dans le condensateur par rapport à l'énergie électrique

---

10)

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$= \frac{X(1-X^2)}{\mu_0 c}\, e_0^2 \sin\omega t \cos\omega t\ \vec{u_\rho}$$

A l'ordre 2 toujours :

$$\boxed{\vec{\Pi} = \varepsilon_0 c X\, e_0^2 \sin\omega t \cos\omega t\ \vec{u_\rho}}$$

L'échange de puissance est donné à travers $\vec{dS}$ par :

$$dP = \vec{\Pi}\,\vec{dS}$$

il est nul si $\vec{dS}$ selon $\vec{u_z}$ (ou $\vec{u_\theta}$)

Par contre si $\vec{dS}$ selon $\vec{u_\rho}$

$$\boxed{dP = \Pi\, dS \quad \text{non nul.}}$$

Les échanges se limitent à la surface latérale.

---

11) Puissance sortant du condensateur

$$P = \iint_{\text{surface laterale}} \Pi\, dS$$

$$= \varepsilon_0 c X_{(\rho=R)}\, e_0^2 \sin\omega t \cos\omega t \quad 2\pi R h$$

$$\boxed{P = \varepsilon_0\, \omega\, \underbrace{\pi R^2 h}_{\text{Volume}}\ e_0^2 \sin\omega t \cos\omega t}$$

remarque :

on remarque que :

$$\frac{dU_e}{dt} = -P$$

(la dérivée de l'énergie électrique dans le condensateur est égale à la puissance rayonnée entrante)

avec $U_e = \iiint_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2\omega t \quad \pi R^2 h$$

(toujours au deuxième ordre en X, donc en R^2 ici)

et $\boxed{\langle P(t)\rangle = 0}$

puisque $\langle \sin\omega t \cos\omega t\rangle = \frac{1}{2}\langle \sin 2\omega t\rangle = 0$

En régime sinusoïdal, le condensateur reçoit de l'énergie pendant une demi-période et la restitue entièrement pendant la demi-période suivante.

<u>C'est un élément réactif ne consommant pas d'énergie.</u>

(s'il possédait une résistance, il serait dissipatif et l'on aurait

$(\langle P_{sortant}\rangle) < 0$ ou $(\langle P_{entrant}\rangle) > 0$)

---

12) $\vec{B_3}$ est créé par les variations de $\vec{E_2}$ axial.

On retrouve le même problème qu'en 2) avec $\vec{B_1}$ créé par $\vec{E_0}$:

$$\boxed{\vec{B_3} \text{ est donc orthoradial}}$$

---

13) cf 3)

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\, \underline{\vec{B_3}} = \frac{1}{c^2} i\omega \underline{\vec{E_2}}}$$

$$\oint_{C_1} \underline{\vec{B_3}}\, \vec{dl} = \frac{i\omega}{c^2}\iint_{S_1} \underline{\vec{E_2}}\, \vec{dS}$$

$$\underline{B}_3 = \frac{i\omega}{2\pi\rho c^2} \iint_{S_1} \overrightarrow{\underline{E}_2}\, \overrightarrow{dS}$$

$$= \frac{i\omega}{2\pi\rho c^2} \iint_{S_1} -X^2\, \underline{E}_0\, \underbrace{\rho' d\rho'}_{\left(\frac{2c}{\omega}\right)^2 X' dX'} d\theta$$

$$= -\frac{4\, i\, \underline{E}_0}{\rho\omega} \int_0^X X'^3\, dX'$$

$$= -4\, i\, \frac{1}{2cX}\, \underline{E}_0\, \frac{X^4}{4}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{B}_3} = -\frac{i\, X^3}{2c}\, \underline{E}_0\, \overrightarrow{u_\theta}}$$

---

14) $\overrightarrow{\underline{E}_4}$ se calcule à partir de $\underline{B}_3$ comme $\overrightarrow{\underline{E}_2}$ à partir de $\underline{B}_1$

$$\oint_{C_2} \overrightarrow{\underline{E}_4}\, \overrightarrow{dl} = -i\omega\, \phi_{\overrightarrow{\underline{B}_3}}$$

$$= -i\omega \times -\frac{i}{2c}\, \underline{E}_0 \underbrace{\iint_{S_2} X'^3\, \overrightarrow{u_\theta}\, \overrightarrow{dS}}_{\frac{2c}{\omega}\iint X'^3\, dX'\, dz}$$

$$-\underline{E}_4(\rho, t)\, a = -\underline{E}_0\, a\, \frac{X^4}{4}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{E}_4} = \frac{X^4}{4}\, \underline{E}_0(t)\, \overrightarrow{u_z}}$$

---

15) On admet

$$\underset{\text{terme } n}{\overrightarrow{\underline{E}_{2n}}} = \frac{1}{(n!)^2} (-1)^n X^{2n}\, \overrightarrow{\underline{E}_0}(t)$$

or pour le terme en z^{2k} dans $J_0(z)$ on a :

$$\underset{\text{terme } k}{J_0(z)} = \frac{1}{(k!)^2} (-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

on a donc $z = 2X$

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = \overrightarrow{\underline{E}_0}(t)\; J_0\!\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)}$$

---

16) Pour $\rho = R$, le champ peut s'annuler si (cf graphe)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\omega R}{c} &= 2{,}40 \\ \text{ou}\quad & 5{,}52 \\ \text{ou}\quad & 8{,}65 \\ \text{ou}\quad & 11{,}80 \;\ldots \text{etc} \end{aligned}}$$

---

17) Il doit y avoir continuité du champ $\vec{E}$ tangentiel

Il doit y avoir continuité du champ $\vec{B}$ normal

Dans la feuille d'aluminium $\vec{E}(t)$ et $\vec{B}(t)$ sont nuls.

Le champ magnétique étant tangentiel, cela n'apporte pas de conditions.

Le champ $\vec{E}$ dans le condensateur est tangentiel à la paroi.

Il doit s'annuler en $r = R$.

---

18) les pulsations possibles sont celles obtenues en 15)

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega = 2{,}40 \, \frac{c}{R} \\ \text{ou} \quad 5{,}52 \, \frac{c}{R} \\ \text{ou} \quad 8{,}65 \, \frac{c}{R} \\ \text{ou} \quad 11{,}80 \, \frac{c}{R} \end{array}}$$

---

19) Pour les pulsations précédentes, il y aura donc

$$\boxed{\text{phénomène de résonance}}$$

---

20) A.N.

$$\omega_1 = 2{,}40 \, \frac{c}{R}$$

$$\boxed{f_1 = \frac{2{,}40}{2\pi} \, \frac{c}{R}}$$

$$= \frac{2{,}40}{2.\pi} \, \frac{3.10^8}{0{,}04}$$

$$= 2{,}87 \; 10^9 \text{ Hz}$$

$$\boxed{f_1 = 2{,}87 \text{ GHz}}$$
