

# **DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ**

**calculatrice: autorisée**

**durée: 4 heures**

## **Sujet**

<u>Effets de moyenne en régimes oscillatoires rapides</u> .....	2
I. <u>Questions préliminaires</u> .....	2
II. <u>Effet de moyenne pour l'effet Joule ( effet d'inertie thermique )</u> .....	3
III. <u>Effets de moyenne en électrocinétique</u> .....	3
A. <u>Filtrage des ondulations autour de la valeur moyenne d'un signal</u> .....	3
B. <u>Détection synchrone</u> .....	4
IV. <u>Effets de moyenne dans les capteurs optiques</u> .....	4
A. <u>Sensibilité des instruments d'optique</u> .....	4
B. <u>Interférences de deux ondes planes</u> .....	4
C. <u>Principe de l'imagerie par diffraction</u> .....	6
D. <u>Phénomène de battements</u> .....	7
<u>Couleurs par diffraction</u> .....	9
I. <u>Le spectre lumineux humainement visible</u> .....	9
II. <u>Réseau par transmission</u> .....	9
III. <u>Disque compact et réseau</u> .....	10
IV. <u>Couleur des plumes de paon</u> .....	11

## Effets de moyenne en régimes oscillatoires rapides

Lorsque, sous l'action d'une sollicitation périodique, un système présente une trop grande inertie pour pouvoir changer rapidement d'état, on admet en général qu'en régime établi, au terme d'un grand nombre de périodes, ce système tend à se positionner dans un état d'équilibre proche d'une valeur moyenne calculée pendant une période. Un tel effet peut affecter les mesures d'un grand nombre de capteurs, dans tous les domaines de la physique. Quelques exemples variés, débouchant sur des applications notables, sont présentés dans ce problème.

Formulaire:

$$2 \cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$$

$$2 \cos^2 a = 1 + \cos(2a)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

On considérera que la lettre  $i$  désigne le nombre complexe de module unité et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

**Avertissement:** Dans tout ce qui suit, par le terme de "moyenne", utilisé sans autre précision, on entendra "valeur moyenne temporelle" et, sauf indication contraire, on fera l'hypothèse que toute "moyenne" est définie dans un intervalle de temps très supérieur à la période la plus élevée de tous les termes sinusoïdaux à considérer.

### I. Questions préliminaires

1. Le développement en série de Fourier d'une fonction périodique  $f(t)$  se trouve quelquefois limité à un petit nombre de termes; ce développement peut alors, parfois, s'obtenir à l'aide de formules trigonométriques simples.

- Déterminer ainsi le développement de Fourier de la fonction périodique suivante :  $f(t) = \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)$ .
- En préciser la pulsation fondamentale et ses harmoniques éventuels.
- Quel lien existe-t-il entre la composante continue d'un tel développement et la valeur moyenne de  $f(t)$  pendant une période?

2. On considère la somme  $f(t)$  de deux sinusoïdes de même pulsation  $\omega$ , présentant entre elles un déphasage  $\varphi$  :  $f(t) = A \cos(\omega t) + B \cos(\omega t + \varphi)$ . Exprimer la moyenne  $\langle f^2(t) \rangle$  du carré de cette somme.

3. On considère maintenant deux sinusoïdes de pulsations différentes:  $\omega$  et  $\Omega$ .

- Exprimer la moyenne du produit  $P(t) = \cos(\omega t) \cos(\Omega t + \varphi)$ .

- En déduire la moyenne  $\langle S^2(t) \rangle$  du carré de la somme  $S(t) = A \cos(\omega t) + B \cos(\Omega t + \varphi)$ .

## II. Effet de moyenne pour l'effet Joule ( effet d'inertie thermique )

Lorsqu'un radiateur électrique, de résistance  $R$ , est branché sur le secteur dont la fréquence est égale à  $50 \text{ Hz}$ , son équilibre thermique ne peut évoluer aussi rapidement que le courant électrique qui l'alimente. Sa température se fixe sur une moyenne qui dépend de la puissance moyenne dissipée par effet Joule.

4. Exprimer cette puissance moyenne  $P_J$  dans le cas où la tension secteur  $v(t)$  est perturbée par la présence d'un harmonique de pulsation  $3\omega$  :  $v(t) = \hat{V} [\cos \omega t + 0,18 \cos(3\omega t + \varphi)]$ .
5. La résistance  $R$  est maintenant alimentée par une tension continue  $V$ .
  - Exprimer la puissance  $P'_J$  dissipée par effet Joule dans  $R$ .
  - On ajuste la tension  $V$  de telle sorte que  $P_J = P'_J$ . Comment est alors appelée la valeur particulière de  $V$  obtenue?
  - Calculer la valeur numérique de l'amplitude  $\hat{V}$  sachant que la valeur efficace de la tension mesurée aux bornes du secteur est égale à  $230 \text{ volts}$ .

## III. Effets de moyenne en électrocinétique

### A. Filtrage des ondulations autour de la valeur moyenne d'un signal

Une tension périodique  $v(t) = \hat{V} \cos^2(\omega t)$  est appliquée à l'entrée du circuit schématisé sur la *figure 1*.

6. Démontrer que la tension  $u(t)$  mesurée aux bornes du condensateur de capacité  $C$  est solution de l'équation différentielle:  $u + \tau \frac{du}{dt} = \frac{\hat{V}}{2} + \frac{\hat{V}}{2} \cos(2\omega t)$ . Préciser la valeur de la constante de temps  $\tau$  en fonction de  $R$  et de  $C$ .

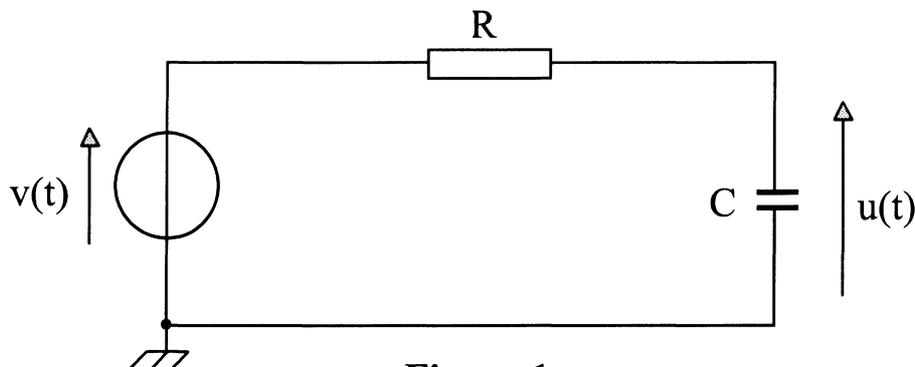


Figure 1

La solution de cette équation différentielle, représentant le régime forcé (appelé aussi régime établi), peut s'écrire comme la somme des solutions particulières des équations différentielles

suivantes:

$$u + \tau \frac{du}{dt} = \frac{\hat{V}}{2}$$

$$u + \tau \frac{du}{dt} = \frac{\hat{V}}{2} \cos(2\omega t)$$

7. Déterminer la valeur de sa solution en régime établi pour la première équation.
8. A l'aide de la notation complexe, préciser la solution de la deuxième équation en régime établi. Écrire cette solution sous forme réelle et démontrer qu'elle a une amplitude qui tend vers zéro lorsque  $RC \gg \frac{1}{2\omega}$ .
9. Dans le cas où  $\omega = 100\pi$  rad/s : déterminer la condition, concernant la résistance  $R$ , qui permet d'obtenir, en régime établi, aux bornes d'un condensateur de capacité  $C = 100 \mu F$ , une tension telle que l'ondulation ait une amplitude inférieure au centième de la composante continue.
10. Donner l'expression de la solution réelle complète pour  $u(t)$  dans le cas général, en supposant que le condensateur ne porte aucune charge à l'instant  $t = 0$ .

### B. Détection synchrone

Un signal harmonique  $v(t) = \hat{V} \cos \omega t$  dont on veut mesurer l'amplitude est bruité par un signal parasite  $u(t) = \hat{U} \cos(\Omega t + \varphi)$  de fréquence différente. Alors, la mesure effectivement obtenue se trouve être égale à la somme:  $s(t) = \hat{V} \cos \omega t + \hat{U} \cos(\Omega t + \varphi)$ .

11. Au moyen de procédés électroniques connus, on multiplie dans un premier temps le signal  $s(t)$  par un signal auxiliaire synchrone au premier:  $w(t) = \hat{W} \cos(\omega t + \alpha)$  puis on effectue la moyenne du produit obtenu. Exprimer cette moyenne  $\mu = \langle s(t) \cdot w(t) \rangle$ .
12. Pour terminer, on règle à 2 volts l'amplitude du signal auxiliaire puis l'on fait varier son déphasage jusqu'à obtenir une moyenne maximale. Pour quelle valeur de  $\alpha$  ce maximum est-il atteint? Quelle est sa relation avec l'amplitude recherchée?

## IV. Effets de moyenne dans les capteurs optiques

### A. Sensibilité des instruments d'optique

Du fait de la valeur élevée des fréquences lumineuses, l'œil, comme la plupart des détecteurs de lumière n'est sensible qu'à la valeur moyenne du carré du champ électrique associé à l'onde lumineuse. Dans la théorie scalaire de la lumière, une onde lumineuse est caractérisée, en un lieu donné, par une grandeur scalaire  $s(t)$ , appelée aussi vibration lumineuse. Elle produit, en ce lieu, un signal lumineux dont l'éclairement  $\mathcal{E}$  est défini par la valeur moyenne du carré  $s^2(t)$  de cette grandeur.

13. Que vaut l'éclairement dans le cas où  $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$  ?

### B. Interférences de deux ondes planes

On étudie la superposition de deux vibrations lumineuses  $s_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ , et  $s_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$  en un point  $M$  d'un écran, les déphasages  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  dépendant de

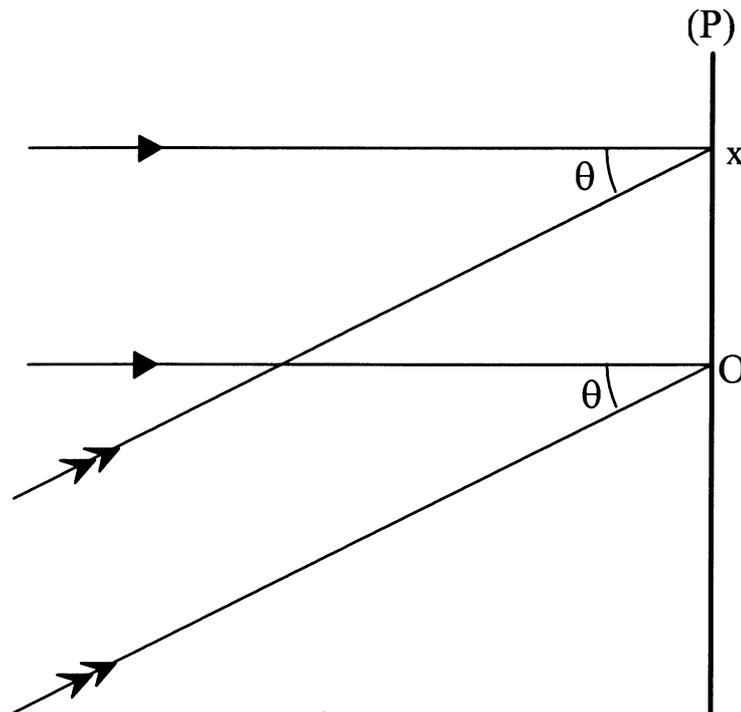
la position du point  $M$  sur l'écran.

14. Des réponses aux *question 2* et *question 3* déduire la valeur de l'éclairement  $\mathcal{E}(M)$  du signal résultant en  $M$ , en fonction des éclairements  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  associés à chaque vibration lumineuse  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$ . Envisager les deux cas et justifier avec précision à partir des résultats précédents. Conclure quant à la possibilité d'obtention d'un phénomène d'interférences sur l'écran à partir de deux ondes de fréquences différentes.

15. Rappeler les conditions d'obtention d'un phénomène d'interférences lumineuses à deux ondes. Comment obtient-on en pratique deux sources lumineuses obéissant à ces conditions?

Deux ondes planes de même pulsation  $\omega$  donc de longueur d'onde identique  $\lambda$ , issues de deux sources à l'infini, se propagent dans le vide (*figure 2*) selon des vecteurs d'onde contenus dans le plan de figure. Elles sont reçues sur un écran plan  $(P)$  perpendiculaire au plan de figure. L'une est dirigée normalement au plan  $(P)$  et sa vibration dans ce plan sera représentée par un scalaire :  $s_0 = A_0 \cos \omega t$ . L'autre,  $s_1$ , qui possède une amplitude  $A_1$ , est reçue sous l'incidence  $\theta$ .

On choisira pour origine des abscisses, sur l'intersection du plan  $(P)$  avec le plan de figure, un point particulier  $O$  où les vibrations  $s_0$  et  $s_1$  sont en phase.



**Figure 2**

16. En précisant avec soin toutes justifications utiles, exprimer la différence de marche  $\delta$ , à l'abscisse  $x$ , entre les deux rayons issus de chaque source.

17. En déduire l'expression de la vibration de l'onde  $s_1(x, t)$

Dans tout ce qui suit, pour simplifier les calculs, ceux-ci ne seront développés que dans le plan de la *figure 2*.

18. Calculer l'éclairement  $\mathcal{E}$  résultant sur le plan  $(P)$ , en fonction de  $x$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$  et des

éclairements  $\mathcal{E}_0$  et  $\mathcal{E}_1$  de chaque vibration  $s_0$  et  $s_1$ .

19. Définir puis calculer l'interfrange et le contraste obtenus dans l'hypothèse où:  $\lambda = 633 \text{ nm}$ ,  $\theta = 30^\circ$  et  $A_0 = 2A_1$ .

### C. Principe de l'imagerie par diffraction

Par un procédé photographique de type "holographique", on réalise un film dont la transparence  $T(x)$ , appelée aussi transmittance, est proportionnelle à l'éclairement  $\mathcal{E}$  dans le plan (P) de la figure 2, soit:  $T(x) = \mu \mathcal{E} = \alpha + \beta \cos\left[y \frac{2\pi}{\lambda} x\right]$

20. Questions de base: (les réponses attendues doivent être brèves et données sans démonstration).

- Expliquer en quoi le phénomène de diffraction s'écarte de l'optique géométrique.
- Énoncer le principe de Huygens-Fresnel.

21. Exprimer les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  en fonction des résultats obtenus précédemment.

On dispose le film à la place de l'écran (P) puis on l'éclaire par le même faisceau  $s_0$  que précédemment, mais en ayant supprimé le faisceau  $s_1$  (figure 3). De la sorte, l'amplitude de la vibration issue d'un élément de longueur  $dx$ , au niveau de la partie droite du plan (P), immédiatement après le film, est égale à:  $ds = a_0 T(x) dx$ .

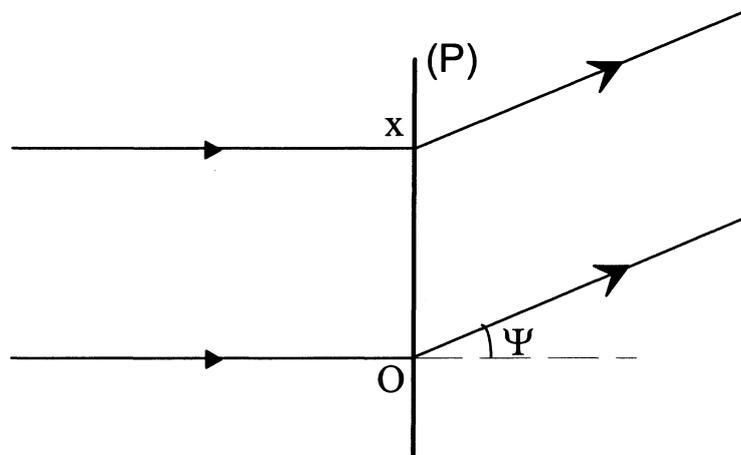


Figure 3

22. Justifier rapidement que  $a_0 = A_0 \ell$ , si  $\ell$  représente la largeur de la zone éclairée sur l'écran perpendiculairement au plan de figure.

23. L'amplitude complexe de l'onde diffractée par l'élément  $dx$  dans la direction  $\Psi$ , s'écrit (si l'on travaille en  $\exp(-i\omega t)$ ) en un point rejeté à l'infini:  $ds' = a_0 T(x) \exp(i \frac{2\pi \delta'}{\lambda}) dx$ .

Exprimer  $\delta'$  en fonction de  $x$  et de  $\Psi$  lorsque le rayon passant par O est pris à l'infini comme origine des phases.

24. Calculer l'amplitude complexe de l'onde résultante à l'infini, diffractée dans la direction  $\Psi$ , onde issue d'un segment limité par les points d'abscisse  $h/2$  et  $-h/2$ . On prendra beaucoup de soin pour réaliser le calcul. On constatera que cette amplitude est la somme de trois termes

faisant intervenir chacun un « sinc » ( fonction sinus cardinal ).

25. Déterminer les trois directions privilégiées, pour la lumière à l'infini, mises en évidence lors du calcul précédent. On tient compte de  $h \gg \lambda$ , que peut-on alors conclure?
26. Montrer que l'une des composantes de la lumière diffractée permet de reconstituer l'onde initiale  $s_1(x, t)$  de la question 17.
27. On observe la lumière diffractée dans le plan focal d'une lentille convergente de distance focale égale à  $f = 30 \text{ cm}$ . Dessiner le cheminement de la lumière et déterminer les positions des différents maxima de l'éclairement dans le plan focal, lorsque  $\theta = 10^\circ$ .

#### D. Phénomène de battements

On peut admettre qu'un capteur soumis à une excitation périodique n'en détecte que la moyenne temporelle, seulement si son temps de réponse est très nettement supérieur à la période de l'excitation. Cependant, il est des cas où - par exemple - la composition de deux signaux de fréquences élevées produit un effet de fréquence plus basse, auquel le capteur peut être sensible.

28. Considérons en particulier, la somme de deux signaux de même amplitude et de fréquences très voisines  $s(t) = A \cos\left[\left(\omega + \frac{\delta\omega}{2}\right)t\right] + A \cos\left[\left(\omega - \frac{\delta\omega}{2}\right)t\right]$ . Exprimer la moyenne temporelle  $\langle s^2(t) \rangle$  du carré de ce signal, lorsque le temps de réponse du capteur reste très supérieur à la période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  mais - cette fois - demeure très inférieur à la période  $T = \frac{2\pi}{\delta\omega}$ . On ne peut plus faire abstraction, dans le calcul demandé, de la moyenne temporelle de  $\cos[(\delta\omega)t]$  au contraire, on doit maintenant considérer qu'elle reste sensiblement égale à  $\cos[(\delta\omega)t]$ .
29. L'oreille humaine se comporte, en première approximation, comme un détecteur quadratique. On suppose qu'elle est soumise à deux vibrations acoustiques simultanées de même amplitude, l'une de fréquence  $40,5 \text{ kHz}$  et l'autre de fréquence  $39,5 \text{ kHz}$ . Quelle est la bande passante de l'oreille humaine ? Les deux fréquences sont-elles audibles ou non ? Montrer cependant qu'un son particulier est détecté par l'oreille. En préciser la fréquence.

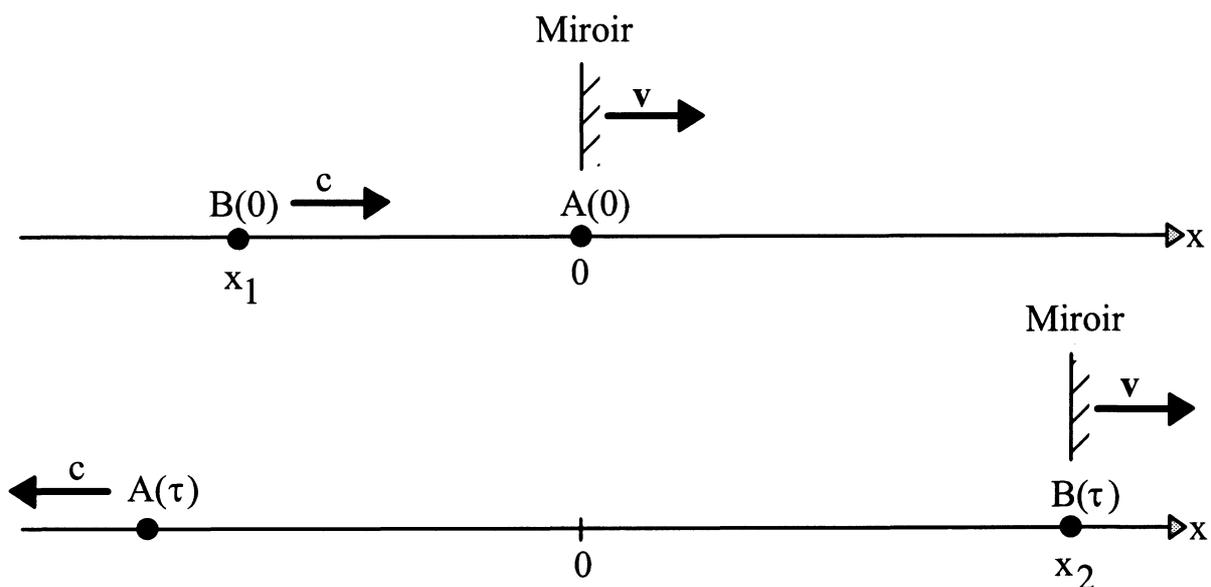


Figure 4

Une onde lumineuse de fréquence  $f$ , qui se propage dans le vide à la vitesse  $C$  se réfléchit sur un miroir normal à la direction de propagation ( *figure 4* ) Ce miroir s'éloigne de l'onde incidente avec un mouvement de translation de vitesse  $v$ .

On considère l'onde incidente, avec deux maxima  $A$  et  $B$  qui se succèdent pendant une période  $T$ , on suppose que le premier ( $A$ ) atteint le miroir au temps  $t=0$ , à l'abscisse  $x=0$ .

30. Préciser l'abscisse  $x_1$  de  $B$  au temps  $t=0$ , en  $B(0)$ , puis exprimer le temps  $\tau$  au bout duquel  $B$  atteint le miroir et l'abscisse  $x_2$  de l'impact au point  $B(\tau)$ .
  31. A l'instant  $\tau$  la position  $A(\tau)$  correspond au maximum qui s'est réfléchi sur le miroir en  $t=0$ . Préciser la distance  $d=(AO)$  parcourue par le maximum  $A$  pendant le temps  $\tau$ .
  32. Quelle est la signification physique, pour un observateur lié au repère fixe, de la distance  $(AB)$  à partir de  $t=\tau$  ?
  33. Déduire des résultats précédents la fréquence  $f'$  de l'onde réfléchie pour un observateur lié au repère fixe.
  34. L'onde incidente et l'onde réfléchie se superposent dans l'espace vide en donnant naissance à un phénomène de battements.
    - Justifier et montrer que la fréquence des battements est, au premier ordre en  $v/c$ , telle que:  $f - f' \approx 2f v/c$
    - Cette fréquence est-elle située dans le domaine visible lorsque  $v=30\text{m/s}$  et  $\lambda=0,5\mu\text{m}$  ?
-

# Couleurs par diffraction

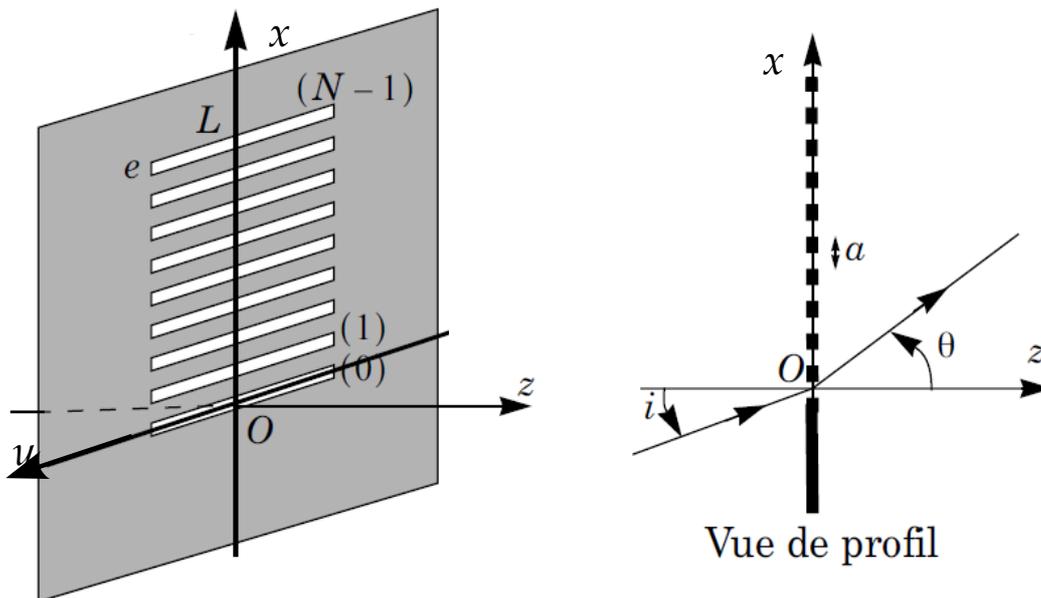
On aura recours à la notation complexe. L'onde lumineuse est notée:  $\underline{s} \exp(j\omega t)$  où  $\underline{s}$  désigne l'amplitude complexe.

## I. Le spectre lumineux humainement visible

1. Entre quelles longueurs d'ondes se situe le spectre des ondes lumineuses humainement visibles ?
2. Calculer un ordre de grandeur de fréquence correspondant à la couleur rouge. Idem pour la couleur violette.

## II. Réseau par transmission

On envisage un réseau par transmission constitué d'une surface plane ne laissant pas passer la lumière et percée de  $N$  fentes parallèles de largeur  $e$  et de longueur  $L$  régulièrement espacées. Elles forment ainsi un motif répété périodiquement (période  $a$ ). On considère que  $L \gg e$  et que  $L$  est très grand devant les longueurs d'onde  $\lambda$  du domaine visible. L'indice de l'air est pris égal à 1.



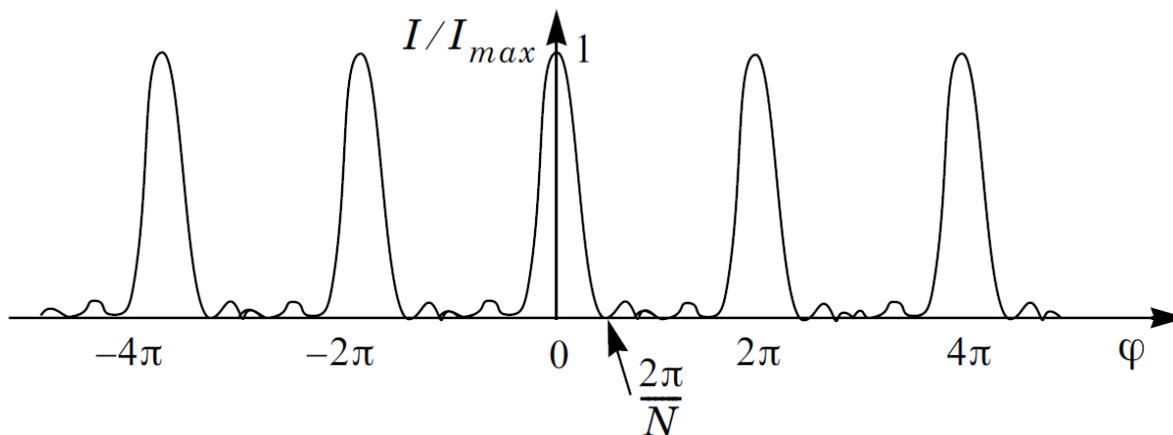
Seuls des faisceaux lumineux parallèles sont envisagés. La direction de la lumière incidente est contenue dans le plan  $(xOz)$ .

3. Pourquoi peut-on considérer que la direction de la lumière diffractée est également contenue dans le plan  $(xOz)$  ?
4. On note  $\underline{s}_0(i, \theta, e, \lambda)$  l'amplitude diffractée par la première fente (0) dans la direction de l'angle  $\theta$ . Déterminer l'expression de cette amplitude  $\underline{s}_0(i, \theta, e, \lambda)$  sous la forme

$\underline{s}_0(i, \theta, e, \lambda) = A \exp(-j\varphi(O)) \int_{-e/2}^{e/2} \exp(-j\varphi_{P/O}(i, \theta, x, \lambda)) dx$  où  $\varphi(O)$  désigne la phase retard de l'onde diffractée à l'infini par l'élément de surface placé en  $O$ . Préciser l'expression de  $\varphi_{P/O}(i, \theta, x, \lambda)$ . On partira d'une figure et on expliquera le calcul de la différence de marche entre une onde diffractée par l'élément de surface situé en  $x$  et l'onde diffractée par l'élément de surface en  $O$ . On ne calculera pas l'intégrale.

- Justifier avec précision que l'amplitude  $\underline{s}_1$  diffractée dans la même direction par la fente suivante (1) ne diffère de  $\underline{s}_0$  que par un terme de phase supplémentaire  $\underline{s}_1 = \exp(j\varphi) \underline{s}_0$ . Déterminer  $\varphi$  en fonction de  $i$ ,  $\theta$ ,  $a$  et  $\lambda$  la longueur d'onde de la lumière incidente.
- Montrer que l'amplitude diffractée par le réseau peut s'écrire comme le produit de l'amplitude diffractée par la fente (0) et d'un terme d'interférence à  $N$  ondes, noté  $\mathcal{L}(N, \varphi)$  indépendant de la nature des motifs. On donnera l'expression de  $\mathcal{L}(N, \varphi)$  sous forme d'une somme d'exponentielles complexes mais on ne calculera pas cette somme.
- Montrer que l'intensité diffractée dans la direction  $\theta$  par les  $N$  fentes peut s'écrire sous la forme  $|\underline{s}_0|^2 I(N, \varphi)$ . Exprimer  $I(N, \varphi)$  en fonction de  $\mathcal{L}(N, \varphi)$ .
- À quelle(s) condition(s) portant sur  $e$  peut-on considérer  $|\underline{s}_0|^2$  comme indépendante de  $\theta$  et de  $i$ ? Justifier à partir du calcul et de la représentation graphique de  $|\underline{s}_0|^2$ . On se placera désormais dans ce cas.

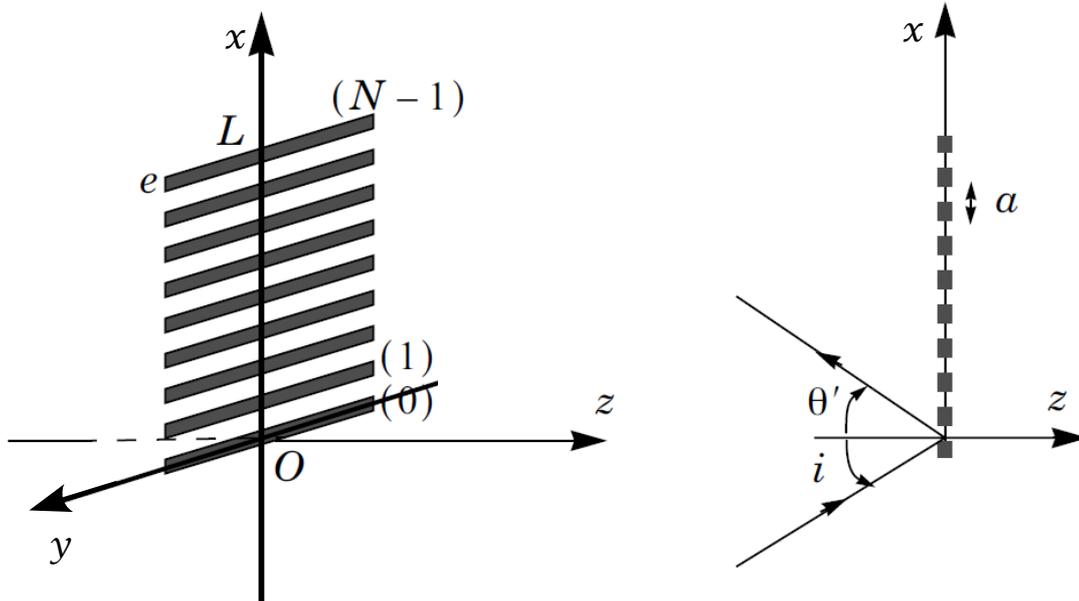
On donne l'allure de la courbe  $I(N, \varphi)$  en fonction du déphasage  $\varphi$  : voir figure.



- Pour quelles valeurs  $\theta$  de l'intensité diffractée est-elle maximale. Que devient cette intensité diffractée lorsque  $N$  devient grand?

### III. Disque compact et réseau

La surface d'un disque compact est modélisée par un ensemble de miroirs parallèles identiques aux fentes précédentes :



10. Montrer que le résultat précédent reste valable à condition de remplacer  $\varphi$  par une phase  $\varphi'(i, \theta', a, \lambda)$  à déterminer.

Pour un disque compact  $a = 1,6 \mu\text{m}$ .

Le disque est désormais éclairé en incidence normale.

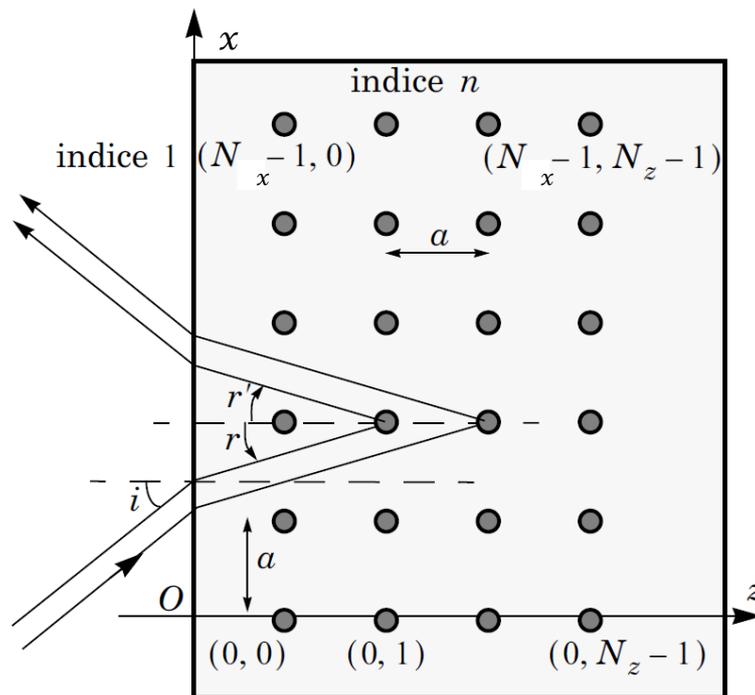
11. Dans le cas de la lumière blanche, déterminer pour le CD, les angles de diffraction (en degrés) correspondant aux différents ordres (on déterminera les ordres possibles pour le violet et on calculera les angles correspondants puis faire de même pour le rouge). Y a-t-il mélange des ordres en lumière blanche ?

12. Proposer un dispositif expérimental utilisant une lame semi-transparente permettant d'observer la lumière diffractée dans les conditions d'incidence normale.

#### IV. Couleur des plumes de paon

Les barbules des plumes de paon contiennent des bâtonnets de mélanine (pigment brun foncé qui donne sa coloration à la peau) opaques noyés dans de la kératine (protéine fibreuse transparente d'indice  $n = 1,5$ ). Chaque bâtonnet constitue un obstacle qui diffracte la lumière (comme les miroirs précédents). Les bâtonnets sont régulièrement répartis dans la kératine au niveau des nœuds d'un réseau cubique simple ( $N_x$  bâtonnets dans la direction  $x$ ,  $N_y$  bâtonnets dans la direction  $y$ ,  $N_z$  bâtonnets dans la direction  $z$ ). Comme précédemment, seuls les rayons contenus dans le plan  $(xOz)$  sont pris en compte. On suppose l'amplitude diffractée indépendante de  $N_y$  : tout se passe comme si les bâtonnets avaient une longueur  $L$  dans la direction  $y$  très supérieure à  $a$  et  $\lambda$ . On note  $\underline{\varepsilon}'_0$  l'amplitude (supposée constante) diffractée par le bâtonnet  $(0,0)$ .

On s'intéresse à la lumière diffractée par chaque bâtonnet dans la direction  $r' = -r$  de la réflexion spéculaire.



Soit  $\varphi_x$  le déphasage entre les ondes diffractées par deux bâtonnets plus proches voisins dans la direction  $x$  et de même coordonnée  $z$  : bâtonnets  $(i, j)$  et  $(i+1, j)$ . De même,  $\varphi_z$  est le déphasage entre les ondes diffractées par deux bâtonnets plus proches voisins dans la direction  $z$  et de même coordonnée  $x$  : bâtonnets  $(i, j)$  et  $(i, j+1)$ .

$N_x$  et  $N_z$  sont très grands devant 1.

13. Montrer que l'intensité diffractée est proportionnelle à  $|\Delta'_0|^2 I(N_x, \varphi_x) I(N_z, \varphi_z)$ .

14. En s'inspirant des questions précédentes, exprimer  $\varphi_x$  et  $\varphi_z$  en fonction de  $n$ ,  $a$ ,  $\lambda$  et  $i$ .

15. Dans quelle(s) direction(s) la longueur d'onde  $\lambda$  est-elle préférentiellement diffractée ?

16. Pour quelle valeur minimale de  $a$  toutes les longueurs d'onde du spectre visible sont-elles diffractées ? Application numérique.

17. On se place en incidence normale  $i=0$ .

- Que valent alors  $\varphi_x$  et  $\varphi_z$  ?
- En observant les taches colorées des plumes de paon on peut voir un centre bleu-noir (bâtonnets distants de  $0,16 \mu m$ ) entouré d'une tache ovale turquoise (bâtonnets séparés de  $0,17 \mu m$ ) ceinte d'une couronne extérieure brun rouge (bâtonnets séparés de  $0,21 \mu m$ ). Interpréter ces différentes teintes.

Réponses

## Effets de moyenne

$$1) \quad f(t) = \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)$$

on utilise  $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

$$f(t) = \frac{1}{2} (\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi))$$

- contient un terme constant :  $\frac{1}{2} \cos \varphi$   
 et un fondamental de pulsation  $2\omega$  :  $\frac{1}{2} \cos(2\omega t + \varphi)$   
 pas d'autres harmoniques.

- La valeur moyenne est égale au terme constant :

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{2} (\underbrace{\langle \cos \varphi \rangle}_{\cos \varphi} + \underbrace{\langle \cos(2\omega t + \varphi) \rangle}_{\text{nul}})$$

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{2} \cos \varphi$$

$$2) \quad f^2(t) = A^2 \cos^2(\omega t) + B^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + 2AB \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)$$

Précédemment, on a établi

$$\langle \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2} \cos \varphi$$

$$\text{d'où } \langle \cos(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \langle f^2(t) \rangle &= A^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle + B^2 \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle + 2AB \langle \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) \rangle \\ &= A^2 \frac{1}{2} + B^2 \frac{1}{2} + AB \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\langle f^2(t) \rangle = \frac{1}{2} (A^2 + B^2) + AB \cos \varphi$$

$$3) \quad P(t) = \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2} (\cos[(\omega - \omega)t + \varphi] + \cos[(\omega + \omega)t + \varphi])$$

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} (\underbrace{\langle \cos[(\omega - \omega)t + \varphi] \rangle}_{\text{nul}} + \underbrace{\langle \cos[(\omega + \omega)t + \varphi] \rangle}_{\text{nul}})$$

$$\langle P(t) \rangle = 0$$

$$\bullet \quad S(t) = A \cos(\omega t) + B \cos(\omega t + \varphi)$$

$$S^2(t) = A^2 \cos^2(\omega t) + B^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + 2AB \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{cf } P(t)$$

$$\langle S^2(t) \rangle = A^2 \frac{1}{2} + B^2 \frac{1}{2} + 0$$

$$\langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{2} (A^2 + B^2)$$

$$\begin{aligned} 4) \quad i(t) &= R^{-1} v(t) \\ &= \frac{v(t)}{R} \\ &= \frac{1}{R} \hat{V}^2 (\cos \omega t + (0,18) \cos (3\omega t + \varphi))^2 \end{aligned}$$

on utilise le résultat de 3) (avec  $\Omega = 3\omega$ )

$$\langle i(t) \rangle = \frac{1}{R} \hat{V}^2 \frac{1}{2} (1^2 + (0,18)^2)$$

$$P_J = \frac{\hat{V}^2}{2R} \cdot 1,032$$

5) • En continu

$$P'_J = \frac{V^2}{R}$$

- La puissance joule pour la tension secteur est la même (en moyenne) que si on la remplaçait par la tension continue  $V$ .

Par définition

$V$  est la tension efficace (ou R.M.S.)

$$\begin{aligned} \bullet \quad V_{\text{efficace}} &= \sqrt{\langle v^2 \rangle} \quad (\text{cf root mean square}) \\ &= \sqrt{\frac{\hat{V}^2}{2} \times 1,032} \end{aligned}$$

↑ ici, on aurait 1 en l'absence de l'harmonique  $3\omega$

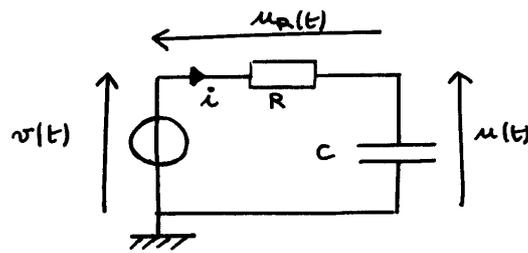
$$V_{\text{efficace}} = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}} \times 1,016$$

A.N.

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \frac{V \sqrt{2}}{1,016} \\ &= \frac{230 \sqrt{2}}{1,016} \end{aligned}$$

$$\hat{V} = 320 \text{ V}$$

6) on écrit l'équa diff du circuit :



$$u_R(t) + u(t) = v(t)$$

$$R i(t) + u(t) = v(t)$$

avec loi d'ohm :  $i = C \frac{du}{dt}$

$$RC \frac{du}{dt} + u = v(t)$$

Finalement avec  $\tau = RC$

$$\tau \frac{du}{dt} + u = \hat{V} \cos^2(\omega t)$$

↓ décomposition en fréquences

$$\frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$$

$$u + \tau \frac{du}{dt} = \frac{\hat{V}}{2} + \frac{\hat{V}}{2} \cos(2\omega t)$$

7)

$$u + \tau \frac{du}{dt} = \frac{\hat{V}}{2}$$

En régime établi, on obtient la solution particulière correspondant à  $u = \text{constante}$

$$u = \frac{\hat{V}}{2}$$

8)

$$u + \tau \frac{du}{dt} = \frac{\hat{V}}{2} \cos(2\omega t)$$

En complexes pour obtenir le régime sinusoïdal forcé

$$\underline{u} + \tau \frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{\hat{V}}{2} \exp j 2\omega t$$

En régime forcé,  $u$  vibre donc à la pulsation  $2\omega$

$$\frac{d}{dt} = j 2\omega$$

$$\underline{u} + \tau j 2\omega \underline{u} = \frac{\hat{V}}{2} \exp j 2\omega t$$

$$u = \frac{\frac{\hat{V}}{2} \exp j2\omega t}{1 + j2\omega\tau}$$

en réel

$$u = \frac{\hat{V}/2}{\sqrt{1+4\omega^2\tau^2}} \cos(2\omega t - \arctan 2\omega\tau)$$

son amplitude est :

$$\hat{U} = \frac{\hat{V}/2}{\sqrt{1+4\omega^2\tau^2}}$$

elle tend vers zéro si  $4\omega^2\tau^2 \gg 1$

$$2\omega\tau \gg 1$$

$$RC \gg \frac{1}{2\omega}$$

2) on veut :

$$\frac{\hat{V}/2}{\sqrt{1+4\omega^2\tau^2}} < \frac{1}{100} \hat{V}/2$$

↑ négligeable

$$\tau > 100 \frac{1}{2\omega}$$

$$R > 100 \frac{1}{2\omega} \frac{1}{C}$$

A.N.  $R > 100 \frac{1}{2 \cdot 100\pi} \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}}$

$$R > 1,59 \text{ k}\Omega$$

10) La solution complète :

$$u + \tau \frac{du}{dt} = \frac{\hat{V}}{2} + \frac{\hat{V}}{2} \cos(2\omega t)$$

• solution particulière :

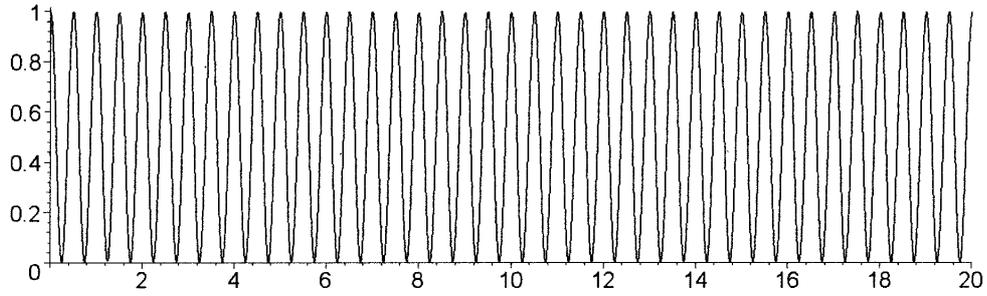
$$u = \frac{\hat{V}}{2} + \frac{\hat{V}}{2} \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2\tau^2}} \cos(2\omega t - \arctan 2\omega\tau)$$

• solution générale de l'équation homogène :

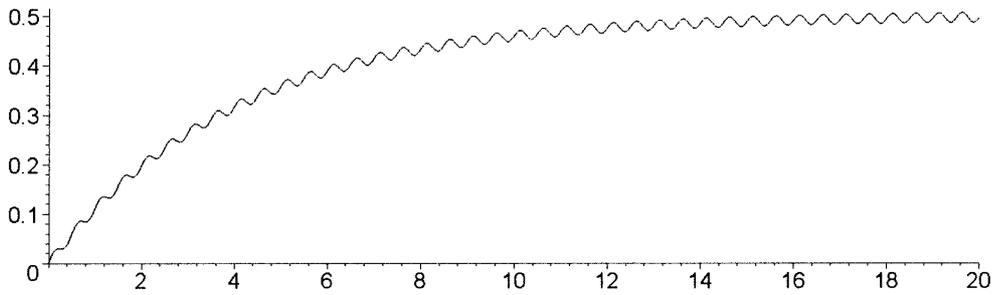
$$u = A e^{-t/\tau}$$

> Courbes;  
V:=1;T:=1;tau:=4;

> tension d'entrée:



> tension aux bornes du condensateur:

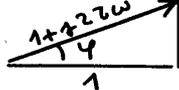


>

finalement

$$u = A e^{-t/\tau} + \frac{\hat{V}}{2} + \frac{\hat{V}}{2} \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2\tau^2}} \cos(2\omega t - \overbrace{\arctan(2\omega\tau)}^{\varphi})$$

C.I.  $0 = A + \frac{\hat{V}}{2} + \frac{\hat{V}}{2} \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2\tau^2}} \cos \varphi$



donc  $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2\tau^2}}$

$$u = \frac{\hat{V}}{2} \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2\tau^2}} \cos(2\omega t - \arctan(\omega\tau)) - \left(1 + \frac{1}{1+4\omega^2\tau^2}\right) e^{-t/\tau} \right]$$

$$11) \langle A(t) \cdot w(t) \rangle = \underbrace{\hat{V} \hat{W} \langle \cos \omega t \cos(\omega t + \alpha) \rangle}_{\text{d'après 1)}} + \underbrace{\hat{U} \hat{W} \langle \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \alpha) \rangle}_{\text{d'après 3)}} = \frac{1}{2} \hat{V} \hat{W} \cos \alpha$$

$$M = \langle A(t) \cdot w(t) \rangle = \hat{V} \hat{W} \frac{1}{2} \cos \alpha$$

$$12) \text{ on fait } \hat{W}/\text{volts} = 2$$

$$\text{on fait } \cos \alpha = +1 \quad (\alpha = 0)$$

$$M_{\max} (\alpha=0) = \hat{V}$$

$$13) \quad \begin{aligned} \varphi_0 &= \langle A^2(t) \rangle \\ &= \langle A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle \end{aligned}$$

$$\varphi_0 = \frac{A^2}{2}$$

$$14) \quad \langle A(t)^2 \rangle = \langle (A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2))^2 \rangle$$

Si les deux ondes ont de fréquences différentes, en utilisant 3)

$$\langle A(t)^2 \rangle = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2}$$

$$\varphi_0 = \varphi_{01} + \varphi_{02}$$

(pas d'interférences, les éclaircissements s'additionnent)

Si les deux ondes ont la même fréquence, donc  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$   
on utilisant 2)

$$\langle \Delta^2(t) \rangle = \frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^2) + A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 + \sqrt{2} \frac{A_1}{A_1} \sqrt{2} \frac{A_2}{A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\boxed{\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 + 2 \sqrt{\frac{A_1}{A_1} \frac{A_2}{A_2}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

(interférences car  $\varphi_0 \neq \varphi_1 + \varphi_2$ )

Pas d'interférences pour des ondes de fréquences différentes.

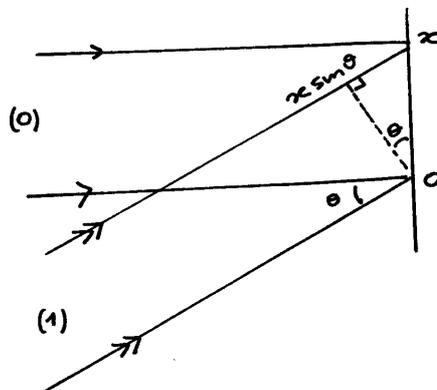
15) Pour obtenir des interférences, il faut

- cohérence en fréquence (deux ondes de même fréquence)
- cohérence en phase ( $(\varphi_2 - \varphi_1)$  doit être indépendant du temps)

on peut faire par exemple deux images de la même source  
pour obtenir des sources mutuellement cohérentes (du trou de pont d'onde)

(on peut aussi faire deux rayons d'un seul rayon par division  
d'amplitude)

16)



En O, l'onde (0) et l'onde (1) sont en phase.

A l'abscisse  $x$ , l'onde (0) est en phase avec l'onde (0) en O  
l'onde (1) a parcouru un chemin supplémentaire  
 $x \sin \theta$  par rapport à l'onde (1) en O

$$\boxed{\delta_{1/0} = x \sin \theta}$$

(cf l'indice vaut 1)

17)

$$A_0(x,t) = A_0 \cos \omega t$$

$$A_1(x,t) = A_1 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi \delta}{\lambda \sin \theta} \right)$$

$$A_1(x,t) = A_1 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi x \sin \theta}{\lambda} \right)$$

18) En utilisant le resultat de 14)

$$q_0 = q_0 + q_1 + 2\sqrt{q_0 q_1} \cos \left( \frac{2\pi x \sin \theta}{\lambda} \right)$$

19) → L'interfrange correspond à la période de  $q$  donc du cosinus  
période  $\Delta x$  pour  $\frac{\Delta x \sin \theta}{\lambda} = 1$

$$i = \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

A.N.  $= \frac{633 \cdot 10^{-9}}{1/2}$

$$i = 1,266 \text{ nm}$$

(on remarquera que le phénomène d'interférences ne sera pas visible à l'œil nu car l'interfrange est trop petit.)

→ Le contraste

$$C = \frac{I_{\text{MAX}} - I_{\text{MIN}}}{I_{\text{MAX}} + I_{\text{MIN}}}$$

avec  $I_{\text{MAX}}$  quand  $\cos = +1$ 

$$= q_0 + q_1 + 2\sqrt{q_0 q_1}$$

et  $I_{\text{MIN}}$  quand  $\cos = -1$ 

$$= q_0 + q_1 - 2\sqrt{q_0 q_1}$$

$$C = \frac{4\sqrt{q_0 q_1}}{2(q_0 + q_1)}$$

$$C = \frac{2\sqrt{q_0 q_1}}{q_0 + q_1}$$

A.N.

Avec  $A_0 = 2A_1$   
 $q_0 = 4q_1$

$$= \frac{2\sqrt{4q_1^2}}{4q_1 + q_1}$$

$$C = 0,8$$

20) → diffraction : on observe de la lumière dans une zone plus étendue que celle prévue par l'optique géométrique.

→ principe de Huygens - Fresnel.

Les points atteints par la lumière se comportent comme des sources secondaires émettant des ondelettes sphériques cohérentes qui interfèrent entre elles. L'amplitude de l'ondelette réémise par  $dS$  est proportionnelle à  $dS$ . L'ondelette réémise a la phase et la fréquence de l'onde incidente

$$\begin{aligned} 21) \quad T(x) &= \mu \zeta = \mu (\zeta_0 + \zeta_1 + 2\sqrt{\zeta_0 \zeta_1} \cos\left(\frac{2\pi x \sin \theta}{\lambda}\right)) \\ &= \alpha + \beta \cos\left(\frac{2\pi x \gamma}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \alpha &= \mu (\zeta_0 + \zeta_1) \\ \beta &= \mu 2\sqrt{\zeta_0 \zeta_1} \\ \gamma &= \sin \theta \end{aligned}$$

22) On a :  $\underline{a_0} = A_0 \exp i \omega t$

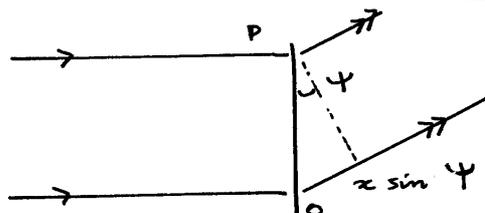
L'onde réémise est, en  $x$ , par la surface  $dS$ ,

$$T(x) \underline{a_0} dS = T(x) A_0 \exp i \omega t \quad \text{à } dx$$

d'amplitude :  $T(x) \underbrace{A_0 \ell}_{a_0} dx$

$$a_0 = A_0 \ell$$

23)



on désigne par  $\delta'$  le retard de chemin optique du trajet P

par rapport au trajet 0

$$S' = -x \sin \psi$$

L'amplitude complexe (on n'écrivant pas le terme en  $\exp i\psi$ ) est donc, pour l'onde diffractée élémentaire,

$$\underline{d}o' = a_0 T(x) dx \exp i\psi_{p/0}$$

$$= a_0 T(x) dx \exp i \frac{2\pi S'}{\lambda}$$

$$\underline{d}o' = a_0 T(x) dx \exp\left(\frac{-i 2\pi x \sin \psi}{\lambda}\right)$$

24)

$$\underline{d}o' = a_0 \left( \alpha + \beta \cos \frac{2\pi x \delta}{\lambda} \right) dx \exp\left(-i \frac{2\pi x \sin \psi}{\lambda}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\exp i \frac{2\pi x \delta}{\lambda} + \exp -i \frac{2\pi x \delta}{\lambda}$$

Donc  $\underline{d}o'$  se décompose en trois termes :

$$\underline{d}o' = a_0 \alpha \exp -i \frac{2\pi x \sin \psi}{\lambda} dx$$

$$+ a_0 \frac{\beta}{2} \exp -i \frac{2\pi x (\sin \psi - \delta)}{\lambda} dx$$

$$+ a_0 \frac{\beta}{2} \exp -i \frac{2\pi x (\sin \psi + \delta)}{\lambda} dx$$

En intégrant entre  $-h/2$  et  $h/2$  :

$$\Delta' = a_0 \alpha h \operatorname{sinc} \frac{\pi h \sin \psi}{\lambda}$$

$$+ a_0 \frac{\beta}{2} h \operatorname{sinc} \frac{\pi h (\sin \psi - \delta)}{\lambda}$$

$$+ a_0 \frac{\beta}{2} h \operatorname{sinc} \frac{\pi h (\sin \psi + \delta)}{\lambda} \quad (\delta = \sin \theta)$$

25) les trois directions privilégiées correspondent aux trois maxima des  $\operatorname{sinc}$  donc

$$\frac{\pi h \sin \psi}{\lambda} = 0$$

$$\frac{\pi h (\sin \psi - \sin \theta)}{\lambda} = 0$$

$$\frac{\pi h (\sin \psi + \sin \theta)}{\lambda} = 0$$

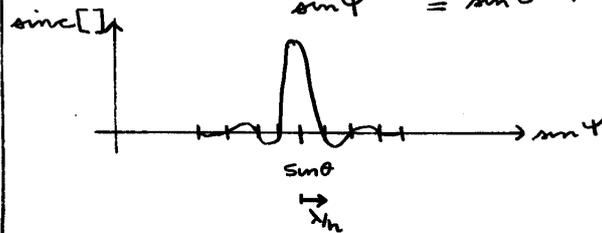
$$\psi = 0$$

$$\psi = \theta$$

$$\psi = -\theta$$

on étudie l'allure des sinc précédents.

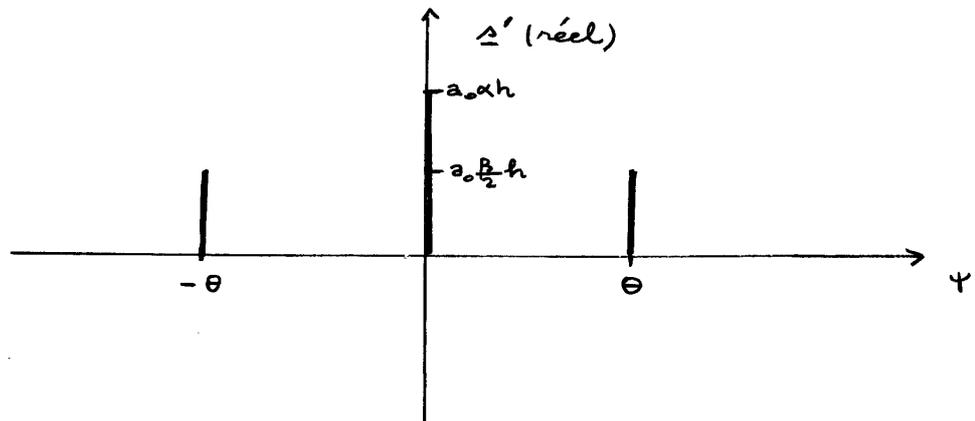
Ex:  $\text{sinc}\left[\frac{\pi h}{\lambda}(\sin\psi - \sin\theta)\right]$   
 il s'annule pour  $m \in \mathbb{Z}^*$   
 $\frac{\pi h}{\lambda}(\sin\psi - \sin\theta) = m\pi$   
 $\sin\psi = \sin\theta + m \frac{\lambda}{h}$



Ici  $\lambda/h$  est  $\ll 1$  donc on obtient quasiment pour ce terme, une seule direction dans laquelle la lumière est diffractée



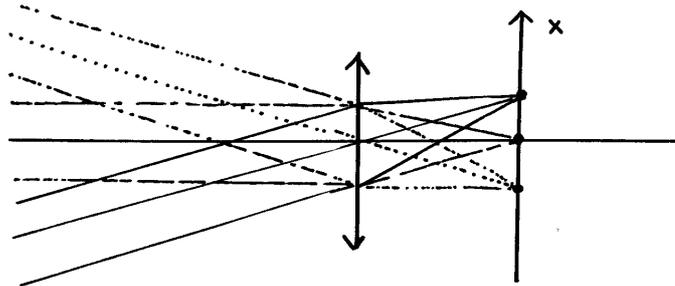
finalement, on peut représenter  $\Delta'$  (réel ici)



26) L'onde diffractée dans la direction  $\theta$

- est une onde plane (comme l'onde initiale  $\Delta_1$ )
- d'amplitude  $a_0 \frac{\beta}{2} h = \left(\frac{h \ell h}{2} A_0^2\right) A_1$  (proportionnelle à  $A_1$  amplitude de  $\Delta_1$ )

27)



on obtient 3 images dans le plan focal

$$\begin{aligned} & - \text{en } x = 0 \\ & - \text{en } x = \pm f\theta \\ & \quad (= \pm 5 \text{ cm}) \end{aligned}$$

28) Il faut reprendre ici le calcul des moyennes.

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= A \left[ \cos\left(\omega + \frac{\delta\omega}{2}\right)t + \cos\left(\omega - \frac{\delta\omega}{2}\right)t \right] \\ &= 2A \cos\frac{\delta\omega}{2}t \cos\omega t \\ \Delta^2(t) &= 4A^2 \cos^2\frac{\delta\omega}{2}t \cos^2\omega t \end{aligned}$$

$$\langle \Delta^2(t) \rangle = 2A^2 \cos^2\frac{\delta\omega}{2}t$$

29) La bande passante de l'oreille humaine est

$$20 \text{ Hz} \quad \text{---} \quad 20 \text{ kHz}$$

(le vieillissement diminue cette bande passante)

les deux fréquences ne sont pas audibles séparément

Mais ensemble, on obtient :

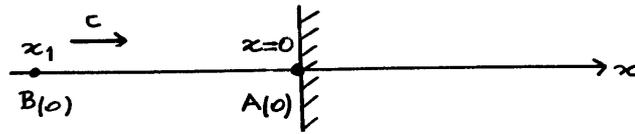
$$\langle \Delta^2(t) \rangle = 2A^2 \cos^2\frac{\delta\omega}{2}t$$

$$\langle \Delta^2(t) \rangle = A^2 (1 + \cos(\delta\omega t))$$

L'oreille perçoit le son de pulsation  $\delta\omega$  ou de fréquence  $\delta f$  avec  $\delta f = 40,5 - 39,5$

$$\delta f = 1 \text{ kHz}$$

30)



En  $t=0$ ,  $B(0)$  est donc en:

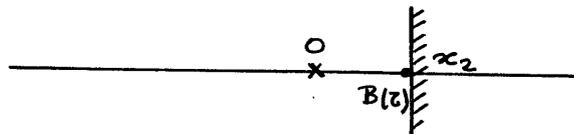
$$x_1 = -cT$$

Il atteint le miroir en  $t=T$ , le miroir se trouve alors en  $x_2 = vT$  et donc  $B$  a dû parcourir la distance total  $cT + vT$  pendant  $T$ , à la vitesse  $c$

$$cT = cT + vT$$

$$T = \frac{c}{c-v} T$$

$$x_2 = \frac{cv}{c-v} T$$



31) Pendant cette durée  $T$ ,  $A$  réfléchi en  $x=0$  a parcouru une distance

$$d = cT$$

$$d = \frac{c^2}{c-v} T$$

et se trouve en  $A(T)$  d'abscisse  $x_3 = -\frac{c^2}{c-v} T$



32)  $AB$  correspond alors à la distance entre deux maxima pour l'onde réfléchi

$$AB = \text{longueur d'onde de l'onde réfléchi}$$

$$\lambda' = x_2 - x_3$$

onde, réfléchi

$$= \frac{c-v}{c-v} T - \frac{-c^2}{c-v} T$$

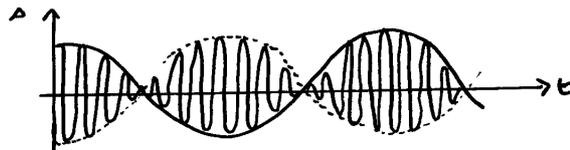
$$\lambda' = c T \frac{c+v}{c-v}$$

33) Donc la période de l'onde réfléchi ne vaut plus  $T$  mais

$$T' = T \frac{c+v}{c-v}$$

$$f' = f \frac{c-v}{c+v}$$

34) On a vu, à la question 28) que  $A = 2A \cos \frac{\delta\omega}{2} t \cos \omega t$



← période de modulation (la période de  $\cos \frac{\delta\omega}{2} t$ )

← période de battement

La période de battement vaut

$$T_{\text{battement}} = \frac{2\pi}{\delta\omega}$$

$$T_{\text{battement}} = \frac{1}{\delta f}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \delta f &= |f' - f| \\ &= \left| f \frac{1-v}{1+v} - f \right| \\ &= \frac{2f \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} \end{aligned}$$

$$\delta f \approx 2f \frac{v}{c}$$

A.N. Il s'agit d'une onde hertzienne (entre bande FM et TV)

$$\begin{aligned} &= 2 \frac{v}{\lambda} \\ &= 2 \times 30 / 0,5 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\delta f = 120 \text{ MHz}$$

## Couleurs par diffraction

$$1) \quad \boxed{0,4 \mu\text{m} < \lambda < 0,8 \mu\text{m}} \\ \text{(violet) \hspace{10em} (rouge)}$$

$$2) \quad \text{avec } \nu_{\text{rouge}} = \frac{c}{\lambda_{\text{rouge}}} \\ = \frac{3 \cdot 10^8}{0,8 \cdot 10^{-6}} \\ = 3,8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

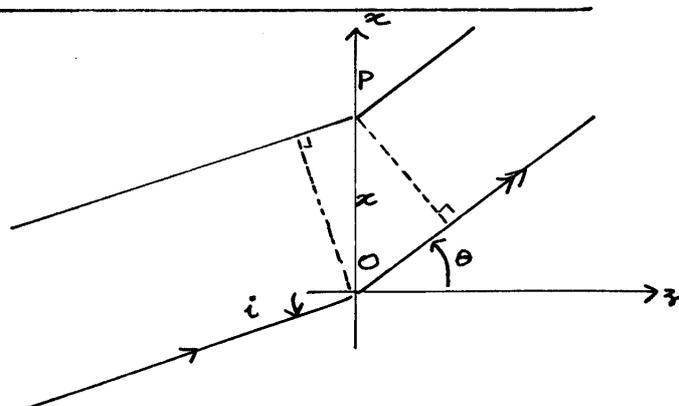
$$\nu_{\text{violet}} = \frac{c}{\lambda_{\text{violet}}} \\ = \frac{3 \cdot 10^8}{0,4 \cdot 10^{-6}} \\ = 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\boxed{7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz} > \nu > 3,8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} \\ \text{(violet) \hspace{10em} (rouge)}$$

3) On sait que la diffraction, due à chaque fente, selon  $x$ , provoque de la lumière diffractée (on ne tenant compte que du lobe central) pour des angles  $\theta_x$  tels que:  $-\frac{\lambda}{L} < (\sin \theta_x - \sin i) < \frac{\lambda}{L}$   
De même, selon  $y$ , pour des angles  $\theta_y$  tels que:  $-\frac{\lambda}{L} < \sin \theta_y < \frac{\lambda}{L}$

Si  $L \gg \lambda$  on obtient  $\sin \theta_y \approx 0$  ce qui revient à négliger la diffraction selon  $y$ . La lumière incidente, dans le plan  $xOz$ , reste donc, dans le plan  $xOz$ .

4)



↖ +  
sens positif  
pour les angles

Le plan  $xOz$  est orienté par  $Oz$ . On considère les deux angles  $i$  et  $\theta$  sur la figure comme positifs

donc 
$$\delta_{P/O} = (\text{trajet } P) - (\text{trajet } O) = x \sin i - x \sin \theta$$
  
(car l'indice = 1)

avec, en comptant positivement les déphasages retardés

$$\varphi_{P/O} = \varphi(P) - \varphi(O) = \frac{2\pi x (\sin i - \sin \theta)}{\lambda}$$

↑  
déphasage du trajet passant par  $O$  depuis la source jusqu'au point d'observation.

On fait  $\varphi(O) = 0$  quand ce trajet est pris pour référence.

L'amplitude diffractée par la première fente dans la direction  $\theta$  (l'onde diffractée par la surface  $dS$  en  $P$  est en :

$$A \, dx \exp j(\omega t - \varphi(P))$$

donc l'amplitude complexe en

$$A \, dx \exp -j\varphi(P)$$

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_0 &= \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} A \, dx \exp -j\varphi(P) \\ &= A \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \exp -j(\varphi(O) + \varphi_{P/O}) \end{aligned}$$

$$\underline{\Delta}_0 = A \exp -j\varphi(O) \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \exp -j \frac{2\pi x}{\lambda} (\sin i - \sin \theta) \, dx$$

5) Pour  $\underline{\Delta}_1$  le calcul est de même nature

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_1 &= A \exp -j\varphi(O) \int_{a-e/2}^{a+e/2} \exp -j \frac{2\pi x}{\lambda} (\sin i - \sin \theta) \, dx \\ &= A \exp -j\varphi(O) \exp -j \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin i - \sin \theta) \times \\ &\quad \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \exp -j \frac{2\pi x}{\lambda} (\sin i - \sin \theta) \, dx \end{aligned}$$

(qui peut d'ailleurs s'écrire :  $\frac{e}{2}$ )  

$$A \exp -j\varphi_0 \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \exp -j\frac{2\pi x}{\lambda} (\sin i - \sin \theta) dx$$
 ↑  
 milieu de la fente 1

$$\Delta_1 = \exp \left[ -j\frac{2\pi a}{\lambda} (\sin i - \sin \theta) \right] \Delta_0$$

note exp  $j\varphi$

L'énoncé pose donc :

$$\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin \theta - \sin i)$$

6)

$$\Delta_{\text{total}} = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n + \dots + \Delta_{(N-1)}$$

$$= \Delta_0 + \exp j\varphi \Delta_0 + \exp 2j\varphi \Delta_0 + \dots + \exp jn\varphi \Delta_0 + \dots + \exp j(N-1)\varphi \Delta_0$$

$$\Delta_{\text{total}} = \Delta_0 \sum_{n=0}^{N-1} \exp jn\varphi$$

$$\Delta(N, \varphi) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp jn\varphi$$

7)

$$I = \left( \Delta_0 \Delta(N, \varphi) \right) \left( \Delta_0 \Delta(N, \varphi) \right)^*$$

$$= \Delta_0 \Delta_0^* \Delta(N, \varphi) \Delta(N, \varphi)^*$$

$$= |\Delta_0|^2 I(N, \varphi)$$

avec

$$I(N, \varphi) = \Delta(N, \varphi) \Delta(N, \varphi)^*$$

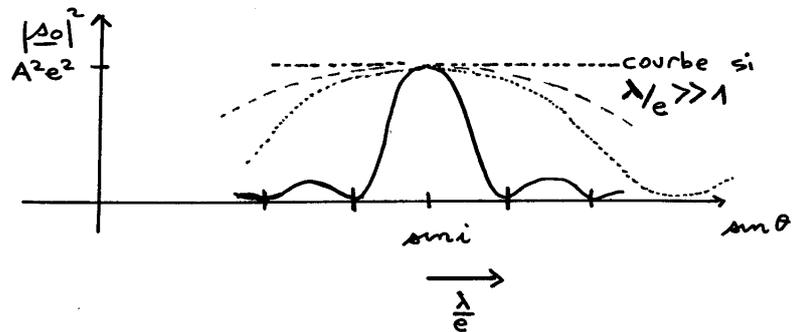
8) On sait que si les fentes sont infiniment minces, elles diffractent de manière uniforme dans toutes les directions.

démonstration :

on calcule  $\Delta_0 = A \exp -j\varphi_0$  e  $\text{sinc} \left( \frac{\pi e}{\lambda} (\sin i - \sin \theta) \right)$

$$|\Delta_0|^2 = \Delta_0 \Delta_0^*$$

$$|\Delta_0|^2 = A^2 e^2 \operatorname{sinc}^2 \left[ \frac{\pi e}{\lambda} (\sin i - \sin \theta) \right]$$



La  $\frac{1}{2}$  largeur à la base du lobe central vaut  $\frac{\lambda}{e}$ .

Si  $\frac{\lambda}{e} \gg 1$ ,  $|\Delta_0|^2$  tend vers une constante  $\neq \theta$ , indépendante de  $i$ .

remarque

Pour les calculs, on a supposé que la théorie de Fresnel restait valable. C'est faux, en réalité, pour  $e$  de l'ordre de grandeur de  $\lambda$  ou plus petit que  $\lambda$ .

g) L'intensité est maximale pour

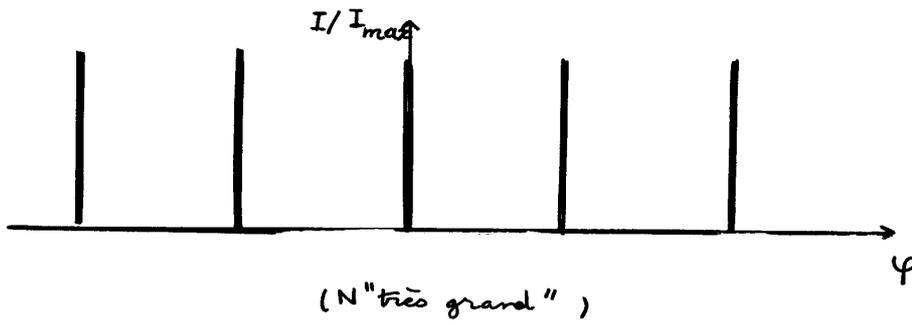
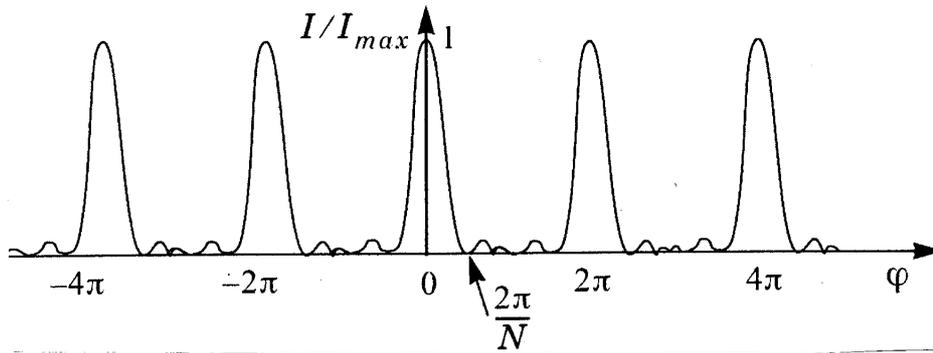
$$\varphi = 2\pi p \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2\pi e}{\lambda} (\sin \theta - \sin i) = 2\pi p$$

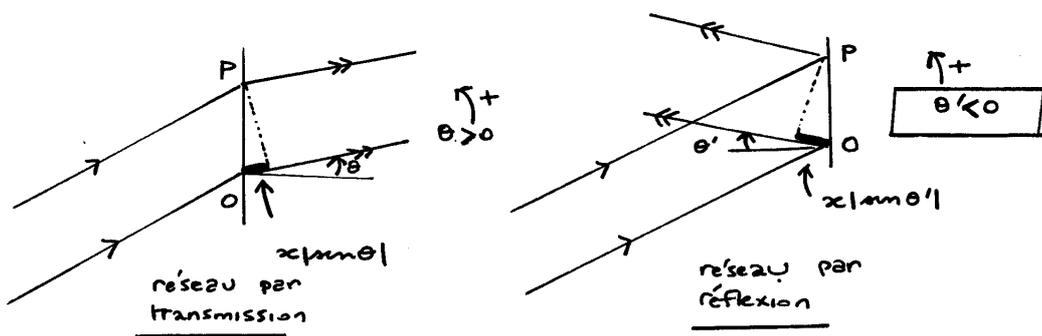
$$\sin \theta = \sin i + p \frac{\lambda}{e}$$

(avec  $|\sin \theta| \leq 1$ )

Si  $N$  devient grand, la finesse devient plus grande (cf  $\frac{2\pi}{N}$  devient infime) et la courbe tend vers une "fonction peigne". Il n'y a plus de lumière qu'au niveau des maxima (ordres entiers)



10)



au lieu de  $x \sin \theta$  , on a  $x \sin \theta'$   
 $x \sin \theta$   $- x \sin \theta'$

au lieu de  $\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin \theta - \sin i)$

on aura  $\varphi' = \frac{2\pi a}{\lambda} (-\sin \theta' - \sin i)$

11) Maximum pour (dans le cas de l'incidence normale  $i=0$ )

$-\sin \theta' = \sin i + p \frac{\lambda}{a}$  (en posant  $p' = -p$ )

$\sin \theta' = p' \frac{\lambda}{a}$   
 (avec  $|\sin \theta'| \leq 1$ )

Pour le violet ( $\lambda = 0,4 \mu\text{m}$ )

$p'$	$\sin \theta'$	$\theta'$ en degrés
0	0	0
1	0,25	14,5
2	0,50	30
3	0,75	48,6
4	1	90

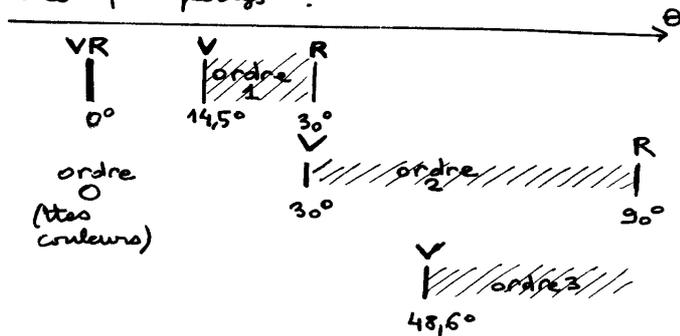
(valeurs opposées pour les ordres -1, -2, -3, -4)

Pour le rouge ( $\lambda = 0,8 \mu\text{m}$ )

$p'$	$\sin \theta'$	$\theta'$ en degrés
0	0	0
1	0,5	30
2	1	90

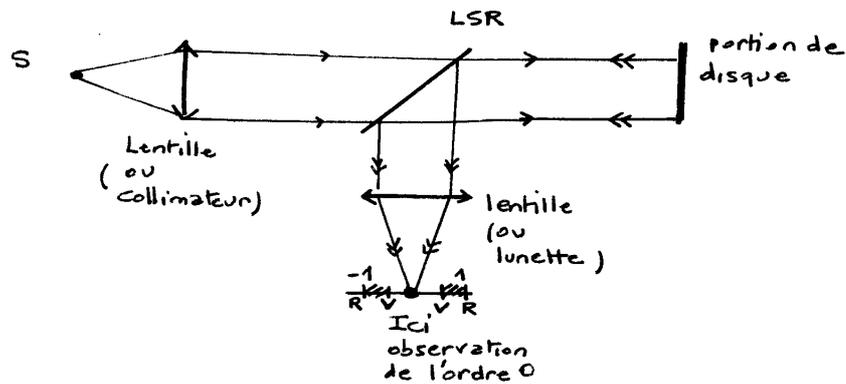
(valeurs opposées pour les ordres -1, -2)

finalament pour les ordres  $p'$  positifs :



Il y a recouvrement net entre le spectre d'ordre 2 et le spectre d'ordre 3

12) Pour observer la lumière diffractée en incidence normale, afin de ne pas perturber la lumière incidente on peut utiliser une lame semi-refléchissante LSR



13)

On aura pour le batômet  $(n_x, n_z)$

$$\begin{aligned} \Delta(n_x, n_z) &= \Delta'_0 \exp \left[ j \left( \vec{k}_{\text{diff}} - \vec{k}_{\text{incident}} \right) \cdot \vec{O}_{(0,0)}(n_x, n_z) \right] \\ &= \Delta'_0 \exp \left[ j \left( \begin{matrix} 2\pi u \\ 2\pi w \end{matrix} \cdot \begin{matrix} n_x a \\ n_z a \end{matrix} \right) \right] \\ &= \Delta'_0 \exp \left[ j (n_x \varphi_x + n_z \varphi_z) \right] \end{aligned}$$

séparation préalable des phases grâce à l'exponentielle

$$\Delta(n_x, n_z) = \Delta'_0 \exp j n_x \varphi_x \exp j n_z \varphi_z$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{total}} &= \Delta'_0 \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \sum_{n_z=0}^{N_z-1} \exp j n_x \varphi_x \exp j n_z \varphi_z \\ &= \Delta'_0 \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \exp j n_x \varphi_x \sum_{n_z=0}^{N_z-1} \exp j n_z \varphi_z \end{aligned}$$

$$\Delta_{\text{total}} = \Delta'_0 \Delta(N_x, \varphi_x) \Delta(N_z, \varphi_z)$$

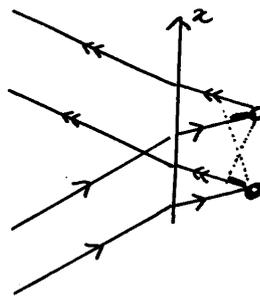
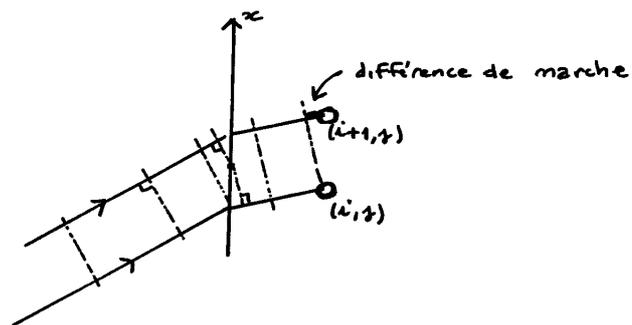
En multipliant par le conjugué :

$$I = |\Delta'_0|^2 I(N_x, \varphi_x) I(N_z, \varphi_z)$$

14) On se place dans la direction du maximum de la lumière diffractée (cf direction de la réflexion prévue par l'optique géométrique) c'est à dire  $n' = -n$

→ détermination de  $\varphi_x$

remarque : surfaces d'ondes (équiphases) pour le faisceau incident lors de la réflexion

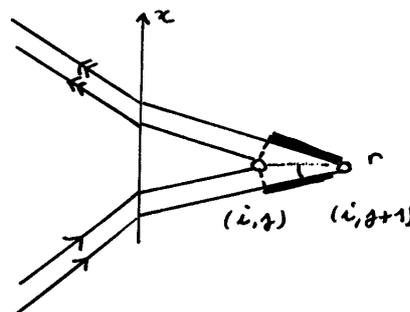


Dans le cas particulier envisagé ( $n' = -n$ ) la situation des incidents et des diffractés est symétrique.

Donc

$$\varphi_x = 0$$

→ détermination de  $\varphi_y$



Le trajet concernant le bâtonnet  $(i, j+1)$  est plus long de  $2a \cos r$

$$\delta = n 2a \cos r$$

avec

$$\sin i = n \sin r$$

$$\delta_{(i, j+1)/(i, j)} = n 2a \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}$$

$$\varphi_j = - \frac{4\pi a n}{\lambda_{\text{vide}}} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}$$

(le - vient de ce que l'on écrit dans le problème  $\hat{\Delta}_1 = \exp j\varphi \approx$   
donc  $\exp j(\omega t + \varphi)$   
↑ avance)

- 15) Il y a interférence entre tous les rayons diffractés (cf réseau)  
Les maximums sont obtenus pour:

$$\varphi_j = p 2\pi \quad (\text{ou avec } p' = -p) \\ p \in \mathbb{Z}^*$$

$$\frac{4\pi a n}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}} = p' 2\pi$$

$$\sin^2 i = \left( n^2 - p^2 \frac{\lambda^2}{4a^2} \right)$$

angle d'incidence  $i$  (avec  $0 \leq \sin^2 i \leq 1$ )  
et angle d'émergence:  $-i$

- 15) Toutes les longueurs d'onde sont présentes dans la lumière émergente si :

$$0 \leq n^2 - p^2 \frac{\lambda^2}{4a^2} \leq 1$$

$$|p| \frac{\lambda}{2n} \leq a \leq |p| \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2-1}}$$

On trouve la plus petite valeur de  $a$  en considérant l'ordre 1

$$\frac{\lambda}{2n} < a$$

doit être vérifié  $\forall \lambda$  donc pour  $\lambda_{\text{rouge}} = 0,8 \mu\text{m}$

A.N.  $a_{\text{min}} = \frac{0,8 \mu\text{m}}{2 \times 1,5}$

$$a_{\text{min}} = 0,27 \mu\text{m}$$

17) En incidence normale

$$\begin{aligned} \varphi_x &= 0 \\ \varphi_z &= -\frac{4\pi a n}{\lambda} \end{aligned}$$

$a$ ( $\mu\text{m}$ )	condition de maximum pour la lumière émergente	max possibles
0,16	$ \lambda  = 0,48 \mu\text{m}$	maximum pour le bleu de $0,48 \mu\text{m}$
0,17	$= 0,51 \mu\text{m}$	maximum pour le bleu vert de $0,51 \mu\text{m}$
0,21	$= 0,63 \mu\text{m}$	maximum pour le rouge de $0,63 \mu\text{m}$