DNS

Sujet

Roues de bicyclette

Le but de ce problème est d'expliquer le rôle des roues d'une bicyclette au travers de l'étude des mouvements de différents systèmes matériels.

I. Calculs d'énergie cinétique.

Exprimer l'énergie cinétique des trois systèmes matériels suivants:

1. Le système $S1$ est un solide en translation de masse M et de vitesse v .

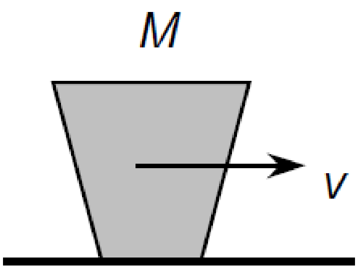


Figure 1 : Solide de masse M et de vitesse v en translation.

2. Le système $S2$ est un cercle de rayon R , de masse m uniformément répartie sur le cercle. Ce cercle est animé d'une vitesse angulaire ω autour de son axe de révolution (Δ) , cet axe (Δ) possède la vitesse v parallèle au plan du cercle.

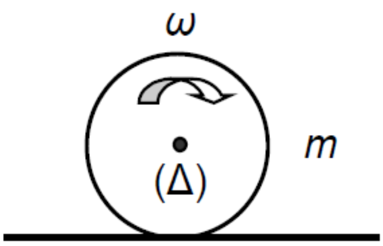


Figure 2 : Solide de masse m en rotation à la vitesse angulaire ω autour d'un axe (Δ) .

3. Le système $S3$ est une bicyclette. L'ensemble {cadre + cycliste} de masse M est en translation de vitesse v . Chacune des roues a pour rayon R , une masse m répartie sur la jante - donc modélisable par le système $S2$ - et possède la vitesse angulaire ω .

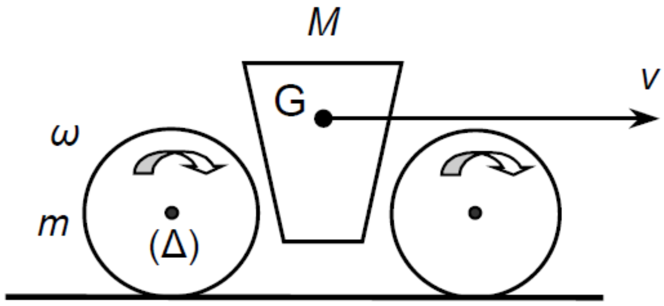


Figure 3 **:** Bicyclette en translation à la vitesse v .

II. Mouvements sur un plan horizontal.

4. Le système $S1$ repose sur le sol, le contact étant caractérisé par le coefficient de frottement de glissement f . $S1$ en mouvement de translation, a pour vitesse initiale $v0$. Établir la loi $v=f(t)$ de la vitesse v en fonction du temps t . Représentation graphique.

5. Le système $S2$ roule sans glisser sur le plan horizontal, le contact étant caractérisé par le même coefficient de frottement de glissement f . La vitesse initiale du centre d'inertie est $v0$. Établir la loi $v=g(t)$ de la vitesse v en fonction du temps t . Représentation graphique. On résoudra par deux méthodes:

   - soit par utilisation des théorèmes de la résultante cinétique et du moment cinétique
   - soit par approche énergétique en partant du théorème de la puissance cinétique et en justifiant avec précision chaque terme.

6. Le système $S3$ possède un mouvement dans lequel le mouvement des roues est un roulement sans glissement. L'ensemble {cadre + cycliste} possède la vitesse initiale $v0$ (le cycliste ni ne pédale ni ne freine). Établir la loi $v=h(t)$ de la vitesse v en fonction du temps t . Donner la représentation graphique.

III. Mouvements suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné (P).

Soit β l'angle formé par le plan horizontal et le plan (P) . Soit f le coefficient de frottement de glissement.

7. Le système $S1$ initialement au repos est susceptible d'acquérir un mouvement de translation, suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné (P) .

   - Exprimer, dans cette hypothèse, l'accélération aG de son centre d'inertie.
   - Montrer que le mouvement se produit pour des valeurs de β supérieures à une valeur limite $\beta 0$.

8. On considère le système $S2$ lâché sans vitesse initiale.

- La circonférence roule sans glisser. Exprimer l'accélération aG de son centre d'inertie.
- Quel est l'intervalle des valeurs de β ($\beta_1 < \beta < \beta_2$) pour lequel le mouvement avec roulement sans glissement est possible ? Pour $\beta > \beta 2$, il y a glissement de la circonférence sur le sol.
- Exprimer aG pour $\beta > \beta 2$.

9. On considère le système $S3$.

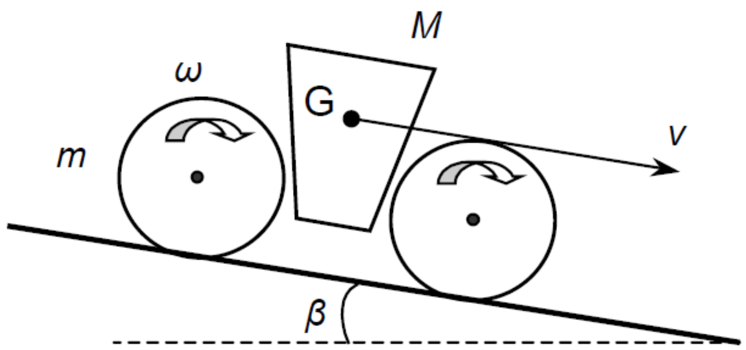


Figure 4 **:** Bicyclette suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné.

- La bicyclette roule sans glisser, sur les deux roues. Exprimer aG .
- La bicyclette roule avec glissement sur les deux roues. Exprimer aG.
- Pour $\beta < \beta 3$, il y a roulement sans glissement. Pour $\beta > \beta 3$, il y a glissement. Dans la mesure ou le cycliste ne pédale ni ne freine pas, les réactions du plan (P) sur les deux roues sont égales. Exprimer $\beta 3$.

IV. Conclusion.

10. Représenter sur un même graphique les trois fonctions $aG(\beta)$ pour chacun des trois systèmes matériels, β variant de 0 à $\pi/2$.

11. En déduire le rôle du rapport $2m/M$ pour une valeur de β donnée.

Réponses

1) S1 en translation

$$\boxed{E_{c_{S_1}} = \frac{1}{2} M v^2}$$

---

2) S2 est un cercle en rotation - translation.
On applique le théorème de König

$$E_{c_{S_2}} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \underbrace{E_c^*}_{\frac{1}{2} J_\Delta \omega^2}$$

avec $J_\Delta = mR^2$

$$\boxed{E_{c_{S_2}} = \frac{1}{2} m (v^2 + R^2\omega^2)}$$

---

3) S3 est une bicyclette

$$E_{c_{S_3}} = E_{c_{cadre}} + E_{c_{\substack{roue\\avant}}} + E_{c_{\substack{roue\\arrière}}}$$

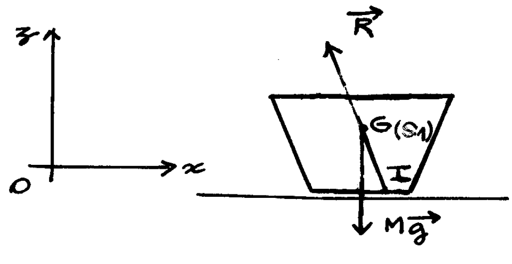
$$= E_{c_{cadre}} + 2\, E_{c_{roue}}$$

$$= \frac{1}{2} M v^2 + 2\ \frac{1}{2} m (v^2 + R^2\omega^2)$$

$$\boxed{E_{c_{S_3}} = \frac{1}{2}(M+2m)\, v^2 + m R^2 \omega^2}$$

---

4) Mouvement de glissement de S1



La réaction est ici une force répartie.
On a admis que cette répartition est réductible à une seule force $\vec{R}$ passant par G. La justification apparaît dans la suite.
Le point I doit appartenir à la base du solide. Si I arrive aux points extrêmes, il y aura basculement...

On applique le théorème de la résultante cinétique à S1

$$\vec{R} + M\vec{g} = M\,\vec{a_G}$$

$/Ox \quad R_x = M\dfrac{dv}{dt}$

$/Oz \quad R_z - Mg = 0$

La loi de Coulomb permet d'écrire si glissement :

$$\left|\frac{R_x}{R_z}\right| = f$$

$$R_x\, v < 0$$

donc ici :

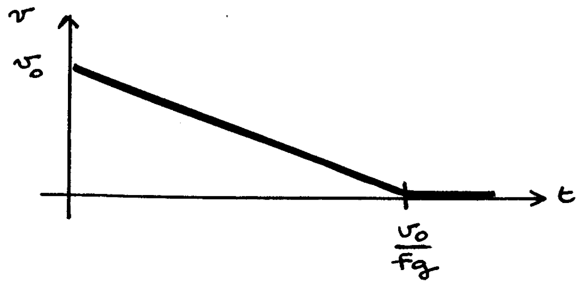
$v > 0 \;, \quad R_x < 0 \;,$ or $R_z = Mg$

$$\boxed{R_x = -\,f M g}$$

finalement :

$$\frac{dv}{dt} = -\,f g$$

$$\boxed{v = v_0 - f g t} \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq \frac{v_0}{fg}$$



remarque

Le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique permet d'écrire

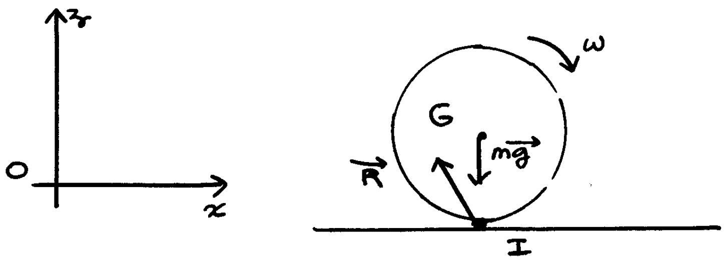
$$\underbrace{\vec{\mathcal{M}}_{M\vec{g}}(G)}_{\text{nul}} + \vec{\mathcal{M}}_{\vec{R}}(G) = \frac{d}{dt}\vec{\sigma}^*$$

$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}^*$: nul car translation

$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{R}}(G)$: donc nul

$\vec{R}$ passe par G

5) Mouvement de roulement sans glissement de S2



méthode 1

→ théorème de la résultante cinétique

$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}_G$$

$/Ox$ $\boxed{R_x = m\frac{dv}{dt}}$ (1)

$/Oz$ $\boxed{R_z - mg = 0}$ (2)

→ théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique en projection sur Oy

$$\mathcal{M}_{\vec{R}/Gy} = \frac{d}{dt}\sigma^*{}_y$$

$$-R_x\ R = \frac{d}{dt}(mR^2\omega)$$

$\boxed{R_x = -mR\frac{d\omega}{dt}}$ (3)

→ relation de non glissement

$\boxed{v = R\omega}$ (4)

→ Loi de Coulomb

$\boxed{\left|\frac{R_x}{R_z}\right| \leq f}$ (5)

de (1) on trouve $R_x = m\frac{dv}{dt}$

de (3) et (4) on trouve $R_x = -m\frac{dv}{dt}$

donc $\boxed{\frac{dv}{dt} = 0}$

$\boxed{R_x = 0}$

((5) est donc vérifié)

Finalement $\boxed{v = v_0}$

méthode 2

On écrit le théorème de la puissance cinétique pour S2

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{poids} + P_{réaction}$$

$$= m\vec{g}\,\underbrace{\vec{v}_{G_{S_2}}}_{\vec{v}} + \vec{R}\,\vec{v}_{I\in S_2}$$

or $m\vec{g} \perp \vec{v}$

or $\vec{v}_{I\in S_2} = \vec{0}$ car $\vec{v}_{glissement} = \vec{v}_{I\in S_2} - \underbrace{\vec{v}_{I\in plan}}_{nul}$

$$= 0$$

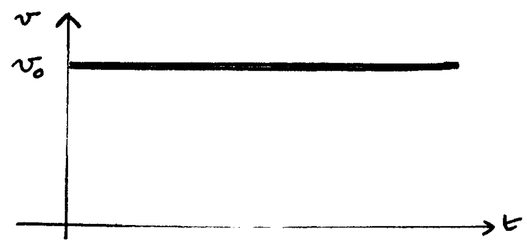
En présence de non glissement, l'énergie mécanique totale est conservée, donc ici l'énergie cinétique :

$$E_{C_{S_2}} = \frac{1}{2}\, m\,(v^2 + R^2\omega^2) \qquad \text{cf 2)}$$

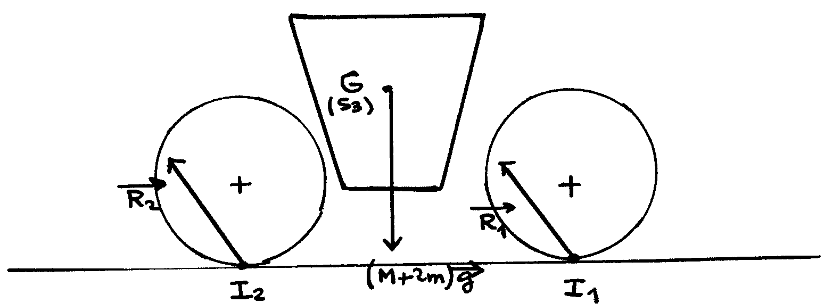
$$\boxed{E_{C_{S_2}} = m\,v^2} \qquad \text{cf non glissement}$$

$$= \text{constante}$$

$$\boxed{v = v_0}$$



6)



Ici aussi, il y a roulement sans glissement donc l'énergie est conservée. De plus à nouveau Ep étant une constante, on aura donc $E_c = cste$

cf : $\frac{dE_c}{dt} = (M+2m)\vec{g}.\vec{v}_{G_{S3}} + \vec{R_1}\,\vec{v}_{I_1 \in \text{roue avant}} + \vec{R_2}\,\vec{v}_{I_2 \in \text{roue arrière}}$

$= 0$

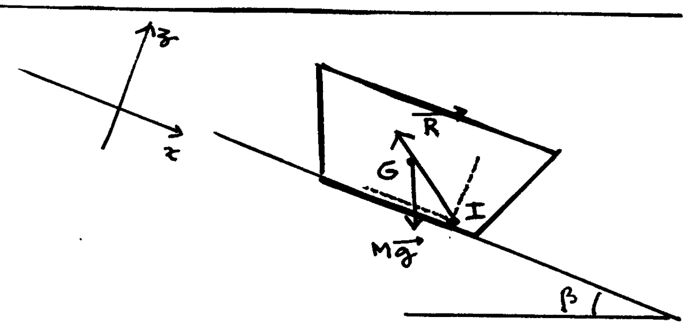
$E_{c_{S3}} = \frac{1}{2}(M+2m)v^2 + mR^2\omega^2$ cf 3)

$\boxed{E_{cS3} = \frac{1}{2}(M+4m)v^2}$ cf non glissement

$= constante$

$\boxed{v = v_0}$

7)



Supposons que S1 glisse. On applique le théorème de la résultante cinétique.

$$\vec{R} + M\vec{g} = M\vec{a}$$

$/ox \quad R_x + Mg\sin\beta = M\frac{dv}{dt}$

$/oz \quad R_z - Mg\cos\beta = 0$

et la loi de Coulomb :

$$\left|\frac{R_x}{R_z}\right| = f$$

$$R_x\, v < 0$$

donc ici

$v > 0, \quad R_x < 0 \quad$, or $R_z = Mg\cos\beta$

$$R_x = -f\, Mg\cos\beta$$

donc $\boxed{\dfrac{dv}{dt} = g(\sin\beta - f\cos\beta)}$

Au départ, la vitesse est nulle. Le mouvement a lieu si

$\dfrac{dv}{dt} > 0$ soit

$\sin\beta - f\cos\beta > 0$

$$\boxed{\tan\beta > f}$$

ou $\beta > \beta_0$ avec $\tan\beta_0 = f$

remarque

On peut obtenir l'accélération par le théorème de la puissance cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{poids} + P_{réaction}$$
$$= M\vec{g}\cdot\vec{v} + \vec{R}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Mv^2\right) = Mgv\sin\beta + (-fMg\cos\beta)\,v$$

$$\cancel{M}\cancel{v}\frac{dv}{dt} = \cancel{M}g\cancel{v}(\sin\beta - f\cos\beta)$$

8) a) S_2 roule sans glisser. On travaille en utilisant la conservation de l'énergie :

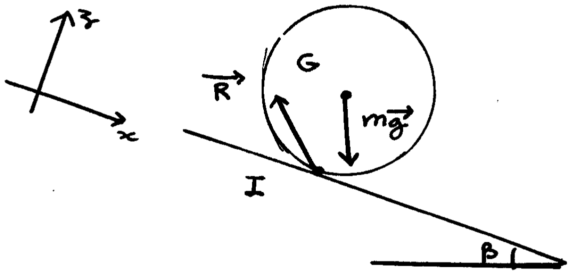
$$E_{c\,S_2} + E_{P\,poids} = E \text{ (constante)}$$
$$mv^2 - mgx\sin\beta = E$$

on dérive par rapport au temps :

$$mv\left(2\frac{dv}{dt} - g\sin\beta\right) = 0$$

$$\boxed{a_G = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}g\sin\beta}$$

8) b) On vérifie la cohérence avec l'hypothèse du non glissement.



th de la résultante cinétique :

$$R_x = m\left(\frac{dv}{dt} - g\sin\beta\right) = -\frac{m}{2}\,g\sin\beta$$

$$R_z = mg\cos\beta$$

Loi de Coulomb (non glissement)

$$\left|\frac{R_x}{R_z}\right| \leq f$$

$$\frac{1}{2}\tan\beta \leqslant f$$

$$\boxed{\tan\beta \leqslant 2f}$$

ou $\beta \leqslant \beta_2$ avec $\tan\beta_2 = 2f$

De plus, il y a mouvement, S2 étant initialement au repos si

$$\frac{dv}{dt} > 0 \text{ soit}$$

$$\frac{1}{2}g\sin\beta > 0$$

$$\boxed{\beta > 0}$$

8) c) Pour $\beta > \beta_2$ il y a glissement

Le théorème de la résultante cinétique et la loi de Coulomb donnent le même résultat que pour S1 (cf 7))

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g(\sin\beta - f\cos\beta)}$$

9) a) Si la bicyclette roule sans glisser, il y a conservation de l'énergie mécanique

$$Ec_{S3} + Ep_{poids} = E \text{ (cste)}$$

$$\frac{1}{2}(M+4m)v^2 - (M+2m)g\,x\sin\beta = E$$

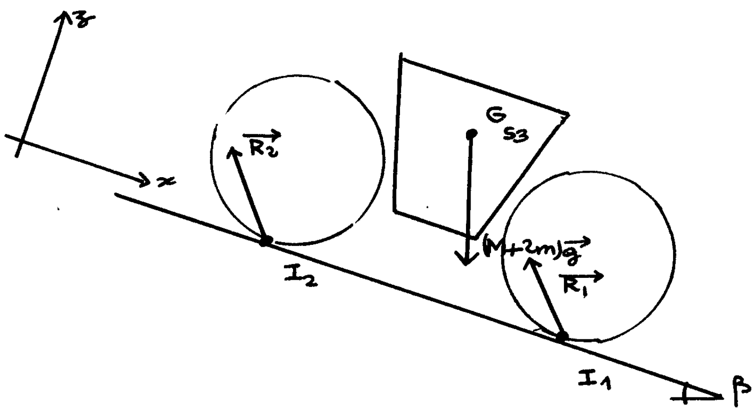
on dérive par rapport au temps :

$$v\left((M+4m)\frac{dv}{dt} - (M+2m)g\sin\beta\right) = 0$$

$$\boxed{a_G = \frac{dv}{dt} = \frac{M+2m}{M+4m}\,g\sin\beta}$$

---

9 b) Si la bicyclette glisse sur les deux roues



Théorème de la résultante cinétique à l'ensemble S3

$$(M+2m)\vec{g} + \vec{R_1} + \vec{R_2} = (M+2m)\vec{a_G}$$

$$/x \quad (M+2m)g\sin\beta + R_{1x} + R_{2x} = (M+2m)\frac{dv}{dt}$$

$$/z \quad -(M+2m)g\cos\beta + R_{1z} + R_{2z} = 0$$

Loi de Coulomb (la vitesse de glissement des roues est supposée vers le bas)

$$\left.\begin{aligned} R_{1x} &= -f R_{1z} \\ R_{2x} &= -f R_{2z} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} R_{1x}+R_{2x} &= -f(R_{1z}+R_{2z}) \\ &= -f(M+2m)g\cos\beta \end{aligned}$$

finalement $\boxed{a_G = \frac{dv}{dt} = g(\sin\beta - f\cos\beta)}$ cf 7) et 8 c)

9c) trois méthodes pour obtenir β_3.

→ soit en étudiant le non glissement

$$\boxed{\left|\frac{R_x}{R_z}\right| < f}$$

avec (cf th de la résultante cinétique écrit en 9b) :

$$2R_x = (M+2m)\frac{dv}{dt} - (M+2m)\, g \sin\beta$$

$$2R_x = (M+2m)\, g \sin\beta \left[\frac{-2m}{M+4m}\right]$$

$$2R_z = (M+2m)\, g \cos\beta$$

donc, on doit vérifier

$$\tan\beta \, \frac{2m}{M+4m} < f$$

$$\boxed{\tan\beta < \underbrace{\left(\frac{M}{2m}+2\right) f}_{\tan\beta_3}}$$

→ soit en étudiant le glissement

On doit vérifier que la vitesse de glissement est bien dirigée vers le bas comme supposé plus haut :

soit $\boxed{v_{glissement} = v - R\omega > 0}$

avec :

$$v = g(\sin\beta - f\cos\beta)\, t$$

et pour trouver ω, on applique le théorème du moment cinétique à la roue 1 dans le référentiel barycentrique de la roue. La liaison avec l'axe étant supposé parfaite, on aura selon y

$$-R_x R = J\frac{d\omega}{dt}$$

$$= mR^2 \frac{d\omega}{dt}$$

$$R_x = -mR\frac{d\omega}{dt}$$

↓ vu en 9b)

$$\frac{1}{2}(M+2m)\left[\frac{dv}{dt} - g\sin\beta\right]$$

$$= -\frac{1}{2}(M+2m)\, f g \cos\beta$$

$$R\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{M+2m}{m}\right) g f \cos\beta \; t$$

on doit vérifier

$$v_{\text{glissement}} = g\left(\sin\beta - \frac{M+4m}{2m}\cos\beta\right) t > 0$$

$$\boxed{\tan\beta > \underbrace{\left(\frac{M}{2m}+2\right) f}_{\tan\beta_3}}$$

→ soit en sachant que les deux cas se racordent pour β_3 donc en β_3

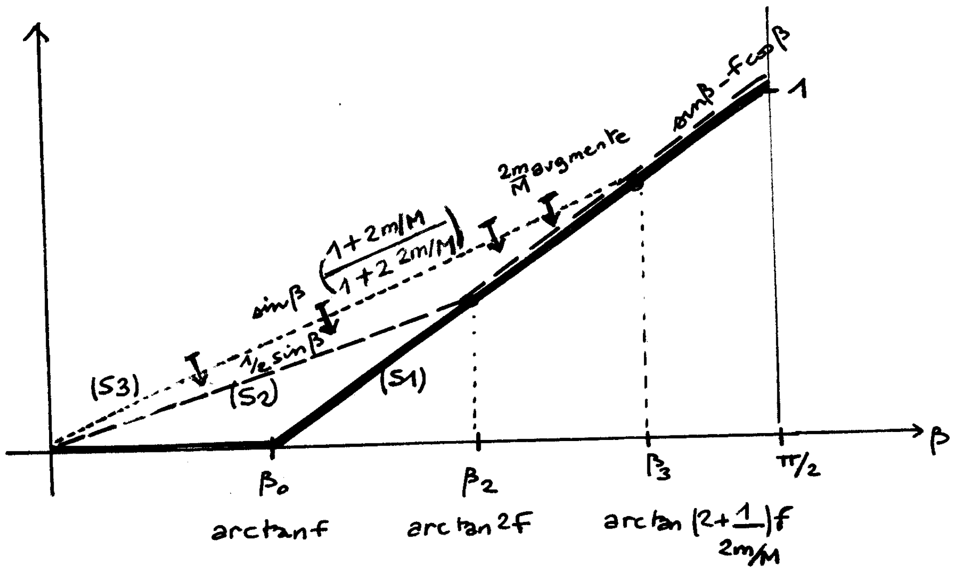
$$a_{G\,\text{non glissement}} = a_{G\,\text{glissement}}$$

$$\frac{M+2m}{M+4m}\, g \sin\beta_3 = g\left(\sin\beta_3 - f\cos\beta_3\right)$$

d'où $\boxed{\tan\beta_3 = \left(\frac{M}{2m}+2\right) f}$

---

10)



→ Si $\frac{2m}{M}$ augmente, l'accélération passe de $g\sin\beta$ à $\frac{g\sin\beta}{2}$ (cas d'une roue seule) si on se trouve dans la région de non glissement.

→ La plage de non glissement diminue, si $\frac{2m}{M}$ augmente, de β_3 à β_2

→ Il y a intérêt à ce que $2m/M$ soit le plus petit possible.
