Cinématique du point matériel:

Démontrer l' expression de la vitesse en coordonnées sphériques dans la base adaptée. On précisera l'expression de la dérivée par rapport au temps des vecteurs unitaires utilisés. Comment déterminer l'expression de l'accélération

Réponse:

Schémas:

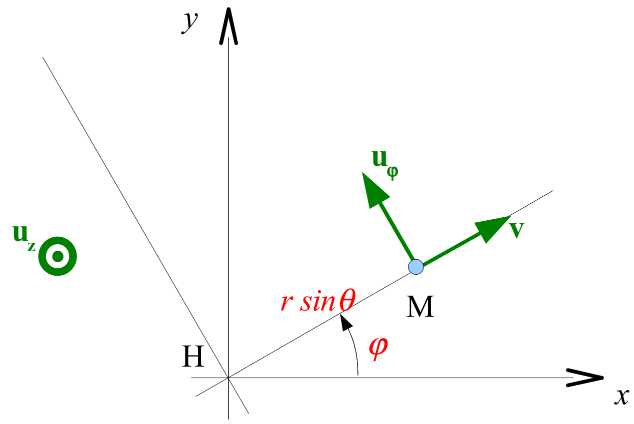


Figure dans le plan (M, **v** ,$\mathbf{u}_\varphi$)

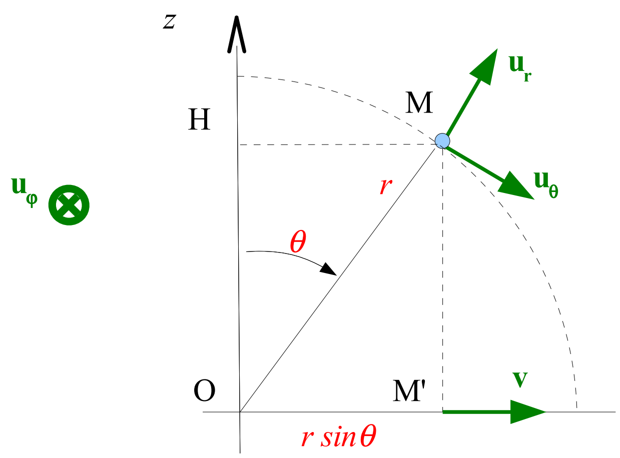
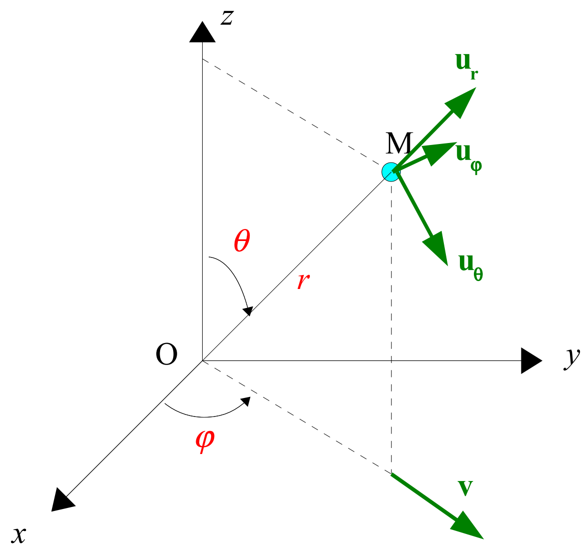


Figure dans le plan (M, $\mathbf{u}_r$,$\mathbf{u}_\theta$)

Rayon vecteur:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\,\vec{u}_r$$

Vitesse:



1) première méthode: on écrit directement le déplacement élémentaire (en faisant la composition des déplacements élémentaires dus à chaque paramètre variant seul)

si r varie seul : $\vec{dl_r}=dr\ \vec{u}_r$

si θ varie seul : $\vec{dl_\theta}=r\,d\theta\ \vec{u}_\theta$

si φ varie seul : $\vec{dl_\varphi}=r\ \sin\theta\ d\varphi\ \vec{u}_\varphi$

finalement:

$$\vec{dl}=dr\ \vec{u}_r+r\,d\theta\ \vec{u}_\theta+r\ \sin\theta\ d\varphi\ \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{v}=\frac{\vec{dl}}{dt}=\frac{dr}{dt}\ \vec{u}_r+r\frac{d\theta}{dt}\ \vec{u}_\theta+r\ \sin\theta\ \frac{d\varphi}{dt}\ \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{v}=\mathring{r}\ \vec{u}_r+r\mathring{\theta}\ \vec{u}_\theta+r\ \sin\theta\ \mathring{\varphi}\ \vec{u}_\varphi$$

2) deuxième méthode: on dérive $\vec{OM}$ par rapport au temps.

La dérivée par rapport au temps d'un vecteur de norme constante s'écrit $\frac{d}{dt}=\vec{\omega}\wedge$ avec $\vec{\omega}$: vecteur rotation instantanée.

Ici pour les vecteurs unitaires de la base mobile $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ par rapport à la base de référence $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$,on aura:

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\vec{\omega}_{(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)/(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)}\wedge\vec{u}$$

avec $\vec{\omega}_{(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)/(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)}$: vecteur rotation instantanée de la base mobile $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ par rapport à la base de référence $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$.

On passe de la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ à la base $(\vec{v}, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ par une rotation φ autour de $\vec{u}_z$ donc $\vec{\omega}_{(\vec{v}, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)/(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)} = \mathring{\varphi}\ \vec{u}_z$.

Puis on passe de la base $(\vec{v}, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ à la base $(\vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_r)$ par une rotation θ autour de $\vec{u}_\varphi$ donc $\vec{\omega}_{(\vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_r)/(\vec{v}, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)} = \mathring{\theta}\ \vec{u}_\varphi$

Par additivité:

$$\vec{\omega}_{(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)/(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)} = \mathring{\varphi}\ \vec{u}_z + \mathring{\theta}\ \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{\omega}_{(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)/(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)} = \mathring{\varphi}(\cos\theta\ \vec{u}_r - \sin\theta\ \vec{u}_\theta) + \mathring{\theta}\ \vec{u}_\varphi$$

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$$

$$\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\,\vec{u}_r}{dt}$$

avec:

$$\frac{d\,\vec{u}_r}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_r = (\mathring{\varphi}\cos\theta\ \vec{u}_r - \mathring{\varphi}\sin\theta\ \vec{u}_\theta + \mathring{\theta}\ \vec{u}_\varphi) \wedge \vec{u}_r = \mathring{\theta}\,\vec{u}_\theta + \mathring{\varphi}\sin\theta\ \vec{u}_\varphi$$

$$\frac{d\,\vec{u}_\theta}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\theta = (\mathring{\varphi}\cos\theta\ \vec{u}_r - \mathring{\varphi}\sin\theta\ \vec{u}_\theta + \mathring{\theta}\ \vec{u}_\varphi) \wedge \vec{u}_\theta = -\mathring{\theta}\,\vec{u}_r + \mathring{\varphi}\cos\theta\ \vec{u}_\varphi$$

$$\frac{d\,\vec{u}_\varphi}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\varphi = (\mathring{\varphi}\cos\theta\ \vec{u}_r - \mathring{\varphi}\sin\theta\ \vec{u}_\theta + \mathring{\theta}\ \vec{u}_\varphi) \wedge \vec{u}_\varphi = -\mathring{\varphi}\sin\theta\ \vec{u}_r - \mathring{\varphi}\cos\theta\ \vec{u}_\theta$$

finalement:

$$\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \mathring{r}\,\vec{u}_r + r(\mathring{\theta}\,\vec{u}_\theta + \mathring{\varphi}\sin\theta\ \vec{u}_\varphi)$$

$$\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \mathring{r}\,\vec{u}_r + r\,\mathring{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\mathring{\varphi}\sin\theta\ \vec{u}_\varphi$$

<u>Accélération</u>:

On doit dériver la vitesse par rapport au temps. On utilise la même méthode.

$$\vec{v} = \mathring{r}\,\vec{u}_r + r\,\mathring{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\mathring{\varphi}\sin\theta\ \vec{u}_\varphi$$

$$\frac{d\,\vec{v}}{dt} = \frac{d\,\mathring{r}}{dt}\vec{u}_r + \mathring{r}\frac{d\,\vec{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathring{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\frac{d\,\mathring{\theta}}{dt}\vec{u}_\theta + r\,\mathring{\theta}\frac{d\,\vec{u}_\theta}{dt} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{dr}{dt}\mathring{\varphi}\sin\theta\ \vec{u}_\varphi + r\frac{d\,\mathring{\varphi}}{dt}\sin\theta\ \vec{u}_\varphi + r\,\mathring{\varphi}\cos\theta\frac{d\,\theta}{dt}\ \vec{u}_\varphi + r\,\mathring{\varphi}\sin\theta\ \frac{d\,\vec{u}_\varphi}{dt}$$

Il faut alors remplacer les dérivées des vecteurs unitaires par leur expression.