DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Guides d'onde....2
I.Étude d'un guide d'onde et d'une cavité....2
A.Propagation d'une onde guidée....2
B.Du guide d'onde à la cavité....3
II.Guide d'onde en métal non parfait....4
A.Champ électrique dans le métal non parfait....4
B.Effet Joule dans le métal non parfait....5
C.Pertes énergétiques dans le guide et optimisation....6
Appareil de recherche des victimes d'avalanche....7
I.Champ rayonné par une petite antenne....7
II.Localisation de la victime 8
A.Recherche directionnelle....8
B.Recherche en croix....9
Cadmium en solution aqueuse....14
I.Diagramme potentiel-pH....14
II.Complexation....14

Guides d'onde

Ce problème étudie un guide d'onde sans pertes puis un guide d'onde avec pertes. On ne s'intéresse qu'à la partie non statique du champ électromagnétique. Les grandeurs a priori complexes sont notées soulignées. On désigne par i le nombre complexe tel que $i^2=-1$.

Données numériques:

Permittivité du vide :	$\varepsilon_0=\dfrac{1}{36\pi.10^9}SI$
Perméabilité du vide :	$\mu_0=4\pi.10^{-7}SI$
Vitesse de la lumière :	$c=3{,}0.10^8 m.s^{-1}$

Formule d'analyse vectorielle:

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A})=\overrightarrow{grad}(div\vec{A})-\Delta\vec{A}$$

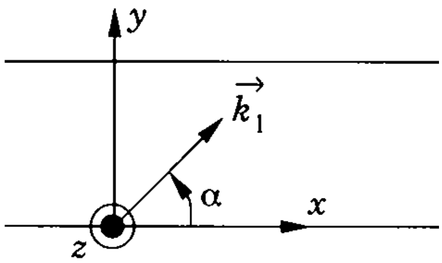
I. Étude d'un guide d'onde et d'une cavité

A. Propagation d'une onde guidée

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(Oxyz)$ associé à la base $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$. Le métal considéré dans cette partie est parfait.

1. Le champ $\vec{E}$ et le champ $\vec{B}$ en présence de répartitions surfaciques de charges et de courant doivent vérifier certaines conditions de passage.
   - Rappeler les relations générales de passage d'un milieu 1 à un milieu 2 en précisant la signification des notations utilisées.
   - Préciser les composantes qui doivent être obligatoirement continues.
   - On désigne par $\vec{n}_{ext}$ le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur du métal parfait au point considéré. Retrouver à partir des relations générales à la traversée d'une surface, l'expression de σ (densité surfacique de charge) et de $\vec{j}_S$ (densité surfacique de courant) au point considéré.
2. On considère deux plans métalliques parfaits d'équations $y=0$ et $y=b$. On cherche à faire se propager selon la direction (Ox) une onde plane homogène, progressive, harmonique (monochromatique) de pulsation ω , polarisée rectilignement selon (Oz) . Montrer que ceci est impossible.
3. On choisit alors d'envoyer cette onde en oblique entre les deux plans selon le vecteur d'onde $\vec{k}_1$ faisant l'angle α ($\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}[$) avec l'axe (Ox) . Le champ électrique associé au point $M(x,y,z)$ est noté: $\underline{\vec{E}}_1=E_0\exp i(\omega t-\vec{k}_1.\overrightarrow{OM})\vec{u}_z$. Donner l'expression de $\vec{k}_1$ en

fonction de $k_0=\dfrac{\omega}{c}$ et de α dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Préciser alors l'expression de $\underline{\vec{E}}_1(x, y, t)$.



4. En utilisant les lois de Descartes, préciser l'expression du vecteur d'onde $\vec{k}_2$ du champ électrique $\underline{\vec{E}}_2$ de l'onde plane réfléchie. Préciser alors l'expression de $\underline{\vec{E}}_2(x, y, t)$. On introduira une amplitude complexe (constante inconnue) $\underline{E}'_0$ qui sera à déterminer dans la question suivante.

5. Écrire le champ total $\underline{\vec{E}}$ somme des champs incident et réfléchi . En écrivant les conditions aux limites en $y=0$ puis en $y=b$, déterminer les valeurs possibles de $sin(\alpha)$ en fonction d'un entier p , de λ_0 (longueur d'onde dans le vide) et de b .

6. Donner l'expression réelle de $\vec{E}$ (on continuera à utiliser la notation α). Dans quelle direction et quel sens y a-t-il propagation ? Donner l'expression en fonction de k_0 et α du module du vecteur d'onde k_g dans le guide.

7. Exprimer en fonction de la vitesse de la lumière c et de b la fréquence minimale f_{min} en deçà de laquelle il ne peut y avoir de propagation. Quelle condition doit vérifier b pour qu'une onde de $2{,}5\,GHz$ puisse se propager (éventuellement selon plusieurs modes de propagation) ?

8. Quelle condition doit vérifier b pour qu'une onde de $2{,}5\,GHz$ puisse se propager selon un seul mode de propagation ?

9. Écrire la relation entre k_0 et k_g faisant intervenir p et b . Comment appelle-t-on cette relation ?

10. Trouver une relation entre la vitesse de phase v_φ , et la vitesse de groupe v_G sans les calculer explicitement, puis donner leurs expressions en fonction de c , p et du rapport $\dfrac{f}{f_{min}}$, f désignant la fréquence de l'onde.

11. On ferme le guide par deux autres plans parallèles en $z=0$ et $z=a$. Montrer sans calculs que c'est possible sans changer les solutions précédentes. Sur quels plans apparaissent des charges surfaciques ?

B. Du guide d'onde à la cavité

On ferme le guide d'onde par deux plans infiniment conducteurs en $x=0$ et $x=l$. On obtient désormais une cavité électromagnétique.

12. On considère le champ $\underline{\vec{E}}$ des *question* 5 et *question* 6 que l'on note $\underline{\vec{E}}_i=\underline{E}_0(y)\exp i(\omega t-k_g x)\ \vec{u}_z$ et que l'on peut considérer comme un champ incident sur le plan $x=l$. Expliquer sans calcul pourquoi il existe un champ réfléchi. On écrit le champ

réfléchi sous la forme $\underline{\vec{E}}_r = \underline{K}\,\underline{E}_0(y) \exp i(\omega t + k_g x) \vec{u}_z$. Déterminer $\underline{K}$ et montrer qu'il existe une condition de quantification sur k_g .

13.En déduire que les pulsations possibles dans le cadre des hypothèses effectuées sont de la forme: $\omega = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{l}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2}$ où m et p sont des entiers.

14.Montrer que le champ électrique peut se mettre sous la forme: $\underline{\vec{E}} = E_C \sin(p\pi\, y/b) \sin(m\pi\, x/l)\, e^{i\omega t} \vec{u}_z$ avec E_C réel.

On se place dans la suite dans le cas où $m = p = 1$.

15.Donner l'expression du champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ en fonction notamment de E_C , x et y .

16.Déterminer la densité surfacique de charge sur chacune des 6 parois de la cavité. Dessiner un schéma de la cavité en indiquant en $t=0$ (en supposant $E_C < 0$) avec les signes + et – les charges de ces faces en espaçant d'autant plus ces signes que la densité surfacique est faible en valeur absolue (préciser les axes Ox , Oy et Oz).

17.Préciser les faces de la cavité où apparaissent des courants surfaciques.

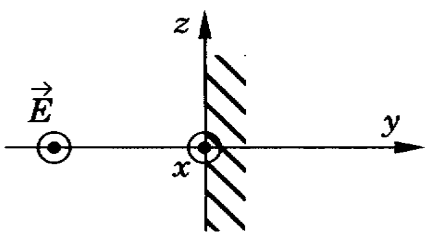
18.Exprimer $U_E(t)$ et $U_B(t)$ les énergies électriques et magnétiques instantanées dans la cavité en fonction de ε_0 , E_C , V (V étant le volume de la cavité) et de ωt . Représenter sur un même graphe les évolutions temporelles de $U_E(t)$ et $U_B(t)$. Que vaut l'énergie électromagnétique totale $U_{EM}(t)$? Commenter. Trouver une analogie avec un circuit électrocinétique simple.

II. Guide d'onde en métal non parfait

On suppose dans cette seconde partie que le métal constituant le guide d'onde est en cuivre de conductivité non infinie $\gamma = 5{,}9 . 10^7 S.m^{-1}$. La fréquence considérée est $2{,}5 GHz$.

A. Champ électrique dans le métal non parfait

L'espace est muni du repère orthonormé $(Oxyz)$. Afin d'étudier simplement le champ électrique dans le métal du guide on considère la modélisation suivante : un métal remplit le milieu semi-infini $y \geq 0$. On cherche dans le métal une solution sous la forme $\underline{\vec{E}} = \underline{E}(y) \exp(i\omega t)\ \vec{u}_x$.



19.Rappeler la relation entre le courant volumique de conduction $\vec{j}$ et le vecteur $\vec{E}$ pour ce métal ohmique.

20.Montrer que dans le métal pour le champ envisagé $\vec{\underline{E}}=\underline{E}(y)\exp(i\omega t)\ \vec{u}_x$ la densité volumique de charge est nulle.

21.Calculer dans le métal le rapport des ordres de grandeur du courant volumique de déplacement $\vec{j}_D=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ et du courant volumique de conduction $\vec{j}$. En déduire que le courant de déplacement est négligeable.

22.En tenant compte des résultats précédents, établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ $\vec{E}$.

23.En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\underline{E}(y)$. On posera $\delta=\sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$.

24.En déduire l'expression de $\vec{\underline{j}}$ en fonction de y , δ , ω , t et d'une constante que l'on notera $\vec{j}_0$ (amplitude en $y=0$). On justifiera le choix adopté pour la solution sachant que le milieu est infini selon y .

B. Effet Joule dans le métal non parfait

On s'intéresse dans cette question au lien entre les représentations surfaciques et volumiques des courants. On considère un cylindre semi-infini dont la base rectangulaire, d'aire $dS=dx\,dz$ appartient à la surface de séparation entre le vide et le métal et dont les génératrices sont parallèles à l'axe des y . On prendra l'origine de l'axe en un point de la base de la colonne de métal considérée.

25.En pratique, la profondeur de pénétration de l'onde dans le, métal est faible. On peut donc aussi modéliser les courants dans le métal non parfait par un champ de vecteur densité surfacique de courant $\vec{j}_S$. Exprimer $\vec{j}_S$ sous forme d'une intégrale entre zéro et l'infini faisant intervenir le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$.

26.On rappelle que la puissance totale reçue par les charges contenues dans un volume élémentaire $d\tau$ de la part du champ électromagnétique vaut $dP=\vec{j}\,\vec{E}\ d\tau$. Dans le cas d'un métal ohmique, cette puissance correspond à l'effet Joule dP_J . Écrire dP_J pour un volume $d\tau$ en fonction de $\vec{j}$, γ et $d\tau$. On note ici $<dP_J>$ la moyenne temporelle de la puissance dissipée par effet Joule dans l'ensemble de la colonne d'aire de base dS . Trouver l'expression de $<\frac{dP_J}{dS}>$ en fonction de γ et de $\vec{j}$ (le résultat s'exprime en fonction de l'intégrale d'une valeur moyenne).

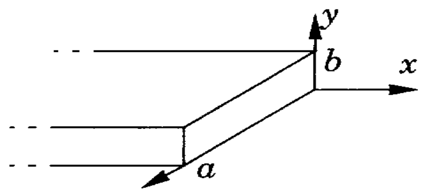
27.En utilisant le résultat de la *question* 25 , exprimer $\vec{\underline{j}}_S$ (sous la forme $\vec{\underline{j}}_S=\vec{j}_{MAX}\exp i(\omega t-\varphi)$). En utilisant le résultat de la *question* 26 , exprimer $<\frac{dP_J}{dS}>$. Les résultats doivent s'exprimer notamment en fonction de j_0 , δ et γ . En déduire: $<\frac{dP_J}{dS}>=\frac{1}{\gamma\delta}<\vec{j}_S^{\,2}>$.

28.Montrer que l'on pourrait considérer que la répartition surfacique $\vec{j}_S$ est équivalente énergétiquement (effet Joule) à une densité de courant volumique uniforme sur une épaisseur δ_{eff} . Exprimer δ_{eff} en fonction de δ .

C. Pertes énergétiques dans le guide et optimisation

On étudie dans cette partie les pertes dues à l'effet Joule dans le guide rectangulaire. On considère en première approximation que γ est suffisamment grand pour que l'on puisse approximer les champs dans le vide par ceux obtenus dans le cas du métal parfait. Les expressions des champs obtenus dans l'étude du guide sans pertes peuvent être conservées localement, l'amplitude E_0 devenant désormais une fonction évoluant lentement avec x .

On s'intéresse à nouveau au cas du premier mode transversal électrique dont le champ s'écrit : $\underline{\vec{E}}=E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp i(\omega t-k_g x) \vec{u}_z$



29.En utilisant une relation de passage au voisinage d'un métal parfait donner l'expression de $<\frac{dP_J}{dS}>$ en fonction de $<B^2>$ (valeur moyenne dans le temps du champ au voisinage de la surface dS) et de constantes du problème. Préciser l'expression de dS .

On obtient $<\frac{dP_J}{dx}>=\frac{E_0^2}{\gamma\delta\mu_0^2\omega^2}\left[\frac{\pi^2 a}{b^2}+\frac{\pi^2}{2b}+\frac{k_g^2 b}{2}\right]$

30.Montrer que la valeur moyenne dans le temps de la puissance dissipée par unité de longueur du guide peut se mettre sous la forme: $<\frac{dP_J}{dx}>=p_0\left(\frac{a\lambda_0}{2b^2}+\frac{b}{\lambda_0}\right)$ où p_0 est une constante (p_0 est indépendant des dimensions du guide) à déterminer en fonction de E_0 , λ_0 (longueur d'onde dans le vide), γ , δ , μ_0 et c .

31.On suppose fixée la longueur a transversale du guide. Déterminer en fonction de λ_0 et a la valeur optimale b_0 pour laquelle il y a minimisation des pertes énergétiques lors de la propagation de l'onde dans le guide. Calculer numériquement b_0 dans le cas où $a=2,0\,cm$.

Appareil de recherche des victimes d'avalanche

Les chances de survie d'une personne accidentellement ensevelie par une avalanche dépendent de façon cruciale du temps mis par les sauveteurs pour la retrouver sous la couche neigeuse. Pour cette raison, des appareils de recherche des victimes d'avalanche (ARVA) ont été mis au point depuis les années 90. La victime étant équipée d'un émetteur portable d'ondes hertziennes, un sauveteur muni d'un récepteur peut rapidement la localiser. Ce problème aborde le principe d'utilisation de ces dispositifs. On note (r , θ , φ) les coordonnées sphériques usuelles et ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$) les vecteurs de la base locale associée. On rappelle :

$$\overrightarrow{grad}\, f(r,\theta,\varphi)=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

La célérité des ondes électromagnétiques dans le vide est $c=3{,}00\cdot 10^8\, m.s^{-1}$.

I. Champ rayonné par une petite antenne

Dans les questions suivantes, on demande de préciser 4 conditions successives justifiant certains calculs approchés. Elles seront désignées par $C1$, $C2$, $C3$ et $C4$. On les présentera sous la forme $x \ll y$, x et y étant deux grandeurs physiques.

On considère un dipôle électrique statique de moment dipolaire constant $\vec{p}=p_0\vec{u}_z$ et d'extension spatiale a placé à l'origine O des coordonnées. Le potentiel électrostatique qu'il produit en un point M de l'espace, repéré par $r=OM$ et $\theta=(\vec{u}_z,\overrightarrow{OM})$ est donné par : $V_0(M)=\dfrac{p_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

1. Préciser la condition $C1$ qui permet d'obtenir ce résultat approché. Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}_0(M)$ correspondant.
2. Déterminer l'équation polaire des lignes de champ sous la forme $r=f(\theta)$. On pourra remarquer que le long d'une ligne de champ $\vec{E}$, le vecteur $\vec{E}$ et le vecteur déplacement élémentaire $\vec{dl}$ étant colinéaires, leur produit vectoriel est donc nul. On désignera la constante multiplicative par r_0 .
3. Ces courbes sont représentées sur la *figure* 1 de l'annexe. La compléter en représentant par une flèche le vecteur moment dipolaire $\vec{p}_0$, en traçant l'allure de la ligne équipotentielle $V=0$, en traçant l'allure de 2 lignes équipotentielles correspondant à $V>0$ et de 2 lignes équipotentielles $V<0$. Indiquer le signe de V sur la figure.
4. Déterminer de même l'équation polaire des lignes de niveau de $\|\vec{E}_0\|$ c'est-à-dire des courbes sur lesquelles le champ électrique garde, en norme, une valeur constante. On désignera la constante multiplicative par r_1 . Ces courbes sont représentées sur la *figure* 2 avec la même orientation de $\vec{p}_0$.
5. L'antenne portée par la victime, dont la dimension a est de l'ordre du centimètre, se trouve à

l'origine O des coordonnées, orientée parallèlement à $\vec{u}_z$. Elle est parcourue par des courants de fréquence $f=457\,kHz$. Déterminer numériquement la longueur d'onde λ. du rayonnement qu'elle émet.

6. La condition *C1* étant vérifiée, quelle est la différence de chemin en M entre les ondes émises par les deux points extrêmes de l'antenne séparés de a. Quel est le déphasage entre ces ondes résultant de cette différence de parcours? (réponse en fonction de a, θ, λ).

7. Le champ magnétique rayonné par l'antenne est donné par :

$\vec{B}(M,t)=\frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi}\left[\frac{\ddot{p}(t-r/c)}{rc}+\frac{\dot{p}(t-r/c)}{r^2}\right]\vec{u}_\varphi$ où $\vec{p}=p(t)\vec{u}_z$ est le moment dipolaire de l'antenne. Outre la condition *C1*, ce résultat suppose que l'on traite toute l'antenne comme un dipôle unique. Plus explicitement, cette expression néglige les déphasages entre les ondelettes émises par les différents points de l'antenne vers le point M. À quelle condition *C2* cela est-il valable ?

8. Le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ rayonné par l'antenne est alors donné par : $\vec{E}(M,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[2\cos\theta\left(\frac{\dot{p}}{r^2c}+\frac{p}{r^3}\right)\vec{u}_r+\sin\theta\left(\frac{\ddot{p}}{rc^2}+\frac{\dot{p}}{r^2c}+\frac{p}{r^3}\right)\vec{u}_\theta\right]$. Expliciter sans calculs le raisonnement conduisant à cette expression.

9. Les lignes de champ de $\vec{E}(M,t)$ sont représentées, à un instant donné, sur la *figure* 3. La compléter en représentant par une flèche le vecteur moment dipolaire $\vec{p}$. Justifier le choix réalisé.

10. Dans quelle partie de l'espace, appelée zone statique, $\vec{E}(M\,t)$ s'identifie-t-il à chaque instant au champ électrostatique qui serait créé par le dipôle permanent de moment $p(t)$? Écrire en la justifiant la condition *C3* qui définit cette région.

11. Définir par une condition *C4* la zone dite de rayonnement. Donner l'expression simplifiée de $\vec{E}$ dans ce cas. Justifier la simplification réalisée.

II. Localisation de la victime

Le sauveteur est muni d'une antenne réceptrice reliée à un système audio. Il détecte le signal émis par l'appareil de la victime. À sa recherche, il parcourt quelques dizaines de mètres autour de O.

12. Discuter numériquement la validité de chacune des conditions *C1* à *C4*. Le sauveteur se trouve-t-il dans la zone de rayonnement de l'antenne ou dans la zone statique ?

Les questions suivantes présentent deux méthodes utilisables par le sauveteur pour localiser la victime. Elles appellent des constructions graphiques à rendre sur le document réponse. Le sauveteur en déplacement sur la pente neigeuse sera représenté par un point décrivant une courbe dans le plan de la figure.

On suppose que l'antenne émettrice de la victime est parallèle à la surface du sol et enfouie à faible profondeur. Les *figures* 1, 2 *et* 3 sont alors tracées dans le plan de la surface neigeuse sur laquelle se déplace le sauveteur.

A. Recherche directionnelle

La direction dans laquelle pointe l'antenne réceptrice du sauveteur est repérée par un vecteur unitaire $\vec{u}$ contenu dans le plan de la figure et le signal perçu est proportionnel à la valeur efficace de $\vec{E}\,\vec{u}$. Immobile en un point, le sauveteur fait tourner son récepteur jusqu'à percevoir un signal maximal, puis avance de quelques pas dans la direction de l'antenne. Il s'arrête alors et réitère cette opération jusqu'à se trouver tout près de la victime.

13.Le long de quelle courbe se déplace-t-il approximativement ? Partant de l'un des points A_0 , B_0 ou C_0 placé sur les *figures* 1, 2 *et* 3 (on choisira le point le plus approprié), tracer le chemin suivi par le sauveteur jusqu'à la victime.

B. Recherche en croix

Dans cette méthode, l'orientation du récepteur n'est pas aussi fondamentale. Seules sont pertinentes les variations du signal lors du déplacement du sauveteur. Pour simplifier, nous supposerons donc que ce signal est fonction uniquement de $\|\vec{E}\|$. Partant d'un point M_0 le sauveteur marche en ligne droite en écoutant croître le signal. Il s'arrête au point M_1 où le signal atteint sa valeur maximale. Là, il part dans la direction orthogonale produisant une augmentation du signal pour atteindre un nouveau maximum en M_2 . Il réitère ce processus jusqu'à se trouver tout près de la victime.

14.En choisissant pour M_0 l'un des points A_0 , B_0 ou C_0 (on choisira à nouveau le plus approprié) et démarrant dans la direction définie par le vecteur de la *figure* 4 , tracer le chemin suivi par le sauveteur. On pourra considérer que la victime est atteinte après 2 ou 3 itérations.

15.En pratique, la recherche en croix peut s'avérer plus complexe que dans le cas simple décrit ci-dessus. Dans le cas particulier d'une antenne émettrice enfouie profondément et normale à la surface de la neige, l'antenne réceptrice étant tangente au champ neigeux, que dire du signal reçu quand le sauveteur arrive au-dessus de la victime ?

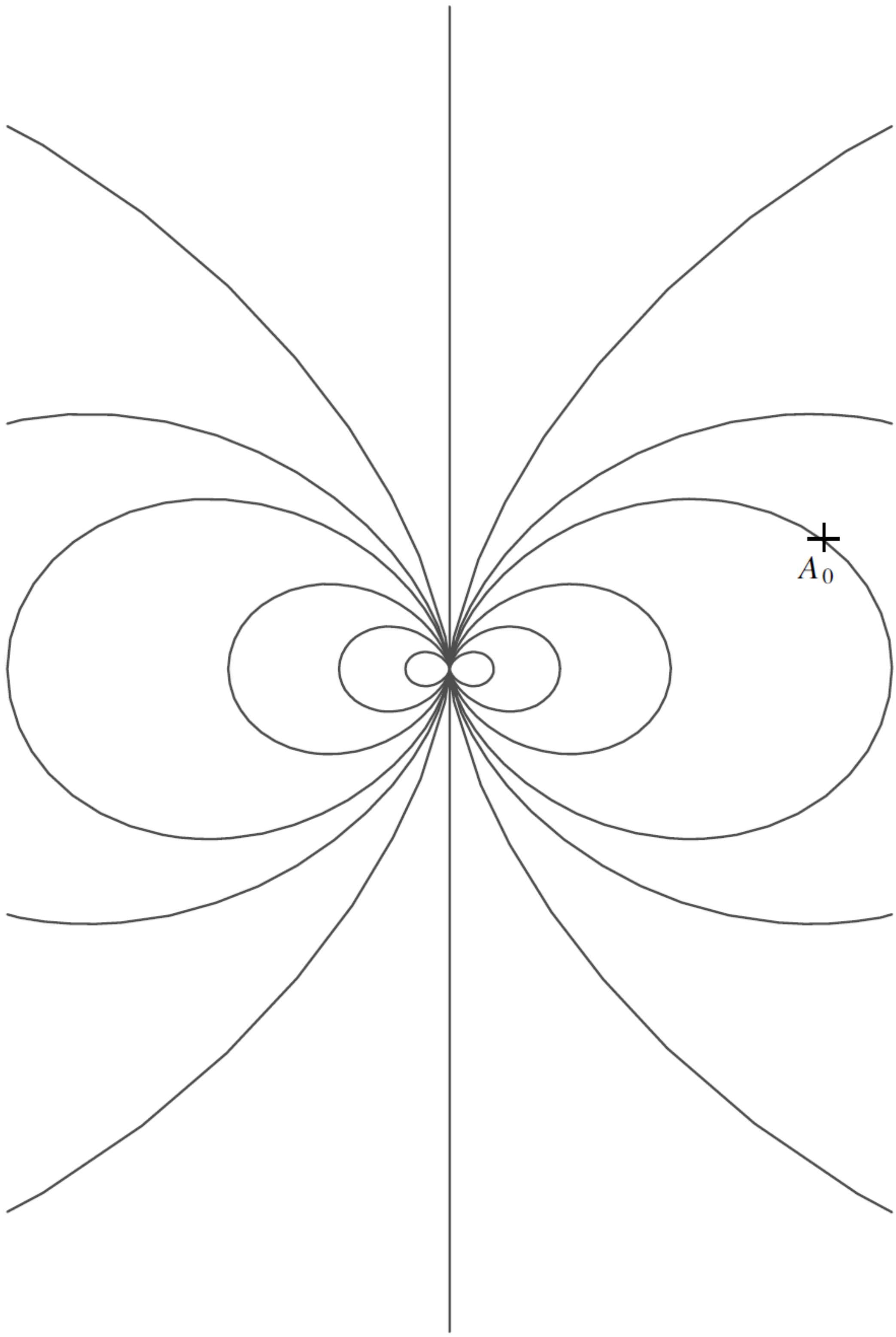


Figure 1 – Lignes de champ créées par un dipôle statique

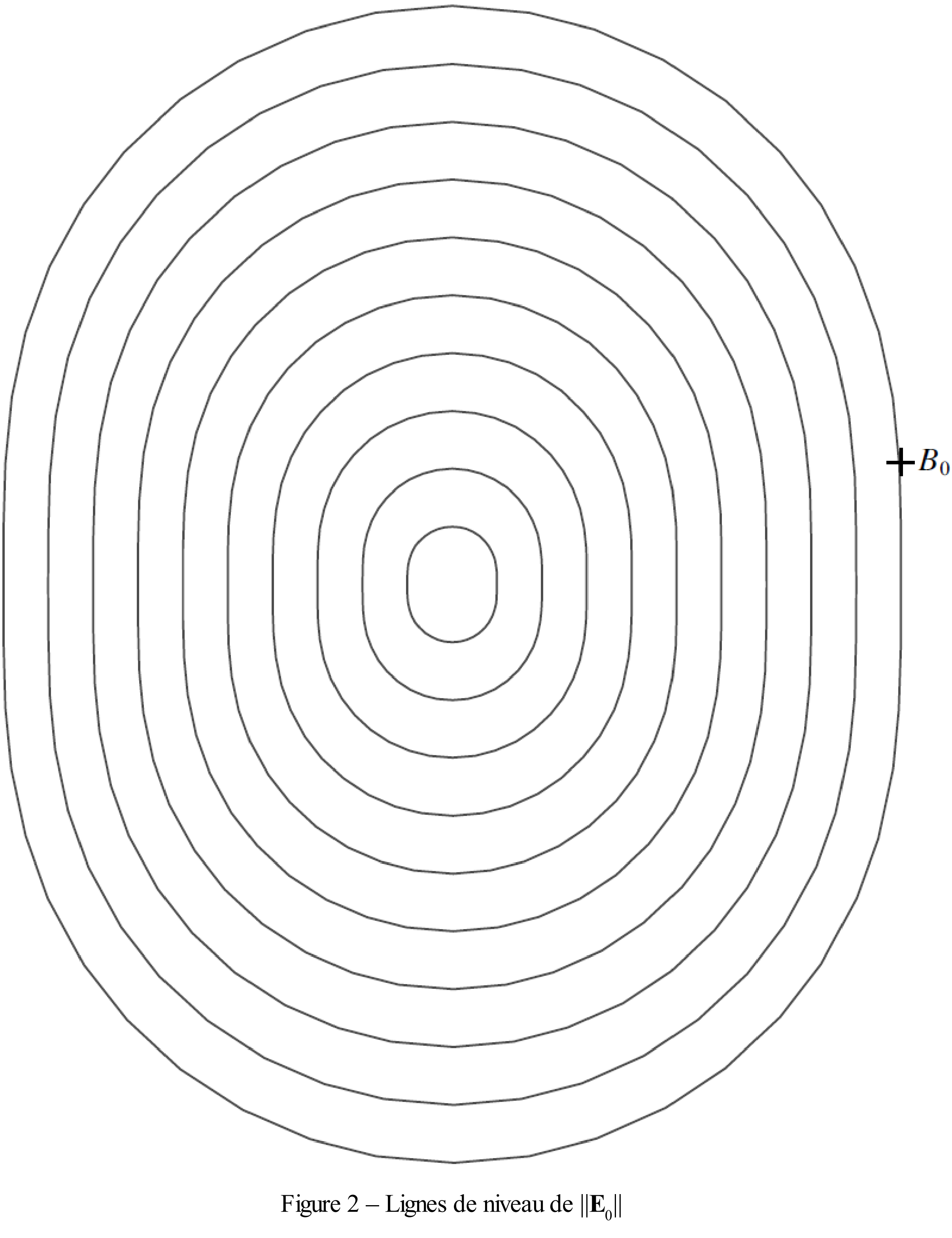


Figure 2 – Lignes de niveau de $||\mathbf{E}_0||$

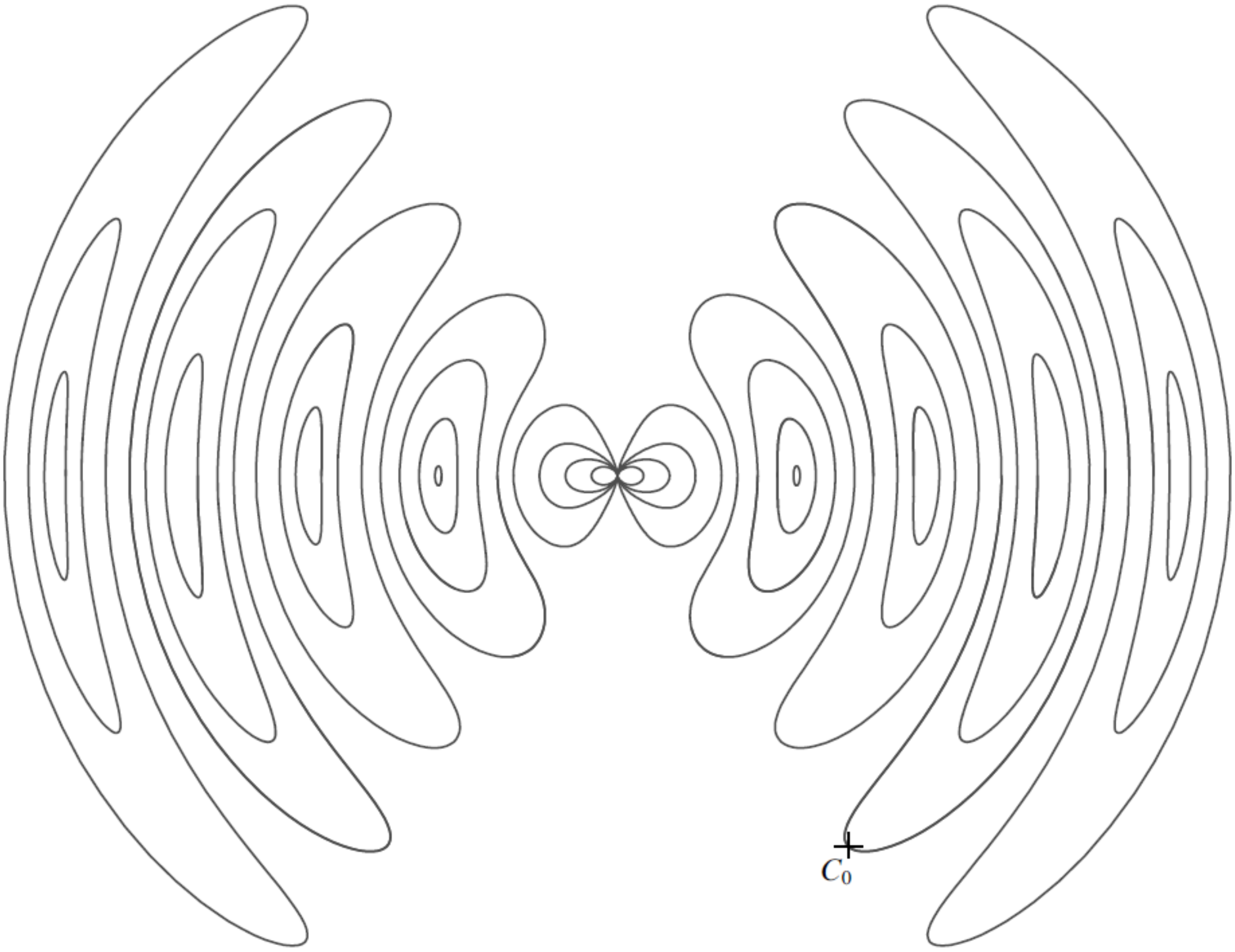


Figure 3 – Lignes du champ électrique rayonné par un dipôle oscillant

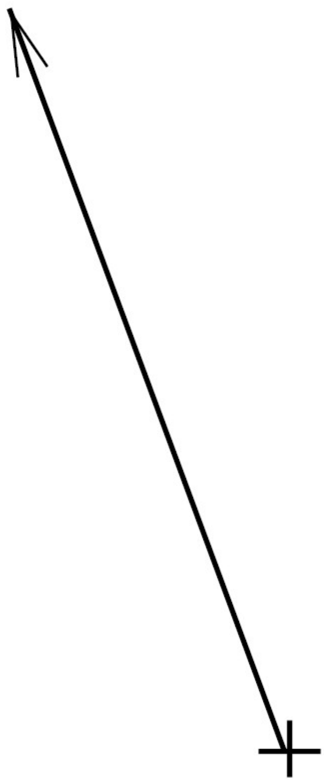


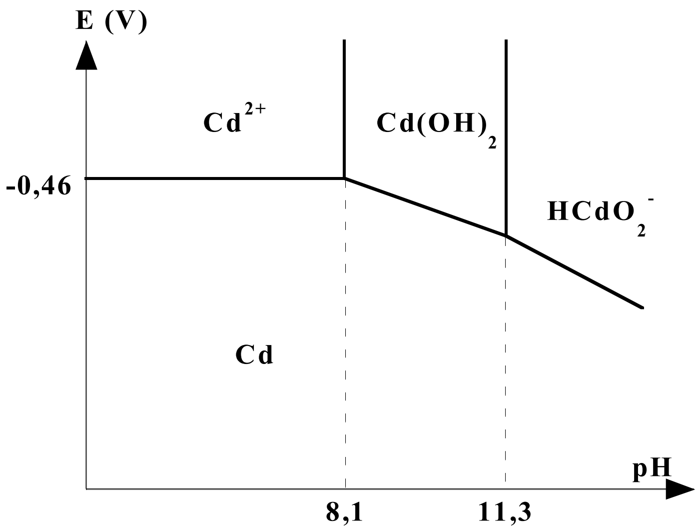
Figure 4 – Direction initiale du mouvement du sauveteur dans la recherche en croix

Cadmium en solution aqueuse

On donne : $\frac{RT}{\mathcal{F}}.\ln(x)=0{,}06\log(x)$, $\mathcal{F}$ étant la constante de Faraday.

I. Diagramme potentiel-pH

On donne le diagramme $E-pH$ suivant, tracé pour une concentration de cadmium dissous égale à $c_0=10^{-2}\,mol.L^{-1}$.



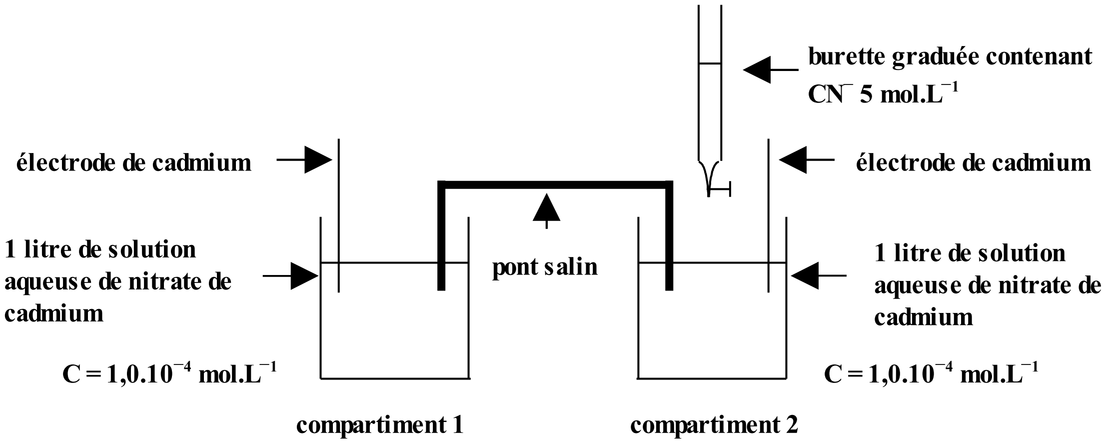
1. Exprimer et calculer $E°(Cd^{2+}/Cd(s))$ à partir du diagramme.
2. Exprimer et calculer le produit de solubilité de $Cd(OH)_2(s)$.
3. Écrire la réaction de formation de $HCdO_2^-$ à partir de $Cd(OH)_2(s)$ et HO^- . Exprimer et calculer la constante de cette réaction.
4. Donner l'équation de la droite séparant le domaine de $Cd(OH)_2(s)$ du domaine de $Cd(s)$.
5. Que se passe-t-il, en principe, si on met du cadmium dans l'eau (on donne $E°(H^+/H_2)=0{,}00\,V$ à $pH=0$ et $25\,°C$) ? Discuter suivant les valeurs du pH . Écrire les réactions éventuelles.

II. Complexation

L'ion cyanure CN^- donne avec les ions cadmium Cd^{2+} un complexe stable de formule $[Cd(CN)_n]^{(n-2)-}$.

On cherche à déterminer expérimentalement la constante de formation globale β_n de ce complexe et l'indice de coordination entier n .

On réalise pour cela une pile formée de deux compartiments reliés par un pont salin.



Dans le compartiment (2), on verse des volumes V_{CN^-} de solution de cyanure de potassium de concentration molaire $C_{CN^-}=5\,mol.L-1$. On mesure la force électromotrice $e=E_2-E_1$ (E_i représentant le potentiel dans le compartiment i) de la pile formée pour différents volumes de la solution de cyanure versés. Les résultats sont à $298\,K$:

V_{CN^-} (mL)	*2,0*	*4,0*	*6,0*	*8,0*	*12,0*	*16,0*	*20,0*
e (mV)	*-327*	*-363*	*-384*	*-399*	*-420*	*-435*	*-447*

6. Écrire la réaction de complexation étudiée dont la constante est β_n .

7. Montrer que la force électromotrice de la pile s'exprime en fonction de β_n , de $[[Cd(CN)_n]^{(n-2)-}]$ concentration en complexe dans le compartiment (2), de $[CN^-]$ concentration des ions CN^- dans le compartiment (2) et de n .

8. Faire le tableau d'avancement pour la réaction de complexation dans le compartiment (2) en admettant que (quelle que soit la valeur de V_{CN^-}) la réaction de complexation est quantitative et que CN^- est en excès, après formation du complexe, dans le compartiment (2).

On admet de plus que la concentration de la solution de cyanure étant très élevée, CN^- est en réalité en très large excès. On admet enfin que l'effet de dilution dû à l'addition de la solution de cyanure dans le compartiment (2) est négligeable.

9. Écrire la relation existant entre e , β_n , n et V_{CN^-} .

10. Comment déterminer graphiquement β_n et n (faire une régression linéaire) en utilisant les résultats expérimentaux ?

11. En déduire la valeur de n et celle de β_n .

Réponses

Guides d'onde

1) →
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E_2} - \vec{E_1} &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n}_{1\to 2}\\ \vec{B_2} - \vec{B_1} &= \mu_0\,\vec{j_S} \wedge \vec{n}_{1\to 2}\end{aligned}}$$

M est un point de la surface

$\vec{E_2}$, $\vec{B_2}$: champs en M dans le milieu 2

$\vec{E_1}$, $\vec{B_1}$: champs en M dans le milieu 1

σ, $\vec{j_S}$: densité de charge surfacique et densité de courant surfacique au point M

$\vec{n}_{1\to 2}$: normale à la surface en M dirigée de 1 vers 2

→
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{E tangentiel est continu}\\ \text{B normal est continu}\end{array}}$$

→ Le métal parfait est le milieu 1

le vide est le milieu 2

Dans le métal parfait $\vec{E_1}$ et $\vec{B_1}$ variable sont nuls.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n}_{ext}$$

$$\boxed{\sigma = \varepsilon_0 (\vec{n}_{ext} \cdot \vec{E})}$$

$$\vec{B} = \mu_0\,\vec{j_S} \wedge \vec{n}_{ext}$$

$$\begin{aligned}\vec{n}_{ext} \wedge \vec{B} &= \mu_0\,\vec{n}_{ext} \wedge (\vec{j_S} \wedge \vec{n}_{ext})\\ &= \mu_0 \Big(\vec{j_S}\,\vec{n}_{ext}^{\,2} - \vec{n}_{ext}\,\underbrace{(\vec{n}_{ext} \cdot \vec{j_S})}_{\text{nul}}\Big)\end{aligned}$$

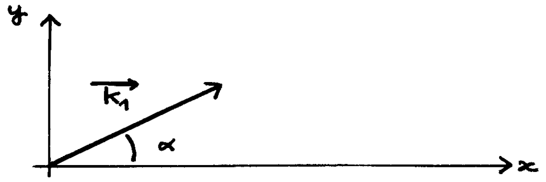
$$\boxed{\vec{j_S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{n}_{ext} \wedge \vec{B})}$$

---

2) On suppose $\vec{E} = E_0 \exp i(\omega t - kx)\,\vec{u_z}$. Ce champ est <u>tangentiel</u> aux plans métalliques parfaits en $y=0$ et $y=b$. Il <u>doit s'annuler en $y=0$ et $y=b$</u> ce qui n'est pas le cas puisque E_0 est indépendant de y.

---

3)



La norme de $\vec{k_1}$ vaut $k_0 = \frac{\omega}{c}$

$$\boxed{\vec{k_1} = k_0 \left(\cos\alpha \, \vec{u_x} + \sin\alpha \, \vec{u_y} \right)}$$

Le champ est :

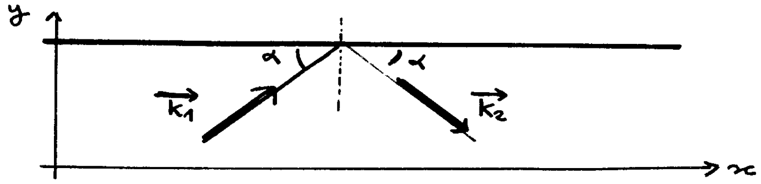
$$\vec{E_1} = E_0 \exp i \left(\omega t - \vec{k_1} \, \vec{r_{OM}} \right)$$

$$\boxed{\vec{E_1} = E_0 \exp i \left(\omega t - k_0 \cos\alpha \, x - k_0 \sin\alpha \, y \right) \vec{u_z}}$$

---

4) L'angle d'incidence sur le plan $y = b$ vaut $\frac{\pi}{2} - \alpha$

L'angle de réflexion a donc la même valeur absolue.



$$\boxed{\vec{k_2} = k_0 \left(\cos\alpha \, \vec{u_x} - \sin\alpha \, \vec{u_y} \right)}$$

Le champ de l'onde réfléchie est noté :

$$\vec{E_2} = \underline{E_0'} \exp i \left(\omega t - \vec{k_2} \, \vec{r_{OM}} \right)$$

$$\boxed{\vec{E_2} = \underline{E_0'} \exp i \left(\omega t - k_0 \cos\alpha \, x + k_0 \sin\alpha \, y \right) \vec{u_z}}$$

---

5) $$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} = \exp i \left(\omega t - k_0 \cos\alpha \, x \right) \Big[& E_0 \exp\left(-i k_0 \sin\alpha \, y \right) \\ & + \underline{E_0'} \exp\left(i k_0 \sin\alpha \, y \right) \Big] \vec{u_z} \end{aligned}}$$

qui, en vertu des conditions aux limites, doit s'annuler en $y = 0$ et en $y = b$.

$\longrightarrow$ <u>en $y = 0$, on doit avoir :</u>

$$E_0 + \underline{E_0'} = 0$$

$$\boxed{\underline{E_0'} = - E_0}$$

(cf : déphasage de π à la réflexion) nouvelle écriture de $\vec{E}$ en tenant compte de ce résultat :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp i(\omega t - k_0 \cos\alpha\, x)\ \vec{u_z} \times [\exp(-i k_0 \sin\alpha\, y) - \exp(i k_0 \sin\alpha\, y)]$$

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = -2i E_0 \sin(k_0 \sin\alpha\, y) \exp i(\omega t - k_0 \cos\alpha\, x)\ \vec{u_z}}$$

→ en $y = b$, on doit avoir :

$$\sin(k_0 \sin\alpha\, b) = 0$$

$$k_0 \sin\alpha\, b = p\pi$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$

avec $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

$$\boxed{\sin\alpha = p \frac{\lambda_0}{2b}}$$

remarque

$$0 < \sin\alpha < 1$$

$$\boxed{0 < p < \frac{2b}{\lambda_0}}$$

---

6) → $$\boxed{\vec{E} = 2E_0 \sin(k_0 \sin\alpha\, y) \sin(\omega t - k_0 \cos\alpha\, x)\ \vec{u_z}}$$

→ La propagation s'effectue dans le sens des x croissants.

→

$$\boxed{k_g = k_0 \cos\alpha}$$

---

7) On exprime la fréquence en fonction des données autres :

$$k_0 \sin\alpha\, b = p\pi$$

$$\frac{2\pi f}{c} \sin\alpha\, b = p\pi$$

$$f = p \frac{c}{2b \sin\alpha}$$

La valeur minimale de f est obtenue pour $p_{min} = 1$ (mode 1)

et $\sin\alpha_{max} = 1$

$$\boxed{f_{min} = \frac{c}{2b}}$$

(fréquence de coupure du mode 1)

A.N. propagation si

$$f > f_{min}$$

$$> \frac{c}{2b}$$

$$\boxed{b > \frac{c}{2f}}$$

$$> \frac{3.10^8}{2 \times 2{,}5\ 10^9}$$

$$\boxed{b > 6{,}0 \text{ cm}}$$

---

8) Pour le mode 2, on reprend la démonstration précédente en imposant $p = 2$. La fréquence de coupure est donc double et l'inégalité pour qu'il y ait propagation selon le mode 2 est alors $b > 12{,}0$ cm

Pour un guide monomode

$$\boxed{6{,}0 \text{ cm} < b < 12{,}0 \text{ cm}}$$

---

9)

$$k_o^2 = k_{ox}^2 + k_{oy}^2$$

$$= \underset{\substack{\text{ou} \\ k_g^2}}{k_o^2 \cos^2\alpha} + \underset{\substack{\text{ou} \\ \frac{p^2\pi^2}{b^2}}}{k_o^2 \sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\underset{\substack{\uparrow \\ \frac{\omega^2}{c^2}}}{k_o^2} = k_g^2 + \frac{p^2\pi^2}{b^2}}$$

C'est la <u>relation de dispersion</u> qui donne la relation entre k_g et ω

---

10) On différencie la relation de dispersion précédente :

$$\frac{1}{c^2} 2\omega \, d\omega = 2 k_g \, dk_g$$

$$\frac{\omega}{k_g} \frac{d\omega}{dk_g} = c^2$$

$$\boxed{v_\varphi \; v_G = c^2}$$

avec :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_g}$$

$$= \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2\pi^2}{b^2}}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1 - p^2 \frac{\pi^2 c^2}{b^2} \frac{1}{\omega^2}}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1 - p^2 \frac{c^2}{4b^2} \frac{1}{f^2}}}$$

$$\boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - p^2 \left(\frac{f_{min}}{f}\right)^2}}}$$

$$\boxed{v_G = c\sqrt{1 - p^2 \left(\frac{f_{min}}{f}\right)^2}}$$

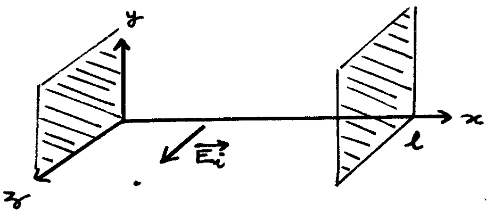
---

11) Le champ est normal aux plans $z = 0$ et $z = a$. Il peut donc y avoir discontinuité de $\vec{E}$ qui n'a pas à s'annuler au niveau de ces deux plans. Il apparaîtra alors une densité surfacique de charge σ sur ces plans.

---

12)
$$\vec{E_i} = \underline{E}_0(y) \exp i(\omega t - k_g x) \, \vec{u_z}$$

$$= \underbrace{-2iE_0 \sin(k_0 \sin\alpha \, y)}_{\sin\left(\frac{p\pi y}{b}\right)} \exp i(\omega t - \underbrace{k_0 \cos\alpha}_{} \, x) \, \vec{u_z}$$



$\boxed{\text{Le champ } \vec{E_i} \text{ est tangent aux deux nouveaux plans or il ne s'annule pas en } x=\ell \text{ (ni en } x=0\text{)}.}$

Il faut donc imaginer un champ réfléchi.

$$\vec{E_r} = \underline{K}\ \underline{E_0}(y)\ \exp i(\omega t + k_g x)\ \vec{u_z}$$

(onde qui se propage dans le sens des x décroissants)

$$\vec{\underline{E}}_{total} = \underline{E_0}(y)\ \exp(i\omega t)\ \vec{u_z}\ (\exp -i k_g x + \underline{K}\ \exp +i k_g x)$$

<u>doit s'annuler en $x=0$</u>

$$1 + \underline{K} = 0$$
$$\underline{K} = -1$$

(déphasage de π à la réflexion)

$$\vec{\underline{E}}_{total} = -2i\underline{E_0}(y)\ \exp(i\omega t)\ \sin(k_g x)\ \vec{u_z}$$

<u>doit s'annuler en $x=\ell$</u>

$$\sin k_g \ell = 0$$
$$k_g \ell = m\pi \qquad m \in \mathbb{N}^*$$
$$\boxed{k_g = \frac{m\pi}{\ell}}$$

---

13) La relation de dispersion écrite en 9) devient :

$$k_0^2 = k_g^2 + \frac{p^2\pi^2}{b^2}$$
$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{m^2\pi^2}{\ell^2} + \frac{p^2\pi^2}{b^2}$$

$$\boxed{\omega = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2}}$$

---

14)

$$\underline{\vec{E}}_{total} = -2i\ \underline{E_0(y)}\ \sin(k_g x)\ \exp(i\omega t)\ \vec{u_z}$$

$$= -2i\left(-2i E_0 \sin\left(\frac{p\pi y}{b}\right)\right) \sin(k_g x)\ \exp(i\omega t)\ \vec{u_z}$$

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underbrace{-4E_0}_{\text{noté } E_c} \sin\left(\frac{p\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) \exp(i\omega t)\ \vec{u_z}}$$

---

15)

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = E_c \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \exp(i\omega t)\ \vec{u_z}}$$

Pour obtenir $\underline{\vec{B}}$ on utilise l'équation de Maxwell-Faraday.

$$\overrightarrow{rot}\ \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}}$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{i}{\omega} \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}}$$

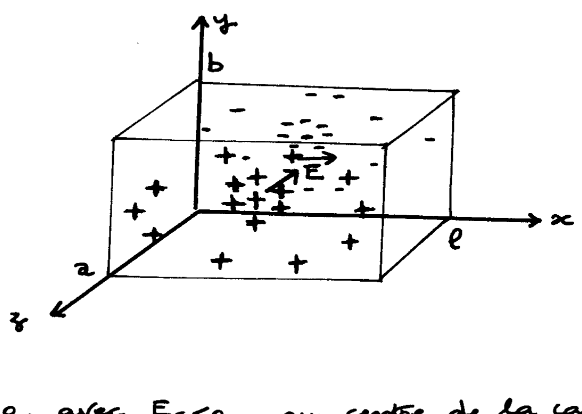
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{E} \end{vmatrix}$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{i}{\omega}\frac{\partial \underline{E}}{\partial y}\ \vec{u_x} - \frac{i}{\omega}\frac{\partial \underline{E}}{\partial x}\ \vec{u_y}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{B_x} &= \frac{i E_c}{\omega}\ \frac{\pi}{b}\ \sin\frac{\pi x}{\ell}\ \cos\frac{\pi y}{b}\ \exp(i\omega t) \\ \underline{B_y} &= -\frac{i E_c}{\omega}\ \frac{\pi}{\ell}\ \cos\frac{\pi x}{\ell}\ \sin\frac{\pi y}{b}\ \exp(i\omega t) \end{aligned}}$$

---

16)



(en $t=0$, avec $E_c<0$, au centre de la cavité, $E = E_c < 0$)

$$\vec{E} = E_C \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \cos\omega t \ \vec{u_z}$$

Le champ $\vec{E}$ est normal aux faces $z=0$ et $z=a$ donc c'est, sur ces deux faces, que peut apparaître de la charge surfacique.

en $z=0$

$$\sigma = \varepsilon_0 \left(\vec{n}_{ext} \cdot \vec{E}_{(z=0)} \right)$$

$$= \varepsilon_0 \left(\vec{u_z} \ \vec{E}_{(z=0)} \right)$$

$$\boxed{\sigma_{(z=0)} = \varepsilon_0 E_C \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \cos\omega t}$$

en $z=a$

$$\sigma = \varepsilon_0 \left(\vec{n}_{ext} \cdot \vec{E}_{(z=a)} \right)$$

$$= \varepsilon_0 \left(-\vec{u_z} \ \vec{E}_{(z=a)} \right)$$

$$\boxed{\sigma_{(z=a)} = -\varepsilon_0 E_C \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \cos\omega t}$$

---

17) Pour les faces $x=0$ et $x=\ell$, existence d'un B_y non nul tangentiel donc existence de courant surfacique (selon z)

Pour les faces $y=0$ et $y=b$, existence d'un B_x non nul tangentiel donc existence de courant surfacique (selon z)

Pour les faces $z=0$ et $z=a$, existence de B_x et B_y tangentiels donc courant surfacique (selon x et y)

$\boxed{\text{Des courants surfaciques existent sur les 6 faces}}$

---

18) L'énergie électrique volumique est

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_c^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos^2\omega t$$

L'énergie électrique dans la cavité est :

$$U_E(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_c^2 \cos^2\omega t \int_{x=0}^{\ell}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{a} \sin^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) dx\,dy\,dz$$

On peut faire le calcul ou, en définissant la valeur moyenne dans l'espace de u_E

$$u_{E_{moy}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_c^2 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \cos^2\omega t$$

prévoir le résultat

$$U_E(t) = u_{E_{moy}} \times V \qquad (\text{avec } V = a\,b\,\ell)$$

finalement :

$$\boxed{U_{E}(t) = \frac{1}{8}\varepsilon_0 E_c^2 V \cos^2\omega t}$$

De même :

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

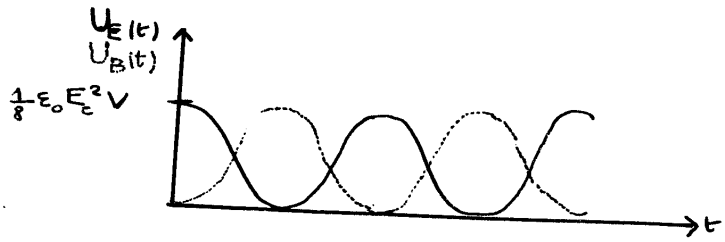
$$= \frac{1}{2\mu_0}(B_x^2 + B_y^2)$$

$$u_{B_{moy}} = \frac{1}{2\mu_0}(B_x^2{}_{moy} + B_y^2{}_{moy})$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\frac{E_c^2}{\omega^2}\sin^2\omega t\left(\frac{\pi^2}{b^2}\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{\ell^2}\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{8\mu_0}\frac{E_c^2}{\omega^2}\sin^2\omega t\underbrace{\left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{\ell^2}\right)}_{\frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$\boxed{U_B(t) = \frac{1}{8}\varepsilon_0 E_c^2 V \sin^2\omega t}$$



$$U_{EM} = U_E(t) + U_B(t)$$

$$\boxed{U_{EM} = \frac{1}{8}\varepsilon_0 E_c^2 V}$$

En l'absence de dissipation (cf parois en métal parfait) l'énergie est constante.

Elle oscille entre énergie électrique et énergie magnétique comme dans un circuit LC non résistif

19) $\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$ (loi d'Ohm locale)

---

20) L'équation de Maxwell-gauss donne :

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

or ici $\vec{E} = E_x(y,t)\,\vec{u_x}$ donc $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$, la divergence est donc nulle.

$$\boxed{\rho = 0}$$

---

21) L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$= \mu_0 \left(\gamma \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

En complexes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{B}} = \mu_0 \left(\gamma \underline{\vec{E}} + i\omega\varepsilon_0 \underline{\vec{E}}\right)$$

Les deux termes sont en quadrature. On compare les amplitudes :

$$\boxed{\frac{\text{amplitude de } \vec{j}_D}{\text{amplitude de } \vec{j}} = \frac{\omega \varepsilon_0}{\gamma}}$$

A.N.

$$= \frac{2\pi f \varepsilon_0}{\gamma}$$

$$= \frac{2\pi\ 2{,}5\ 10^9\ \frac{1}{36\pi\ 10^9}}{5{,}9\ 10^7}$$

$$= \underline{2{,}4\ 10^{-9}}$$

$$\ll 1$$

On négligera le courant de déplacement.

---

22) équations de Maxwell :

$$\text{div}\,\vec{E} = 0 \qquad \text{M.G.}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{M.F.}$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \text{M flux}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E} \qquad \text{M. A}$$

On prend le rotationnel de M.F.

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\,\vec{B})$$

$$\overrightarrow{grad}(\underbrace{div\,\vec{E}}_{nul}) - \Delta\vec{E} = -\mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}}$$

---

23) On projette sur $\vec{u_x}$

$$\Delta E - \mu_0\gamma\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

et on passe aux complexes :

$$\Delta\underline{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial\underline{E}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{d^2\underline{E}(y)}{dy^2}\exp(i\omega t) - \mu_0\gamma\, i\omega\,\underline{E}(y)\exp(i\omega t) = 0$$

$$\frac{d^2\underline{E}(y)}{dy^2} - i\,\mu_0\gamma\omega\,\underline{E}(y) = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\underline{E}(y)}{dy^2} - \frac{2i}{\delta^2}\underline{E}(y) = 0}$$

---

24) Equation caractéristique :

$$r^2 = \frac{2i}{\delta^2} = \frac{2\exp i\frac{\pi}{2}}{\delta^2}$$

$$r = \pm\frac{\sqrt{2}}{\delta}\exp i\frac{\pi}{4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\delta}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boxed{r = \pm\frac{1}{\delta}(1+i)}$$

Si on adopte le +, E va tendre vers l'infini avec y donc :

$$\underline{E}(y) = cste\; e^{-\frac{1}{\delta}(1+i)y}$$

$$= cste\;\underbrace{e^{-\frac{y}{\delta}}}_{\substack{\text{tend vers zéro}\\ \text{si } y\to\infty}}\; e^{-i\frac{y}{\delta}}$$

$$\vec{E} = cste \quad e^{-\frac{y}{\delta}} \quad e^{i(\omega t - \frac{y}{\delta})} \ \vec{u_x}$$

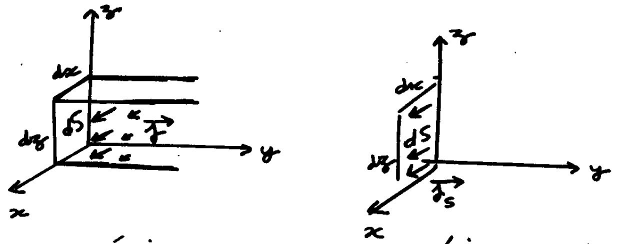
et $\quad \vec{J} = \gamma \vec{E}$

finalement

$$\boxed{\vec{J} = \vec{J_0} \ \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right) \ \exp i\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right)}$$

---

25)



$$dI = \int \vec{J} \ \vec{dS_0} \quad (\vec{dS_0} = dy\,dz\,\vec{u_x})$$

$$= \left(\int_{y=0}^{y=\infty} J\,dy\right) dz$$

$$dI = \vec{J_S} \ dl \ \vec{u_x} \quad (dl = dz)$$

$$= J_S \ dz$$

En comparant, on aura

$$\boxed{\vec{J_S} = \int_{y=0}^{y=\infty} \vec{J} \ dy}$$

---

26) Pour le volume $d\tau$

$$dP = \vec{J} \ \vec{E} \ d\tau \qquad \text{avec ici } \vec{J} = \gamma \vec{E}$$

$$\boxed{dP_J = \frac{\vec{J}^2}{\gamma} \ d\tau}$$

Pour la colonne d'aire dS de $y=0$ à $y=\infty$

$$dP_J = \left(\int_{y=0}^{y=\infty} \frac{\vec{J}^2}{\gamma} \ dy\right) dS$$

On s'intéresse à la valeur moyenne dans le temps :

$$\langle dP_J \rangle = \left(\int_0^{\infty} \frac{\langle \vec{J}^2 \rangle}{\gamma} \ dy\right) \ dS$$

$$\boxed{\left\langle \frac{dP_J}{dS} \right\rangle = \int_0^{\infty} \frac{\langle \vec{J}^2 \rangle}{\gamma} \ dy}$$

---

27) $\longrightarrow$

$$\underline{\vec{J_s}} = \int_0^{\infty} \underline{\vec{J}}\, dy$$

$$= \vec{J_0} \exp i\omega t \int_0^{\infty} \exp ry \; dy$$

(avec $r = -\frac{\sqrt{2}}{\delta} \exp i\frac{\pi}{4}$ ou $= -\frac{1}{\delta}(1+i)$)

$$= \vec{J_0} \exp i\omega t \; \frac{0-1}{r}$$

$$\boxed{\underline{\vec{J_s}} = \frac{\vec{J_0}\,\delta}{\sqrt{2}} \exp i(\omega t - \frac{\pi}{4})}$$

$$\boxed{\vec{J_s} = \frac{J_0\,\delta}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - \frac{\pi}{4})\,\vec{u_x}}$$

$\longrightarrow$

$$<\frac{dP_J}{dS}> = \int_0^{\infty} <\frac{J^2}{\gamma}> dy$$

avec
$$J = J_0 \exp(-\frac{y}{\delta}) \cos(\omega t - \frac{y}{\delta})$$
$$J^2 = J_0^2 \exp(-\frac{2y}{\delta}) \cos^2(\omega t - \frac{y}{\delta})$$
$$<J^2> = J_0^2 \exp(-\frac{2y}{\delta}) \quad \frac{1}{2}$$

$$<\frac{dP_J}{dS}> = \frac{J_0^2}{2\gamma} \underbrace{\int_0^{\infty} \exp(-\frac{2y}{\delta})\, dy}_{-\frac{\delta}{2}(0-1)}$$

$$\boxed{<\frac{dP_J}{dS}> = \frac{J_0^2\,\delta}{4\gamma}}$$

$\longrightarrow$

$$\vec{J_s}^2 = \frac{J_0^2\,\delta^2}{2} \cos^2(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

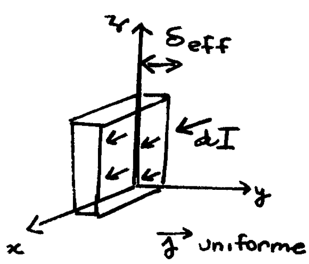
$$<\vec{J_s}^2> = \frac{J_0^2\,\delta^2}{4}$$

on remarque donc que :

$$\boxed{<\frac{dP_J}{dS}> = \frac{<J_s^2>}{\gamma\,\delta}}$$

---

28)



modélisation envisagée pour décrire l'effet Joule dans le cadre de la modélisation envisagée (courant uniforme sous l'épaisseur δ_{eff}) on aurait

cf : $P = R I^2$

$$\langle dP_J \rangle = dR \quad dI^2_{efficace}$$

avec : cf. $R = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}$ ← la section

$$dR = \frac{1}{\gamma}\frac{dx}{dz\ \delta_{eff}}$$

et : cf. $I^2_{efficace} = \langle I(t)^2 \rangle$

$$dI^2_{efficace} = \langle (j_S\, dz)^2 \rangle$$

↑ voir dI question 25

Finalement :

$$\langle dP_J \rangle = \frac{1}{\gamma}\frac{dx}{dz\ \delta_{eff}} \langle j_S^2 \rangle\, dz^2$$

$$= \frac{\langle j_S^2 \rangle}{\gamma\ \delta_{eff}} \underbrace{dx\, dz}_{\text{le } dS \text{ du problème}}$$

on trouve donc

$$\boxed{\delta_{eff} = \delta}$$

<u>L'effet Joule est le même que si le courant passait uniformément sous l'épaisseur δ</u>

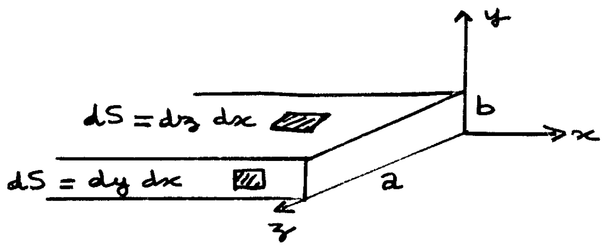
---

29) Pour le métal parfait, $\vec{B}$ est tangentiel aux parois donc, en vertu des conditions de passage

$$\boxed{\|\vec{j_S}\| = \frac{\|\vec{B}\|}{\mu_0}}$$

$$\frac{\langle dP_J \rangle}{dS} = \frac{\langle j_S^2 \rangle}{\gamma\,\delta}$$

$$\boxed{\frac{\langle dP_J \rangle}{dS} = \frac{\langle B^2 \rangle}{\gamma\,\delta\,\mu_0^2}}$$



30)
$$\left\langle \frac{dP_J}{dx} \right\rangle = \frac{E_0^2}{\gamma \delta \mu_0^2 \omega^2} \left[\frac{\pi^2 a}{b^2} + \frac{\pi^2}{2b} + \frac{b}{2} k_g^2 \right]$$

on reporte l'équation de dispersion pour éliminer k_g^2

$$k_g^2 + \frac{\pi^2}{b^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\left\langle \frac{dP_J}{dx} \right\rangle = \frac{E_0^2}{\gamma \delta \mu_0^2 \omega^2} \left[\frac{\pi^2 a}{b^2} + \frac{b}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \right]$$

avec $\frac{\omega^2}{c^2} = k_0^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_0^2}$

$$= \frac{E_0^2 \lambda_0^2}{\gamma \delta \mu_0^2 \cancel{4\pi^2} c^2} \left[\frac{\cancel{\pi^2} a}{b^2} + \frac{2\cancel{\pi^2} b}{\lambda_0^2} \right]$$

$$\left\langle \frac{dP_J}{dx} \right\rangle = \underbrace{\frac{E_0^2 \lambda_0}{2\gamma \delta \mu_0^2 c^2}}_{P_0} \left[\frac{a \lambda_0}{2 b^2} + \frac{b}{\lambda_0} \right]$$

avec $\boxed{P_0 = \frac{E_0^2 \lambda_0}{2 \gamma \delta \mu_0^2 c^2}}$

---

31) On cherche l'extremum de

$$f(b) = \left(\frac{a \lambda_0}{2 b^2} + \frac{b}{\lambda_0} \right)$$

$$\frac{df(b)}{db} = -\frac{a \lambda_0}{b^3} + \frac{1}{\lambda_0}$$

pour $\boxed{b_0 = (a \lambda_0^2)^{1/3}}$

<u>remarque</u> : en faisant $b = 0$ ou $b = \infty$ dans $f(b)$ on vérifie bien que l'extremum est un minimum

A.N. $b_0 = \left(2.10^{-2} \left(\frac{3.10^8}{2,5\,10^9} \right)^2 \right)^{1/3}$

$\boxed{b_0 = 6,6 \text{ cm}}$

C'est la valeur proposée par l'énoncé

Appareil de recherche des victimes d'avalanche

1) → approximation dipolaire C1 :

$$\boxed{a \ll r}$$

→

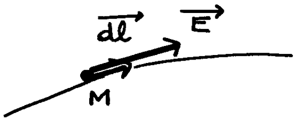
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{u_r} - \frac{\partial V}{r\,\partial\theta}\,\vec{u_\theta} - \frac{\partial V}{r\sin\theta\,\partial\varphi}\,\vec{u_\varphi}$$

$$\boxed{\vec{E_0} = \frac{2p_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\vec{u_r} + \frac{p_0\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\vec{u_\theta} + 0\,\vec{u_\varphi}}$$

---

2) →



sur une ligne de champ

$$\vec{E} \wedge \vec{dl} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} E_r \\ E_\theta \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ r\sin\theta\, d\varphi \end{vmatrix}$$

deux des équations donnent

$$d\varphi = 0$$

$$\boxed{\varphi = \mathrm{cste}}$$

(la ligne de champ est contenue dans un demi-plan méridien)

La troisième équation donne

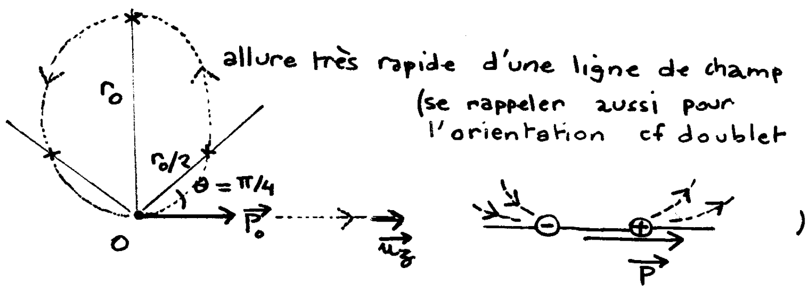
$$E_r\, r\, d\theta - E_\theta\, dr = 0$$

$$\frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2r\cos\theta\, d\theta - \sin\theta\, dr\right) = 0$$

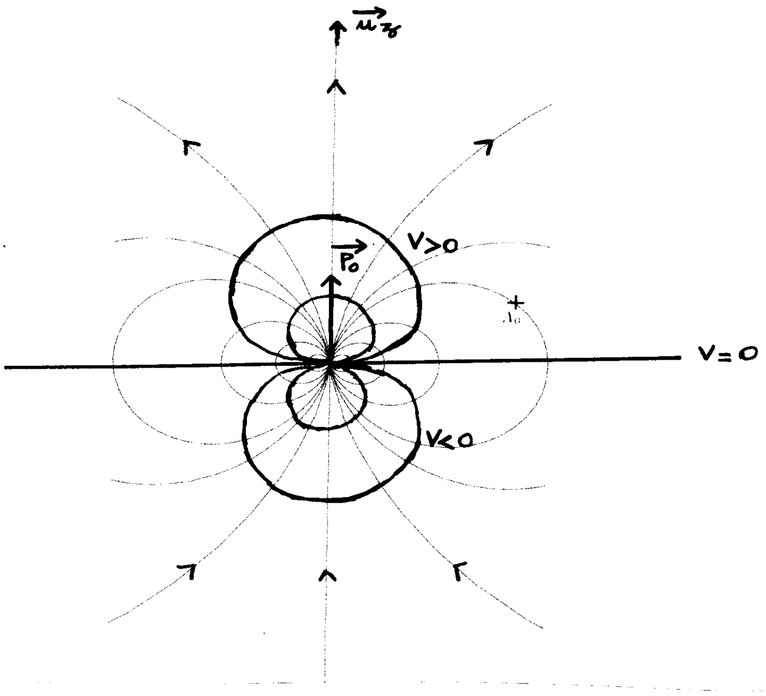
$$\frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta \; d\theta}{\sin\theta}$$

$$\ln r = \ln(\sin^2\theta) + \underbrace{cte}_{\ln r_0}$$

$$\boxed{r = r_0 \sin^2\theta}$$



3)



Si on pense au doublet, l'équipotentielle V = 0 est sur la médiatrice des deux charges.
Les équipotentielles V > 0 sont du côté de la charge + .

$\boxed{\text{Les équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ}}$
(d'où le tracé)

4) $$\|\vec{E}_0\|^2 = \left(\frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)^2 \underbrace{(4\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1+3\cos^2\theta} = \text{constante}$$

$$r^6 = r_1^6\,(1+3\cos^2\theta)$$

$$\boxed{r = r_1\,(1+3\cos^2\theta)^{1/6}}$$

---

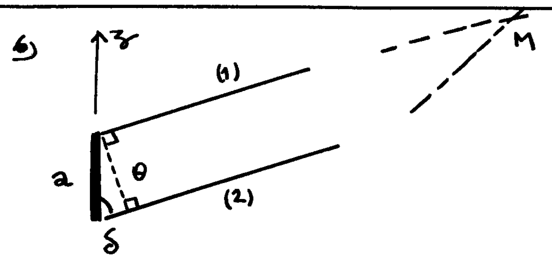
5) $$\lambda = \frac{c}{f}$$

A.N. $$= \frac{3.10^8}{457\ 10^3}$$

$$\boxed{\lambda = 656\ m}$$

---

6)



$$\boxed{\delta_{2/1} \simeq a\cos\theta}$$

car les deux rayons sont quasiparallèles.

$$\boxed{\varphi_{\substack{\text{retard}\\ \text{de } 2/1}} = \frac{2\pi\, a\cos\theta}{\lambda}}$$

(cf $\vec{k}\,\vec{r}$ pour le déphasage retard)

---

7) il suffit que

$$\frac{2\pi a\cos\theta}{\lambda} \ll 2\pi$$

Condition C2 (approximation non relativiste)

$$\boxed{a \ll \lambda}$$

---

8) Pour calculer le champ $\vec{E}$, on utilise l'équation de Maxwell-Ampère (dans le vide)

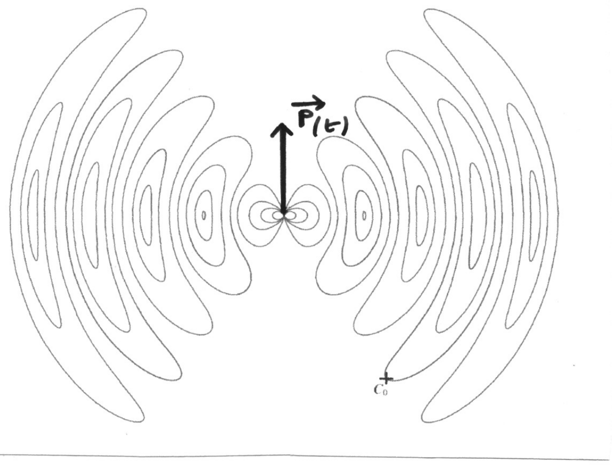
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

soit $$\boxed{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}}$$

Le calcul se fait en sphériques.
Il faut ensuite intégrer par rapport au temps. On laisse tomber les termes indépendants du temps (termes statiques)

---

9)



Le moment dipolaire est vertical.

– soit on remarque que dans la zone proche de l'origine (où les retards sont "négligeables") on retrouve l'allure des lignes de champ du dipôle électrostatique ...

– soit on sait que le dipôle ne rayonne pas selon son axe.

---

10) zone statique où le retard dû à la propagation est négligeable

$$\underset{\text{dephasage de O à M}}{\varphi} = \frac{2\pi}{\lambda}\,r$$

il faut $\varphi \ll 2\pi$

Condition C3 (zone statique)

$$\boxed{r \ll \lambda}$$

---

11) Condition C4 (zone de rayonnement)

$$\boxed{r \gg \lambda}$$

Il va rester :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sin\theta \, \frac{\ddot{p}}{r c^2} \, \vec{u_\theta}}$$

Justification :

on montre ici que le terme en $\ddot{p}$ prédomine sur le terme en $\dot{p}$. On pourra poursuivre en comparant le terme en $\dot{p}$ par rapport au terme en p.

$$\frac{\ddot{p}}{r c^2} \overset{?}{\gg} \frac{\dot{p}}{r^2 c}$$

on remarque que

$$\ddot{p} \underset{\text{ordre grandeur}}{\sim} \frac{\dot{p}}{T_{\text{période}}}$$

cf si sinusoïdal (en : $\exp j\omega t$)

$$\ddot{p} = j\omega \, \dot{p}$$

$$= j 2\pi \, \frac{\dot{p}}{T}$$

$$\frac{\dot{p}/T}{r c^2} \overset{?}{\gg} \frac{\dot{p}}{r^2 c}$$

$$r \overset{?}{\gg} \underbrace{cT}_{\lambda}$$

C'est bien l'approximation de départ.

12) D'après le texte

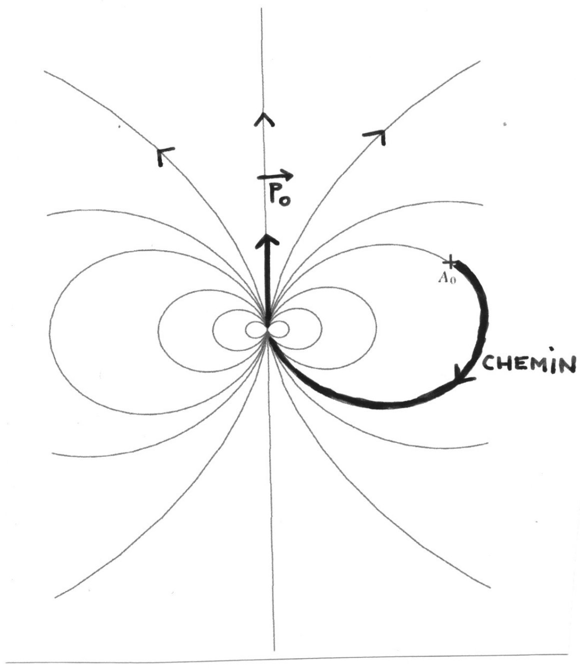
a ordre du cm

$\lambda = 656$ m

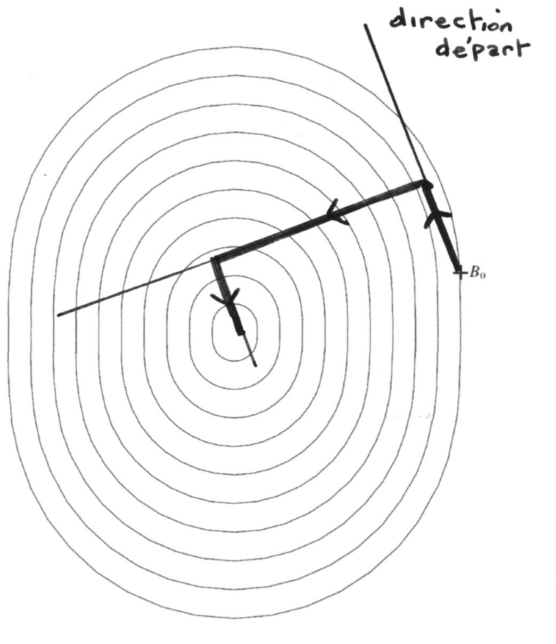
r ordre 10 m

C1	$a \ll r$	OUI	
C2	$a \ll \lambda$	OUI	
C3	$r \ll \lambda$	OUI	ZONE STATIQUE
C4	$r \gg \lambda$	NON	

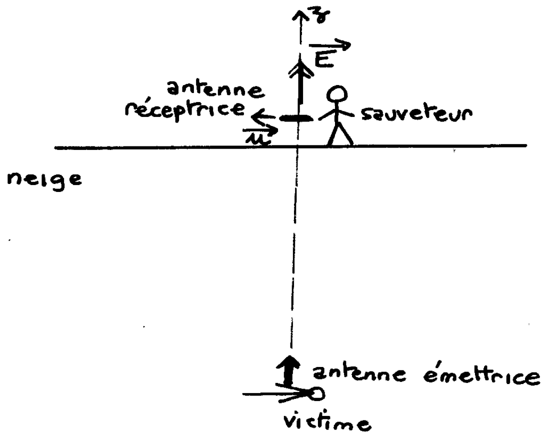
13) Le sauveteur se dirige selon $\vec{u}$ tel que $\vec{E}\cdot\vec{u}$ soit maximum. Il se dirige donc $\boxed{\text{selon une ligne de champ}}$ dans la zone statique.
On trace le chemin sur la figure 1 jusqu'à la victime



14) On utilise ici les lignes de niveau.



15)



Le signal perçu par le sauveteur $\vec{E}\cdot\vec{u}$ est nul et donc loin d'être maximal pour la recherche en croix !

Cadmium en solution aqueuse

Diagramme potentiel - pH

1) Frontière $Cd^{2+} / Cd(s)$

$$Cd^{2+} + 2e^- = Cd(s) \qquad \text{(1/2 réaction)}$$

$$E = E^\circ_{Cd^{2+}/Cd(s)} + \frac{0{,}06}{2} \log [Cd^{2+}]$$

A la frontière $[Cd^{2+}] = c_0$

$$E_{\text{frontière}} = E^\circ_{Cd^{2+}/Cd(s)} - 0{,}03 \; pc_0$$

donc $\boxed{E^\circ_{Cd^{2+}/Cd(s)} = E_{\text{frontière}} + 0{,}03 \; pc_0}$

A.N. $= -0{,}46 + 0{,}03 \times 2$

$$\boxed{E^\circ_{Cd^{2+}/Cd(s)} = -0{,}40 \text{ V}}$$

---

2) Frontière $Cd^{2+} / Cd(OH)_2(s)$

$$Cd(OH)_2(s) = Cd^{2+} + 2\,HO^- \qquad \text{(réaction)}$$

de constante

$$K_s = [Cd^{2+}][HO^-]^2$$
$$= [Cd^{2+}] \frac{Ke^2}{h^2}$$

A la frontière, il y a du $Cd(OH)_2(s)$ à l'état de traces et $[Cd^{2+}] = c_0$

donc $\boxed{pK_s = pc_0 + 2\,pK_e - 2\,pH_{\text{frontière}}}$

A.N. $= 2 + 2 \times 14 - 2 \times 8{,}1$

$$\boxed{pK_{s\,Cd(OH)_2(s)} = 13{,}8}$$

Le produit de solubilité demandé vaut donc :

$$\boxed{K_s = 10^{-13{,}8}}$$

---

3) Frontière $Cd(OH)_2(s) / HCdO_2^-$

$$Cd(OH)_2(s) = HCdO_2^- + H^+ \qquad \text{(1/2 réaction acide-base)}$$

en équilibrant par les techniques habituelles.

La réaction se produit en milieu basique, on écrira

$$\boxed{Cd(OH)_2(s) + HO^- = HCdO_2^- + H_2O}$$ (réaction

de constante

$$K = \frac{[HCdO_2^-]}{[HO^-]}$$

$$= \frac{[HCdO_2^-]\, h}{K_e}$$

A la frontière, il y a du $Cd(OH)_2(s)$ à l'état de traces et $[HCdO_2^-] = c_0$

donc $$\boxed{pK = pc_0 + pH_{\text{frontière}} - pK_e}$$

A.N. $$= 2 + 11{,}3 - 14$$

$$\boxed{pK = -0{,}7}$$

$$\boxed{K = 10^{+0{,}7} \simeq 5{,}0}$$

---

4) Frontière $Cd(OH)_2(s) / Cd(s)$

Le plus simple est de travailler par <u>continuité</u>

On écrit la demi-réaction.

$$\boxed{Cd(OH)_2(s) + 2H^+ + 2e^- = Cd(s) + 2H_2O}$$ (½ réaction)

$$E_{\text{frontière}} = A + \frac{0{,}06}{2} \log [H^+]^2$$

$$= A - 0{,}06\ pH$$

avec $A = E^\circ_{Cd(OH)_2(s)/Cd(s)}$

Par continuité

$$-0{,}46 = A - 0{,}06 \times 8{,}1$$

$$A_{/V} = 0{,}026$$

$$\boxed{E_{\text{frontière }Cd(OH)_2/Cd\ /V} = 0{,}026 - 0{,}06\ pH}$$

---

5) Frontière $H^+/H_2(g)$ (ou $H_2O/H_2(g)$)

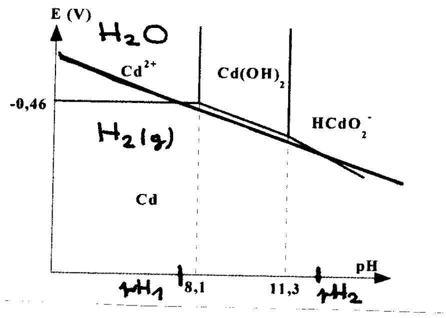
$$2H^+ + 2e^- = H_2(g)$$

$$E = E^\circ_{H^+/H_2} - 0{,}06\,pH - 0{,}03 \log\left(\frac{P_{H_2}}{P^\circ}\right)$$

à la frontière, on choisit $P_{H_2} = 1$ bar

$$\boxed{E_{frontière} = -0{,}06\,pH}$$

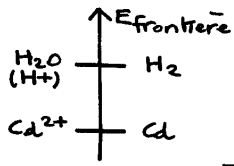
On trace cette frontière sur le diagramme.
Elle passe légèrement sous la frontière $Cd(OH)_2/Cd$ (de même pente mais d'ordonnée à l'origine 0,026 V)



Réactions

• pour $pH < pH_1$ (légèrement inférieur à 8,1)

H_2O et $Cd(s)$ ont des domaines disjoints donc réaction



$2H^+ + 2e^- = H_2(g)$ $\times 1$

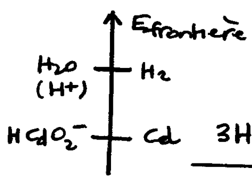
$Cd^{2+} + 2e^- = Cd(s)$ $\times -1$

$2H^+ + Cd(s) = H_2(g) + Cd^{2+}$ d'où réaction en milieu acide :

$$\boxed{2H_3O^+ + Cd(s) = H_2(g) + Cd^{2+} + 2H_2O}$$

• pour $pH > pH_2$ (légèrement supérieur à 11,3)

H_2O et $Cd(s)$ ont des domaines disjoints donc réaction



$2H^+ + 2e^- = H_2(g)$ $\times 1$

$3H^+ + HCdO_2^- + 2e^- = Cd(s) + 2H_2O$ $\times -1$

$$Cd(s) + 2H_2O = H_2(g) + HCdO_2^- + H^+$$

d'où réaction en milieu basique ici.
(ajouter 1 HO^-)
(simplifier 1 H_2O)

$$\boxed{Cd(s) + H_2O + HO^- = H_2(g) + HCdO_2^-}$$

Le calcul de pH_1 et pH_2

→ pH_1 est à l'intersection de la frontière $H_2O/H_2(g)$ et de la frontière $Cd^{2+}/Cd(s)$ donc

$$-0{,}06\ pH_1 = -0{,}46$$

$$\boxed{pH_1 = 7{,}7}$$

→ pH_2 est à l'intersection de la frontière $H_2O/H_2(g)$ et de la frontière $HCdO_2^-/Cd(s)$

Il faut déterminer l'équation de cette frontière

$$3H^+ + HCdO_2^- + 2e^- = Cd_{(s)} + 2H_2O$$

on peut travailler par continuité (plus rapide)

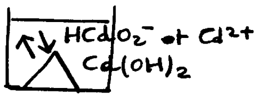
$$E_{frontière} = A - 0{,}0\ pH \ \ldots etc$$

autre méthode

$$E = E^0_{Cd^{2+}/Cd(s)} + 0{,}03 \log[Cd^{2+}]$$

il faut déterminer $[HCdO_2^-]$ en fn de $[Cd^{2+}]$

Pour cela imaginer ici :



$$K = \frac{[HCdO_2^-]}{[HO^-]}$$

$$\text{et } K_S = [Cd^{2+}][HO^-]^2$$

$$\frac{K}{K_S} = \frac{[HCdO_2^-]}{[Cd^{2+}](K_e/h)^3}$$

$$[Cd^{2+}] = \frac{K_S}{K\,K_e^3}[HCdO_2^-]\,h^3$$

A la frontière, ici, $[HCdO_2^-] = c_0$

$$E_{frontière} = E^0_{Cd^{2+}/Cd(s)} - 0{,}03(pK_S - pK - 3pK_e + pc_0) - 0{,}09\,pH$$

$$= 0{,}365 - 0{,}09\ pH$$

$$-0{,}06\ pH_2 = 0{,}365 - 0{,}09\ pH_2$$

$$\boxed{pH_2 = 12{,}2}$$

Complexation

6)
$$Cd^{2+} + n\ CN^- = \underbrace{\left(Cd(CN)_n\right)^{(n-2)-}}_{\text{noté : complexe}}$$

$$\beta_n = \frac{[\text{complexe}]}{[Cd^{2+}]\ [CN^-]^n}$$

---

7)
$$E_{pile} = E_{Droite} - E_{gauche}$$

$$e = E_2 - E_1$$

$$= E^\circ_{Cd^{2+}/Cd(s)} + \frac{0{,}06}{2} \log [Cd^{2+}]_2$$

$$- \left(E^\circ_{Cd^{2+}/Cd(s)} + \frac{0{,}06}{2} \log [Cd^{2+}]_1\right)$$

$$= \frac{0{,}06}{2} \log \frac{[Cd^{2+}]_2}{[Cd^{2+}]_1}$$

avec $[Cd^{2+}]_1 = c$

avec $[Cd^{2+}]_2 = \dfrac{[\text{complexe}]}{\beta_n\ [CN^-]^n}$

$$e = 0{,}03 \log \frac{[\text{complexe}]}{\beta_n\ [CN^-]^n\ c}$$

$$\boxed{e = 0{,}03 \left(-\log \beta_n + \log \frac{[\text{complexe}]}{c\ [CN^-]^n}\right)}$$

---

8)

	Cd^{2+}	$+\ n\ CN^-$	$=$ complexe
mole initial	$c\ V_0$	$C_{CN^-}\ V_{CN^-}$	0
mole avancement ξ	$cV_0 - \xi$	$C_{CN^-}\ V_{CN^-} - n\xi$	ξ
mole final	$\simeq 0$	$C_{CN^-}\ V_{CN^-} - n\ cV_0$	cV_0

dans un volume : $\underline{V_0 + V_{CN^-}}$

9) on néglige l'effet de dilution :

$$V_{final} = V_0 + \cancel{V_{CN^-}} \quad \text{négligeable}$$

on suppose CN^- en très large excès soit :

$$n_{CN^-} = C_{CN^-} V_{CN^-} - \cancel{n\, C V_0} \quad \text{négligeable}$$

finalement

$$\boxed{\begin{aligned} \longrightarrow\ [CN^-] &= \frac{C_{CN^-} V_{CN^-}}{V_0} \\ \longrightarrow\ [\text{complexe}] &= \frac{C\, V_0}{V_0} = C \end{aligned}}$$

---

finalement :

$$e = 0{,}03 \left(-\log \beta_n + \log \frac{\cancel{C}}{\cancel{C} \left[\frac{C_{CN^-} V_{CN^-}}{V_0} \right]^n} \right)$$

$$\boxed{e = -0{,}03 \left(\log \beta_n + n \log \left(\frac{C_{CN^-}}{V_0} V_{CN^-} \right) \right)}$$

---

10) On trace $\boxed{e \text{ en fonction de } \log [CN^-]_2}$ $\longrightarrow \dfrac{C_{CN^-} V_{CN^-}}{V_0}$

La pente est : $\underline{-0{,}03\, n}$

L'ordonnée à l'origine est : $\underline{-0{,}03 \log \beta_n}$

---

11)

V_{CN^-} ml	2	4	6	8	12	16	20
$[CN^-]_2$	$10\ 10^{-3}$	$20\ 10^{-3}$	$30\ 10^{-3}$	$40\ 10^{-3}$	$60\ 10^{-3}$	$80\ 10^{-3}$	$100\ 10^{-3}$
e	$-327\ 10^{-3}$	$-363\ 10^{-3}$	$-384\ 10^{-3}$	$-399\ 10^{-3}$	$-420\ 10^{-3}$	$-435\ 10^{-3}$	$-447\ 10^{-3}$

On obtient par régression linéaire :

pente : $-0{,}119\ 81$ d'où $n = 3{,}9937$ $\boxed{n = 4}$ (entier)

ordonnee: $-0{,}566\ 54$ d'où $\log \beta_n = 18{,}885$ $\boxed{\beta_n = 7{,}7 \cdot 10^{18}}$