DNS

Sujet

Oscillations

On étudie ici des mouvements d’oscillation.

Le référentiel du laboratoire $\mathscr{R}$ est supposé galiléen, on lui associe le repère d'espace $O'xyz$. L'axe $O'y$ est vertical, dirigé vers le haut. Les vecteurs unitaires des axes sont: ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$), voir *figures* . L'accélération due à la pesanteur est de norme g .

I. Oscillations d'une tige dans le champ de pesanteur

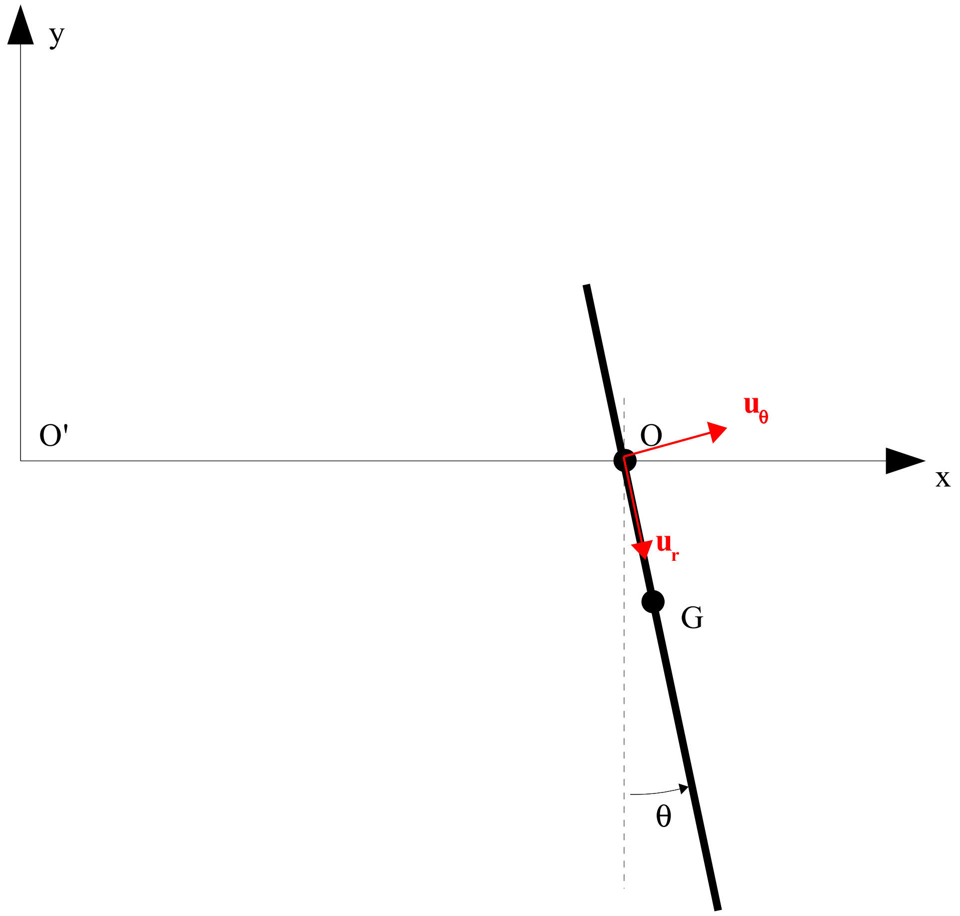
On considère une tige homogène de section négligeable, de masse M , de longueur L et de centre d'inertie G . La tige oscille autour d'un axe Oz horizontal et fixe. Le point O de la tige est placé au dessus de G tel que $OG=a$. La position de la tige est repérée par l'angle $\theta(t)$. Le moment d'inertie de la tige par rapport à un axe Gz est $I_{Gz}=\frac{1}{12}M L^2$.

A. Moments d'inertie

1. Justifier que le moment cinétique de la tige dans le référentiel barycentrique $\mathscr{R}^*$ associé à $\mathscr{R}$ est égal à $\vec{\sigma}^*=\frac{1}{12}M L^2\dot{\theta}\vec{u}_z$.
2. En utilisant le théorème de König pour le moment cinétique, déterminer le moment cinétique dans $\mathscr{R}$, en O , de la tige : $\vec{\sigma}(O)=I_{Oz}\vec{\omega}$. En déduire que le moment d'inertie de la tige par

rapport à l'axe Oz vaut $I_{Oz}=I_{Gz}+M\,a^2$ (cette formule constitue le théorème de Huygens).

3. Application: on veut $I_{Oz}=3/2\,M\,a^2$. Déterminer $\frac{a}{L}$. Cette valeur est adoptée dans la suite du problème.



B. Liaison parfaite

La liaison en O est supposée parfaite : la puissance totale des actions de liaison est donc nulle. Les actions de liaison ne dissipent pas d'énergie.

Les actions de contact dues à la liaison en O , sur la tige, sont modélisées par leur résultante : $\vec{R}_l$ (3 inconnues: R_X , R_Y et R_Z dans la base $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) et leur moment en O : $\vec{M}_l(O)$ (3 inconnues M_X , M_Y , M_Z dans la base $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) soit 6 inconnues a priori.

L'axe étant immobile, il n'y a pas ici à prendre en compte la puissance, évidemment nulle, des actions de liaison de la tige sur l'axe.

4. Rappeler la formule donnant la puissance exercée par une répartition de forces (ici les actions de liaison sur la tige) agissant sur un solide (ici la tige).

5. En appliquant la formule précédente pour les actions de liaison de l'axe sur la tige (utiliser le point O lié à la tige pour ce calcul) montrer que M_Z est nul pour cette liaison parfaite.

C. Théorème du moment cinétique

6. Appliquer le théorème du moment cinétique en O à la tige dans le référentiel $\mathscr{R}$.

7. Montrer que la projection sur l'axe de rotation donne l'équation différentielle du mouvement. Quels résultats les deux autres projections permettent-elles d'établir ici?

8. Combien d'inconnues restent alors à déterminer. Comment faudrait-il procéder pour obtenir leur expression ?

D. Conservation de l'énergie

On se propose de retrouver l'équation différentielle du mouvement par une méthode énergétique.

9. Justifier le fait que l'énergie totale de la tige dans $\mathscr{R}$ est constante au cours du mouvement

10. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_P du solide.

11. Donner l'expression de l'énergie cinétique du pendule. On remarquera que, puisque l'expression de $I_{Oz}=3/2\,M\,a^2$ est connue, on n'a pas à utiliser ici le théorème de König pour l'énergie.

12. Vérifier que l'on a bien retrouvé l'équation différentielle précédente.

E. Équation du mouvement

La tige a été lâchée sans vitesse initiale avec $\theta(0)=\theta_0=0{,}1\,rad$.

13. On supposera que la précision recherchée permet de travailler à l'ordre 1 en θ dans l'équation différentielle du deuxième ordre. Exprimer puis calculer la valeur de la pulsation Ω_0 du mouvement obtenu. Déterminer l'expression de $\theta(t)$ et A.N.

A.N. $a=2{,}2\,m$ (en fait on travaillera avec $a=20/9$) et $M=4{,}5\,kg$ et $g=10\,m.s^{-2}$

II. Oscillation d'un solide accroché à un ressort horizontal

Un solide, de masse m , de centre d'inertie O , est guidé de façon à ne pouvoir effectuer qu'un mouvement de translation suivant l'axe $O'x$. La liaison guide-solide est sans frottement. Le solide est solidaire de l'une des extrémités d'un ressort de raideur K , l'autre extrémité du ressort est fixée en O' . On définit x par $\vec{O'O}=x(t)\ \vec{u}_x$.

On admet que la répartition de forces exercées par le support horizontal et le guide sur la base du solide est, en l'absence de frottement solide, réductible à une force unique $\vec{R}$ verticale, appliquée en un point a priori inconnu de cette base.

A. Théorème de la résultante cinétique

14. Appliquer le théorème de la résultante cinétique au solide dans le référentiel $\mathscr{R}$ (on supposera que le solide a une dimension $2\,d$ selon x et que le point O se trouve au centre). Montrer que la projection sur l'axe du mouvement donne l'équation différentielle du mouvement. Que donnent les projections du théorème sur les deux autres axes?

15. Pour simplifier l'équation obtenue, on pose $\overrightarrow{O_{eq}O}=X(t)\vec{u}_x$. Écrire l'équation différentielle en X ?

B. Conservation de l'énergie

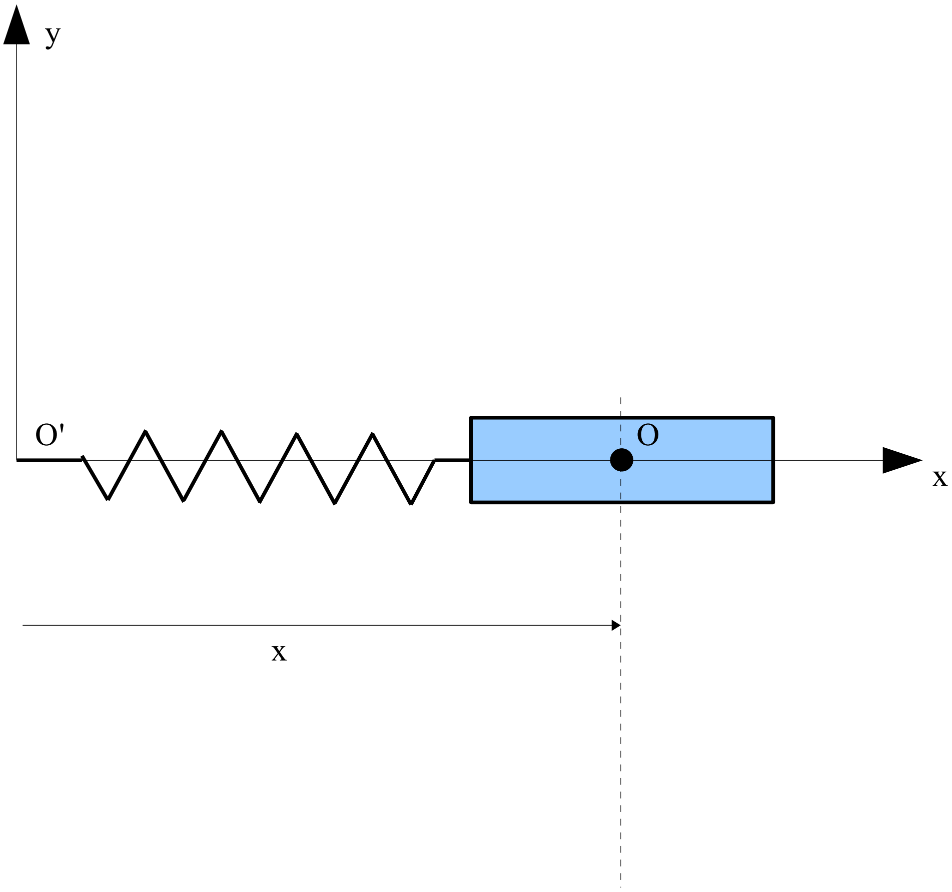
On se propose de retrouver l'équation différentielle du mouvement par une méthode énergétique.

16. Justifier le fait que l'énergie totale du solide dans $\mathscr{R}$ est constante au cours du mouvement

17. Retrouver l'expression de l'énergie potentielle élastique dont dérive la force exercée par le ressort sur le solide.

18. Donner l'expression de l'énergie cinétique du solide. Justifier.

19. Vérifier que l'on a bien retrouvé l'équation différentielle précédente.



C. Équation du mouvement

Le centre de masse du solide se trouve à l'équilibre en $x_e = 1\,m$. Il a été écarté jusqu'à l'abscisse $x(0) = x_0 = 1{,}1\,m$ et lâché sans vitesse initiale.

20. Exprimer puis calculer la valeur de la pulsation Ω'_0 du mouvement obtenu. Déterminer $X(t)$ et A.N.

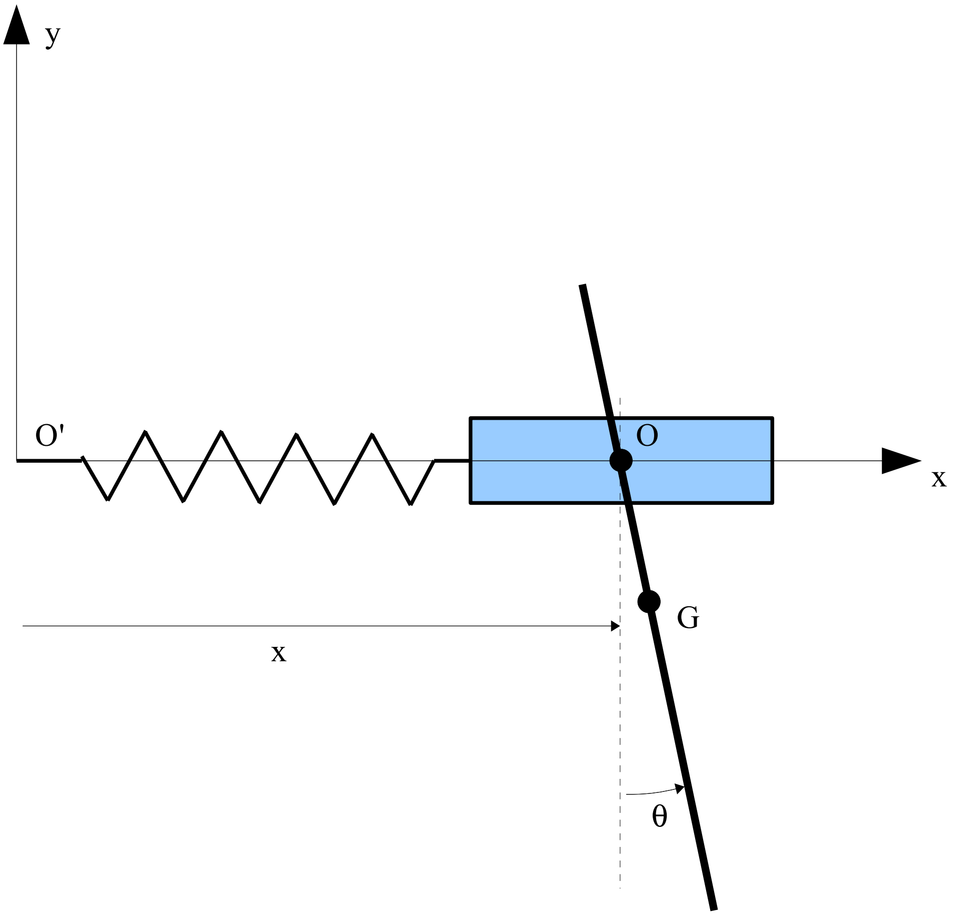
A.N. $m = 1{,}5\,kg$ et $K = 24\,N.m^{-1}$

III. Oscillations couplées

La tige et le solide précédent (qui comporte un évidement solidaire d'un axe pour la tige) sont associés comme indiqué sur la figure.

L'articulation en O est parfaite, on note R_X , R_Y et R_Z les composantes scalaires de la résultante des actions de l'axe sur la tige dans la base $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ et M_X , M_Y , $M_Z = 0$ les composantes scalaires du moment en O des actions de l'axe (lié au solide) sur la tige dans la base $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$. En vertu de l'action et de la réaction, les actions de la tige sur l'axe font intervenir les mêmes grandeurs mais changées de signe.

Les paramètres cinématiques du problème sont comme précédemment $X(t)$ et $\theta(t)$, deux fonctions du temps. On cherche uniquement à déterminer $X(t)$ et $\theta(t)$.



21.Quel est le nombre d'inconnues du problème à étudier. Préciser lesquelles.

A. Théorème de la résultante cinétique

On se propose d'appliquer le théorème de la résultante cinétique dans le référentiel du laboratoire $\mathscr{R}$ au système total (tige+solide).

22.Les inconnues de la liaison tige-solide : R_X , R_Y , R_Z , M_X , M_Y ne vont pas intervenir dans l'application de ce théorème. Pourquoi?

23.En utilisant la relation fondamentale de la cinématique du solide, donner l'expression de la vitesse du centre de masse de la tige en fonction des paramètres cinématiques. En déduire l'expression de la quantité de mouvement pour le système (tige+solide) en fonction des paramètres cinématiques.

24.Écrire le théorème de la résultante cinétique et donner les trois équations obtenues en projetant sur les trois axes. L'une des équations obtenue $\textit{équation}\,1$ fait intervenir $X(t)$ et $\theta(t)$ sans autre inconnue.

B. Théorème du moment cinétique

On se propose d'appliquer le théorème du moment cinétique à la tige au point O dans le référentiel $\mathscr{R}'$. Pour $\mathscr{R}'$, le repère d'espace associé a pour origine O et pour base $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$.

25.Pourquoi ne peut-on appliquer le théorème du moment cinétique sous sa forme simple habituelle à la tige au point O dans le référentiel $\mathscr{R}$. En revanche, de quels éléments supplémentaires faudra-t-il tenir compte en travaillant dans $\mathscr{R}'$?

26.On utilisera en fait essentiellement la projection selon z . Les inconnues de liaison R_X , R_Y , R_Z , M_X , M_Y vont-elles intervenir dans l'équation. Commenter.

27.Déterminer l'expression du moment cinétique en O dans $\mathscr{R}'$ de la tige en fonction des paramètres cinématiques.

28.Quel est le moment total en O de la répartition de force de pesanteur (force élémentaire $dM\,\vec{g}$ avec dM masse élémentaire de tige).

29.Quel est le moment total en O de la répartition de force dont la force élémentaire s'écrit $-dM \dfrac{d^2X(t)}{dt^2}\vec{u}_x$? (On pourra travailler en remarquant l'analogie avec la pesanteur). A quelle répartition de forces de même nature, faut-il encore a priori s'intéresser. Justifier avec précision que c'est inutile.

30.Appliquer le théorème du moment cinétique. La projection sur l'axe z obtenue *équation* 2 fait intervenir $X(t)$ et $\theta(t)$ sans autre inconnue.

C. Conservation de l'énergie

A titre de vérification, on se propose d'écrire la conservation de l'énergie au système total (tige+solide) dans $\mathscr{R}$.

31.Expliquer pourquoi les forces extérieures et intérieures (on évoque ici les actions de liaison tige-solide) sont ici conservatives.

32.Écrire l'énergie cinétique du système.

33.Écrire l'énergie potentielle du système.

34.Montrer que l'équation obtenue n'est en contradiction ni avec l' *équation* 1 ni avec l' *équation* 2 .

D. Résolution

35.Montrer que dans l'hypothèse des petits mouvements adoptée désormais (on travaille pour les deux équations obtenues au premier ordre en θ , en $\dot{\theta}$ et en $\ddot{\theta}$) on obtient un système de deux équations différentielles couplées:

$$\frac{d^2(a\theta)}{dt^2}+\Omega_1^2(a\theta)=-\alpha\frac{d^2X}{dt^2}$$

$$\frac{d^2X}{dt^2}+\Omega_2^2X=-\beta\frac{d^2(a\theta)}{dt^2}$$

Déterminer les valeurs numériques de Ω_1 , Ω_2 , α , β .

36.On cherche ici les modes propres (ou modes normaux) de vibration. Dans un mode propre, toutes les parties du système vibrent à la même fréquence. On travaille donc en complexes et on cherche les solutions telles que $\underline{X}(t)$ et $a\underline{\theta}(t)$ vibrent en $\exp(j\Omega t)$. Démontrer que les deux valeurs possibles sont (en $rad\, s^{-1}$) $\Omega_I=\sqrt{2}$ et $\Omega_{II}=2\sqrt{3}$.

37.En déduire $X(t)$ et $a\theta(t)$ (On ne cherchera pas à déterminer les constantes en fonction des conditions initiales)

- pour $\Omega=\Omega_I$ (mode I)
- pour $\Omega=\Omega_{II}$ (mode II)
- dans le cas général (la solution est une combinaison linéaire des modes I et II)

Réponses

1) Gz est un axe de symétrie de la tige

$\overrightarrow{\omega} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}$ est selon Gz

On a donc $\overrightarrow{\sigma}^* = I_{Gz}\,\overrightarrow{\omega}$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}^* = \frac{1}{12} M L^2 \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}}$$

---

2) Théorème de König

$$\overrightarrow{\sigma}(O)_{/R} = \overrightarrow{OG} \wedge M\overrightarrow{v_G}_{/R} + \overrightarrow{\sigma}^*$$

$$= a\,\overrightarrow{u_r} \wedge M a \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + I_{Gz}\,\overrightarrow{\omega}$$

$$I_{Oz}\,\overrightarrow{\omega} = M a^2 \underbrace{\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}}_{\overrightarrow{\omega}} + I_{Gz}\,\overrightarrow{\omega}$$

finalement

$$\boxed{I_{Oz} = M a^2 + I_{Gz}}$$

---

3) A.N.

$$\frac{3}{2} M a^2 = M a^2 + \frac{1}{12} M L^2$$

$$\frac{a^2}{L^2} = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\frac{a}{L} = \frac{1}{\sqrt{6}} \simeq 0{,}408}$$

---

4)

$$\boxed{P_{/R} = \underbrace{\overrightarrow{R}}_{\text{résultante}}\,\overrightarrow{v}(I \in \text{tige})_{/R} + \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}}(I)}_{\text{moment résultant}}\,\overrightarrow{\omega}_{\text{tige}/R}}$$

---

5) En O

$$P_{/R} = \overrightarrow{R_\ell}\,\underbrace{\overrightarrow{v}(O \in \text{tige})_{/R}}_{\substack{\text{nul} \\ O \text{ fixe}}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_\ell}(O)\,\underbrace{\overrightarrow{\omega}_{\text{tige}/R}}_{\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}} = 0$$

finalement

$$0 = \mathcal{M}_z\,\dot{\theta}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_z = 0}$$

---

6) le point O étant fixe dans R, on peut écrire

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext}(O) = \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma}_R(O)}{dt}\right)_{/R}$$

$$\overrightarrow{OG} \wedge M\vec{g} \quad + \quad \vec{\mathcal{M}}_{\ell}(O) \quad = \quad \frac{d}{dt}\left(I_{Oz}\,\vec{\omega}\right)$$

$$(\vec{u_x},\vec{u_y},\vec{u_z})\begin{vmatrix} a\sin\theta \\ -a\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{vmatrix} \quad + \quad \begin{vmatrix} \mathcal{M}_x \\ \mathcal{M}_y \\ 0 \end{vmatrix} \quad = \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2}Ma^2\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$/\vec{u_x}$		$\mathcal{M}_x$	$= 0$
$/\vec{u_y}$		$\mathcal{M}_y$	$= 0$
$/\vec{u_z}$	$-Mga\sin\theta$		$= \frac{3}{2}Ma^2\ddot{\theta}$

---

7) La projection selon z donne l'équa diff du mouvement

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2}{3}\frac{g}{a}\sin\theta = 0}$$

les deux autres projections donnent

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= 0 \\ \mathcal{M}_y &= 0 \end{aligned}}$$

---

8) Les inconnues du problème sont R_x, R_y, R_z, $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$ et θ.

L'équation différentielle donnant θ est connue.

$\mathcal{M}_x$ et $\mathcal{M}_y$ sont connus (nuls).

Restant à déterminer R_x, R_y, R_z

on les obtiendrait en écrivant le théorème de la résultante cinétique à la tige dans $\mathcal{R}$

---

9) Les forces agissant sur la tige sont

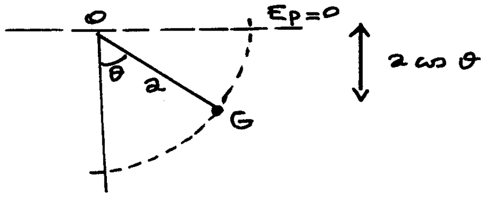
- le poids (force conservative)
- la réaction de l'axe sur la tige.

  La liaison est parfaite donc la puissance totale des actions de liaison est nulle or l'axe est fixe donc la puissance des actions de l'axe sur la tige est nulle.

L'énergie totale est donc constante.

---

10) On fait $E_p = 0$ quand OG est à l'horizontale.



$$\boxed{E_p = -Mga\cos\theta}$$

---

11) Le pendule est en rotation autour de Oz :

$$E_c = \frac{1}{2} I_{Oz}\,\omega^2$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{3}{2} M a^2 \dot\theta^2$$

$$\boxed{E_c = \frac{3}{4} M a^2 \dot\theta^2}$$

---

12)

$$E_c + E_p = E_{cste}$$

$$\boxed{\frac{3}{4} M a^2 \dot\theta^2 - Mga\cos\theta = E}$$

(<u>intégrale première</u> de l'énergie)

Si on dérive par rapport au temps :

$$\frac{3}{2} M a^2 \dot\theta\ddot\theta + Mga\sin\theta\,\dot\theta = 0$$

avec $\dot\theta = 0$ solution parasite

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{2}{3}\frac{g}{a}\sin\theta = 0}$$

(on retrouve 7))

---

13) A l'ordre 1 en θ, ($\dot\theta$, $\ddot\theta$), l'équation devient :

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{2}{3}\frac{g}{a}\theta = 0}$$

on pose $\boxed{\Omega_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{a}}}$

A.N. $= \sqrt{\frac{2}{3}\frac{10}{20/9}}$

$$\boxed{\begin{aligned}\Omega_0 &= \sqrt{3}\\ &\simeq 1{,}732 \ \text{rad s}^{-1}\end{aligned}}$$

$$\ddot{\theta} + \Omega_0^2\,\theta = 0$$

donc $\theta = A\cos\Omega_0 t + B\sin\Omega_0 t$

C.I. en $t = 0$

$$\left|\begin{array}{l}\theta = \theta_0\\ \dot{\theta} = 0\end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\theta = \theta_0\cos\Omega_0 t\\ \theta = 0{,}1\cos\sqrt{3}\,t\end{array}}$$

---

14) Théorème de la résultante cinétique au solide dans $\mathcal{R}_0$

$$\underbrace{\overrightarrow{F_{ressort}}}_{-K(\ell-\ell_0)\overrightarrow{u_x}} + \underbrace{m\vec{g}}_{-mg\overrightarrow{u_y}} + \underbrace{\vec{R}}_{R\overrightarrow{u_y}} = m\overrightarrow{a_0}$$

avec

$x = \ell + d$

$$-K(x-d-\ell_0)\overrightarrow{u_x} + m\vec{g} + \vec{R} = m\ddot{x}\,\overrightarrow{u_x}$$

$/x \quad -K(x-d-\ell_0) + 0 + 0 = m\ddot{x}$

$/y \quad 0 - mg + R = 0$

$/z \quad 0 + 0 + 0 = 0$

La projection selon x donne l'équation différentielle du mouvement :

$$\boxed{-K(x-d-\ell_0) = m\ddot{x}}$$

On a aussi démontré que

$$\boxed{R = mg}$$

---

15) $-k(x-d-\ell_0) = m\ddot{x}$

et à l'équilibre x est égal à x_{eq}

$-k(x_{eq}-d-\ell_0) = 0$

---

en faisant la différence :

$-k(x-x_{eq}) = m\ddot{x}$

on pose $X = x - x_{eq}$ (allongement / équilibre)

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{K}{m} X = 0}$$

---

16) La force exercée par le ressort est conservative
le poids est une force conservative (ici, il ne travaille d'ailleurs pas)
La réaction ne travaille pas, en l'absence de frottements.

Donc l'<u>énergie totale est conservée</u>.

---

17) Énergie potentielle élastique : (avec $\ell = x - d$)

$$\vec{F} = -K(\ell - \ell_0)\,\vec{u_x}$$

$$\delta W = -K(\ell - \ell_0)\,d\ell = -dE_p$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} K (\ell - \ell_0)^2} \cancel{+ \text{cste}}$$

<u>Ici</u> $\ell_0 = \ell_{eq}$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} K X^2}$$

---

18)

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m \dot{X}^2}$$

car il s'agit d'un solide en translation donc $\int \frac{1}{2} dm\, v^2$

$$= \frac{1}{2}\left[\int dm\right] v^2$$

$$= \frac{1}{2} m v^2$$

---

19)

$$E_c + E_p = E \text{ cste}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} K X^2 = E}$$

on dérive par rapport au temps :

$$m \dot{X} \ddot{X} + K X \dot{X} = 0$$

avec $\dot{X} = 0$ est une solution parasite donc :

$$m \ddot{X} + K X = 0$$

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{K}{m} X = 0}$$

---

20) On pose $\boxed{\Omega'_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}}$

A.N. $= \sqrt{\frac{24}{1,5}}$

$\boxed{\Omega'_0 = 4 \text{ rad s}^{-1}}$

La solution est donc, après avoir porté les C.I,

$$X = X_0 \cos(\Omega'_0 t)$$

avec $X_0 = 0,1$ m

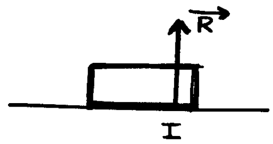
$$\boxed{X = 0,1 \cos(4t)}$$

---

21) Les inconnues sont :

- les deux paramètres cinématiques : $X(t)$ et $\theta(t)$
- les éléments de réduction de la répartition des actions de liaison tige – solide en O : $R_x, R_y, R_z, \mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y$
- les éléments de réduction de la répartition des actions de contact support horizontal – solide : R et le moment de ces actions, ce qui revient à préciser la position du point I (voir figure)

supposé réductible à :



$\boxed{9 \text{ inconnues}}$

---

22) Le théorème de la résultante cinétique ne fait intervenir que les actions extérieures au système.

La liaison solide-tige (et tige-solide) fait intervenir une répartition de forces intérieures au système total tige + solide et donc n'interviennent pas.

---

23) G et O sont deux points de la tige :

$$\vec{v_G} = \vec{v_O} + \vec{GO} \wedge \vec{\omega_{tige}}$$
$$= \vec{v_O} + \vec{\omega_{tige}} \wedge \vec{OG}$$

O est aussi un point du solide

$$\overrightarrow{v_O} = \dot{X}\,\overrightarrow{u_x}$$

finalement

$$\overrightarrow{v_G} = \dot{X}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z} \wedge (a \sin\theta\,\overrightarrow{u_x} - a\cos\theta\,\overrightarrow{u_y})$$

$$\boxed{\overrightarrow{v_G} = (\dot{X} + a\dot{\theta}\cos\theta)\,\overrightarrow{u_x} + a\dot{\theta}\sin\theta\,\overrightarrow{u_y}}$$

La quantité de mouvement du système

$$\overrightarrow{P}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{P}_{solide/\mathcal{R}} + \overrightarrow{P}_{tige/\mathcal{R}}$$

$$= m\dot{X}\,\overrightarrow{u_x} + M\,\overrightarrow{v_G}$$

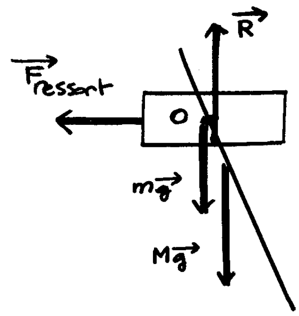
$$\boxed{\overrightarrow{P}_{/\mathcal{R}} = \left((m+M)\dot{X} + Ma\dot{\theta}\cos\theta\right)\overrightarrow{u_x} + Ma\dot{\theta}\sin\theta\,\overrightarrow{u_y}}$$

remarque

on posant $\overrightarrow{P}_{/\mathcal{R}} = (m+M)\,\overrightarrow{V}$
on trouverait la vitesse $\overrightarrow{V}$ de $G_{tige+solide}$
(centre de masse du système total).

---

24)



$$m\overrightarrow{g} + M\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R} + \underbrace{\overrightarrow{F}_{ressort}}_{-K(\ell-\ell_0)\overrightarrow{u_x}} = \frac{d\overrightarrow{P}}{dt}$$

$/x \qquad - K(\ell-\ell_0) = \dfrac{dP_x}{dt}$

$/y \qquad -mg - Mg + R = \dfrac{dP_y}{dt}$

$/z \qquad 0 = 0$

La première équation donne $\quad -K(\ell-\ell_0) = \dfrac{dP_x}{dt}$

A l'équilibre $\quad -K(\ell_{eq}-\ell_0) = 0$

la différence : $\quad -K X = \dfrac{dP_x}{dt}$

soit :

équation 1

$$\boxed{-KX = (m+M)\ddot{X} + Ma\ddot{\theta}\cos\theta - Ma\dot{\theta}^2\sin\theta}$$

L'autre équation permettrait de trouver R

$$R - (M+m)g = Ma\ddot{\theta}\sin\theta + Ma\dot{\theta}^2\cos\theta$$

---

25) → le point O n'est pas un point fixe dans $\mathcal{R}$.
On ne peut pas y appliquer le théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}$ (du moins dans la version habituelle)
→ le référentiel $\mathcal{R}'$ n'est pas galiléen.
Il faudra donc tenir compte des forces d'inertie.
(ce n'est pas le référentiel barycentrique – associé à $\mathcal{R}$ galiléen – de la tige sinon on n'aurait pas besoin de tenir compte des forces d'inertie)
(on peut utiliser le théorème du moment cinétique en O dans $\mathcal{R}'$ puisque O est fixe dans $\mathcal{R}'$)

---

26) le théorème du moment cinétique en projection selon Oz fera intervenir le moment des liaisons selon z soit $\mathcal{M}_z$.
Or celui-ci est nul (liaison parfaite).
Les inconnues de liaison n'interviennent pas.

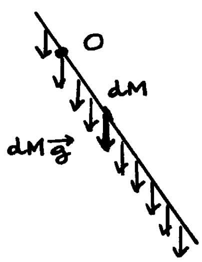
---

27)

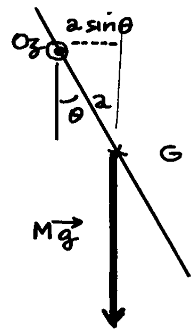
$$\boxed{\vec{\sigma}_{\text{tige}/\mathcal{R}'}(O) = \frac{3}{2}Ma^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}}$$

---

28)



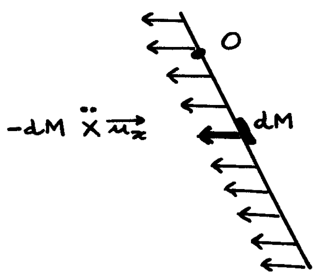
répartition de force homogène.
equivalente (dans ce cas particulier) à une force unique en G



$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{pesanteur}(O) = -Mga\sin\theta\ \overrightarrow{u_z}}$$

---

29)

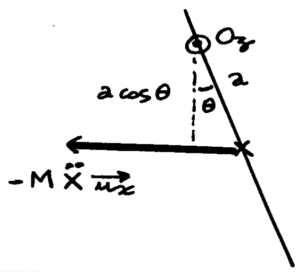


(figure en supposant $\ddot{X} > 0$)

On s'intéresse ici aux forces d'inertie d'entraînement.
$\mathcal{R}'$ est en translation (non uniforme) par rapport à $\mathcal{R}$. Il n'est pas galiléen. La force élémentaire d'inertie sur un dM est $-dM\ \vec{a}(O)_{/\mathcal{R}}$

$= -dM\ \ddot{X}\ \overrightarrow{u_x}$

Elle ne dépend pas du point considéré. Elle est homogène. Cette répartition est équivalente à une force unique en G



$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{entraînement}(O) = -M\ddot{X}\,a\cos\theta\ \overrightarrow{u_z}}$$

Il faudrait aussi réfléchir à la répartition des forces d'inertie de Coriolis.

C'est inutile puisque <u>$\mathcal{R}'$ étant en translation, il n'y a pas de forces de Coriolis</u>.

---

30) Dans $\mathcal{R}'$ non galiléen :

$$\underset{}{\vec{\mathcal{M}}_{\text{poids}}(O)} + \underset{\text{solide-tige}}{\vec{\mathcal{M}}_{\text{liaison}}(O)} + \underset{\text{entrainement}}{\vec{\mathcal{M}}_{\text{inertie}}(O)} = \frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{\text{tige}/\mathcal{R}'}(O)$$

$/x \qquad + \mathcal{M}_x \qquad = 0$

$/y \qquad + \mathcal{M}_y \qquad = 0$

$/z \quad -Mga\sin\theta \qquad -M\ddot{X}a\cos\theta \quad = \frac{3}{2}Ma^2\ddot{\theta}$

D'où l'équation (en projection selon z)

équation 2

$$\boxed{-Mga\sin\theta - M\ddot{X}a\cos\theta = \frac{3}{2}Ma^2\ddot{\theta}}$$

---

31)

→ poids : force conservative

→ ressort : force conservative

→ réaction du support : ne travaille pas car pas de frottement

→ liaisons solide → tige + tige → solide : liaison parfaite donc <u>la puissance totale</u> est nulle. Ne travaille pas.

L'énergie mécanique totale est donc conservée pour le système <u>global</u>.

---

32)

$$E_{c/\mathcal{R}} = E_{c\,\text{solide}/\mathcal{R}} + E_{c\,\text{tige}/\mathcal{R}}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_{Gz}\,\omega^2}_{\text{théorème de König}}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}M\left((\dot{X}+a\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (a\dot{\theta}\sin\theta)^2\right) + \frac{1}{2}I_{Gz}\,\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}(m+M)\dot{X}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} I_{Gz}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M a^2 \dot{\theta}^2}$$
$$+ M a \dot{\theta} \dot{X} \cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}(m+M)\dot{X}^2 + \frac{1}{2} I_{Oz}\dot{\theta}^2 + M a \dot{\theta}\dot{X}\cos\theta$$

$$\boxed{E_{C/R} = \frac{1}{2}(m+M)\dot{X}^2 + \frac{3}{4} M a^2 \dot{\theta}^2 + M a \dot{\theta}\dot{X}\cos\theta}$$

---

33) $E_{P/R}$

$$E_{P/R} = E_{P\,elastique} + E_{P\,pesanteur\ tige} + \underbrace{E_{P\,pesanteur\ solide}}_{cste}$$

$$= \frac{1}{2} K (\ell-\ell_0)^2 - M g a \cos\theta$$

$$\boxed{E_{P/R} = \frac{1}{2} K X^2 - M g a \cos\theta}$$

---

34) $$E = \frac{1}{2}(m+M)\dot{X}^2 + \frac{1}{2} K X^2 + M a \dot{\theta}\dot{X}\cos\theta + \frac{3}{4} M a^2 \dot{\theta}^2$$
$$- M g a \cos\theta$$

On peut dériver par rapport au temps :

$$0 = (m+M)\ddot{X}\dot{X} + K X \dot{X} + M a \ddot{\theta}\cos\theta\,\dot{X} - M a \dot{\theta}^2 \sin\theta\,\dot{X}$$
$$+ M a \cos\theta\,\ddot{X}\dot{\theta} + \frac{3}{2} M a^2 \ddot{\theta}\,\dot{\theta} + M g a \sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$\boxed{0 = [\quad]\dot{X} + [\quad]\dot{\theta}}$$

nul d'après équation 1 — nul d'après équation 2

Les résultats sont donc cohérents.

---

35) → Au premier ordre en θ, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, l'équation 2 devient :

$$-M g a \sin\theta - M \ddot{X} a \cos\theta = \frac{3}{2} M a^2 \ddot{\theta}$$

$$\sin\theta \to \theta \qquad \cos\theta \to 1 - \cancel{\frac{\theta^2}{2}}$$

$$-M g a\,\theta - M a \ddot{X} = \frac{3}{2} M a^2 \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{3}\frac{g}{a}\theta = -\frac{2}{3}\frac{1}{a}\ddot{X}$$

On pose $\boxed{\Omega_2 = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{a}}}$ $(= \Omega_0)$

ou en travaillant avec une variable longueur : $a\theta$

$$\boxed{(a\ddot{\theta}) + \Omega_2^2\,(a\theta) = -\frac{2}{3}\ddot{X}}$$

⟶ l'équation 1 devient :

$$-KX = (m+M)\ddot{X} + Ma\underbrace{\ddot{\theta}\cos\theta}_{\ddot{\theta}\left(1-\cancel{\frac{\theta^2}{2}}\right)} - Ma\underbrace{\dot{\theta}^2\sin\theta}_{\dot{\theta}^2\left(\theta-\frac{\theta^3}{6}\right)}$$

$\ddot{\theta}$: 1er ordre ; $\ddot{\theta}\frac{\theta^2}{2}$: 3ème ordre ; $\dot{\theta}^2\theta$: 3ème ordre ; $\dot{\theta}^2\frac{\theta^3}{6}$: 5ème ordre

$$-KX = (m+M)\ddot{X} + Ma\ddot{\theta}$$

$$\ddot{X} + \frac{K}{m+M}X = -\frac{M}{m+M}a\ddot{\theta}$$

On pose $\boxed{\Omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m+M}}}$ $(= \sqrt{2}\ )$

$$\boxed{\ddot{X} + \Omega_1^2\,X = -\frac{M}{m+M}(a\ddot{\theta})}$$

finalement
$$\boxed{\begin{aligned}\Omega_1 &= \sqrt{\frac{K}{m+M}} = 2 \text{ rad s}^{-1}\\ \Omega_2 &= \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{a}} = \sqrt{3} \text{ rad s}^{-1}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha &= \frac{M}{m+M} = \frac{3}{4}\\ \beta &= \frac{2}{3}\end{aligned}}$$

---

36)
$$\ddot{X} + \Omega_1^2\,X = -\alpha\,(a\ddot{\theta})$$
$$(a\ddot{\theta}) + \Omega_2^2\,(a\theta) = -\beta\,\ddot{X}$$

système d'équa diff couplées.

On cherche des solutions en $\exp j\Omega t$ pour $\underline{X}$ et $a\underline{\theta}$

$$-\Omega^2 \underline{X} + \Omega_1^2 \underline{X} = \alpha \quad \Omega^2 (a\underline{\theta})$$
$$-\Omega^2 (a\underline{\theta}) + \Omega_2^2 (a\underline{\theta}) = \beta \quad \Omega^2 \underline{X}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (\Omega^2 - \Omega_1^2)\, \underline{X} + \alpha\Omega^2 \, a\underline{\theta} = 0 \\ \beta\Omega^2 \, \underline{X} + (\Omega^2 - \Omega_2^2) a\underline{\theta} = 0 \end{array}}$$

Pour que la solution soit autre que la solution évidente

$$\underline{X} = 0 \quad \text{et} \quad a\underline{\theta} = 0$$

il faut

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 - \Omega_1^2 & \alpha\Omega^2 \\ \beta\Omega^2 & \Omega^2 - \Omega_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\Omega^2 - \Omega_1^2)(\Omega^2 - \Omega_2^2) - \alpha\beta\,\Omega^4 = 0$$

$$\boxed{\Omega^4 (1 - \alpha\beta) - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\,\Omega^2 + \Omega_1^2 \Omega_2^2 = 0}$$

En passant au numérique pour ne pas alourdir le calcul :

$$\Omega^4 \ \frac{1}{2} - 7 \ \Omega^2 + 12 = 0$$
$$\Omega^4 - 14 \ \Omega^2 + 24 = 0$$

donc

$$\Omega^2 = +7 \pm \sqrt{49 - 24} \quad \begin{cases} 12 \\ 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Omega_I = \sqrt{2} \\ \Omega_{II} = 2\sqrt{3} \end{array}}$$

(fréquences propres)

---

37) mode I

$$(\Omega_I^2 - \Omega_1^2)\ \underline{X} + \alpha\, \Omega_I^2 \ a\underline{\theta} = 0$$

donc : $$-2 \ \underline{X} + \frac{3}{2} \ a\underline{\theta} = 0$$

$$(a\underline{\theta})_I = \frac{4}{3} \ \underline{X}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} X_I = A_I \cos(\Omega_I t + \varphi_I) \\ (a\theta)_I = \frac{4}{3} A_I \cos(\Omega_I t + \varphi_I) \end{array}}$$

mode II

$$(\Omega_{II}^2 - \Omega_1^2)\,\underline{X} + \alpha\,\Omega_{II}^2\,a\underline{\theta} = 0$$

donc
$$8\,\underline{X} + 9\,a\underline{\theta} = 0$$

$$(a\underline{\theta})_{II} = -\frac{8}{9}\,\underline{X}$$

$$X_{II} = A_{II}\cos(\Omega_{II}t + \varphi_{II})$$
$$(a\theta)_{II} = -\frac{8}{9}A_{II}\cos(\Omega_{II}t + \varphi_{II})$$

cas général

$$\boxed{\begin{aligned} X &= A_I\cos(\Omega_I t+\varphi_I) + A_{II}\cos(\Omega_{II}t+\varphi_{II}) \\ a\theta &= \frac{4}{3}A_I\cos(\Omega_I t+\varphi_I) - \frac{8}{9}A_{II}\cos(\Omega_{II}t+\varphi_{II}) \end{aligned}}$$