**Forces centrales et conservatives:**

**Démontrer les formules de Binet pour la vitesse et l'accélération.**
**En utilisant cette dernière formule, démontrer que les trajectoires pour une masse $m$ se déplaçant dans le champ de gravitation d'une masse $M$ ( $M \gg m$ ) sont des coniques.**
**Commenter la signification des grandeurs $p$ , $e$ , $\theta_0$ .**

Réponse:

formules de Binet:

La force étant centrale, la trajectoire est plane et l'on a: $r^2\dot{\theta}=C$

On travaille ici avec la fonction $u$ qui à $\theta$ fait correspondre $\frac{1}{r}$

On aura donc:

$$\dot{\theta}=C u^2$$

- position:

$\vec{r}=r\,\vec{e}_r$

$$\vec{r}=\frac{1}{u}\vec{e}_r$$

- vitesse:

$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$

$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$

$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{d\theta}C u^2$

$\vec{v}=\left(-\frac{u'}{u^2}\vec{e}_r+\frac{1}{u}\vec{e}_\theta\right)C u^2$

$$\vec{v}=\left(-u'\vec{e}_r+u\,\vec{e}_\theta\right)C$$

- accélération:

$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$

$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$

$$\vec{a}=\frac{d\,\vec{v}}{d\,\theta}\,C\,u^2$$

$$\vec{a}=\left(-u''\vec{e}_r-u'\vec{e}_\theta+u'\vec{e}_\theta-u\,\vec{e}_r\right)\,C^2u^2$$

$$\vec{a}=-(u''+u)\,C^2u^2\,\vec{e}_r$$

(cette accélération est bien radiale puisque la force est centrale)

<u>équation d'une trajectoire:</u>

On écrit le principe fondamental

avec une force: $\vec{F}=-\frac{G\,m\,M}{r^2}\vec{e}_r$ soit:

$$-G\,m\,M\,u^2=-m(u''+u)\,C^2u^2$$

$$\frac{G\,M}{C^2}=(u''+u)$$

on pose:

$p=\frac{C^2}{G\,M}$ (paramètre)

$$(u''+u)=\frac{1}{p}$$

dont la solution est :

$$u=A\,\cos(1*\theta+B)+\frac{1}{p}$$

on pose $A=\frac{e}{p}$ en imposant à $e$ (excentricité) d'être positif ou nul et on note $B=-\theta_0$

$$u=\frac{e}{p}\cos(\theta-\theta_0)+\frac{1}{p}$$

$$r=\frac{p}{1+e\,\cos(\theta-\theta_0)}$$

<u>signification:</u>

$p$ est la valeur de $r$ pour l'angle $(\theta-\theta_0)=-\frac{\pi}{2}$

$e$

- si $e=0$ , $r$ est constant (cercle)

- si $e=1$ , $r$ est infini uniquement pour $(\theta-\theta_0)=\pi$ (parabole)
- si $0<e<1$ pas de points à l'infini donc ellipse
- si $e>1$ grande zone de points à l'infini...donc hyperbole

$(\theta-\theta_0)=0$ donne l'axe de symétrie de la conique (la direction et le sens vers le point de la trajectoire le plus proche du centre de force) donc $\theta_0$ est l'angle entre l'axe polaire et l'axe de la conique.