DNS

Sujet

Diffraction de base

I. Principe de Huygens-Fresnel

L’interprétation quantitative, la plus simple, de la diffraction, repose sur une théorie ondulatoire dont les hypothèses de base, formulées par Huygens dès 1678, furent complétées par Fresnel en 1818 et synthétisées sous le nom de «principe de Huygens-Fresnel ».

1. Quelle est la contribution de Huygens?

2. Quelle est celle attribuée à Fresnel?

II. Diffraction de Fraunhofer

D’après le principe de Huygens-Fresnel, l’amplitude complexe d’une onde monochromatique scalaire en un point M s’écrit :

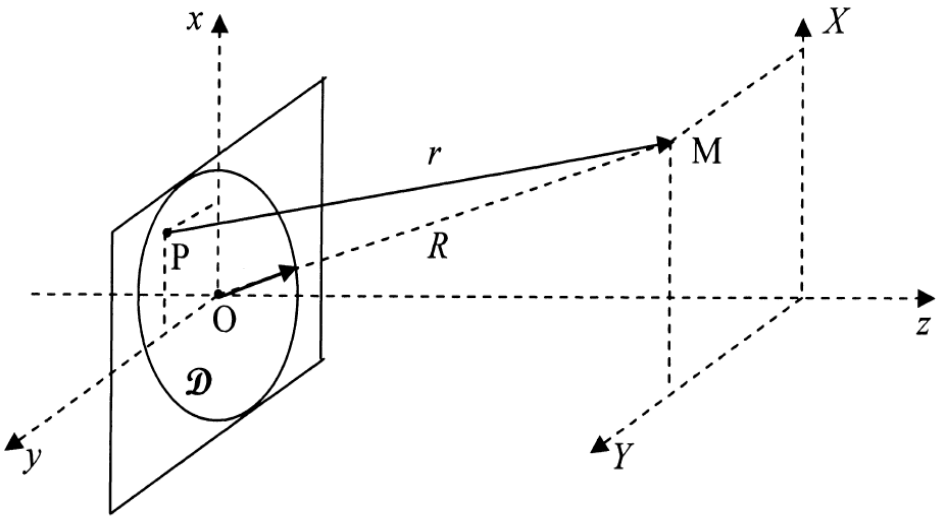
$$\underline{\Psi}(M)=C\iint_S \underline{\Psi}_0(P)\frac{\exp(jkr)}{r}dS$$

où $\underline{\Psi}_0(P)$ est l’amplitude complexe de l’onde incidente en P de S , $r=PM$ et $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ le module du vecteur d’onde de la vibration.

3. Dans l’expression de $\underline{\Psi}(M)$, que traduit le terme $\exp(jkr)$ et que caractérise la fonction $\frac{1}{r}$?

4. Quelle est la dimension physique de la constante C ?

5. On désigne par Oxy le plan pupillaire, comprenant le diaphragme $\mathscr{D}$, Oz l’axe normal à ce plan, P le point de coordonnées (x,y) et (X,Y,z) les coordonnées du point M $(Figure\,1)$. Montrer que r s’exprime en fonction de $R=OM$, de OP et du produit scalaire $\vec{u}_{OM}\cdot\overrightarrow{OP}$ où le vecteur unitaire $\vec{u}_{OM}=\frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ caractérise la direction d’observation.

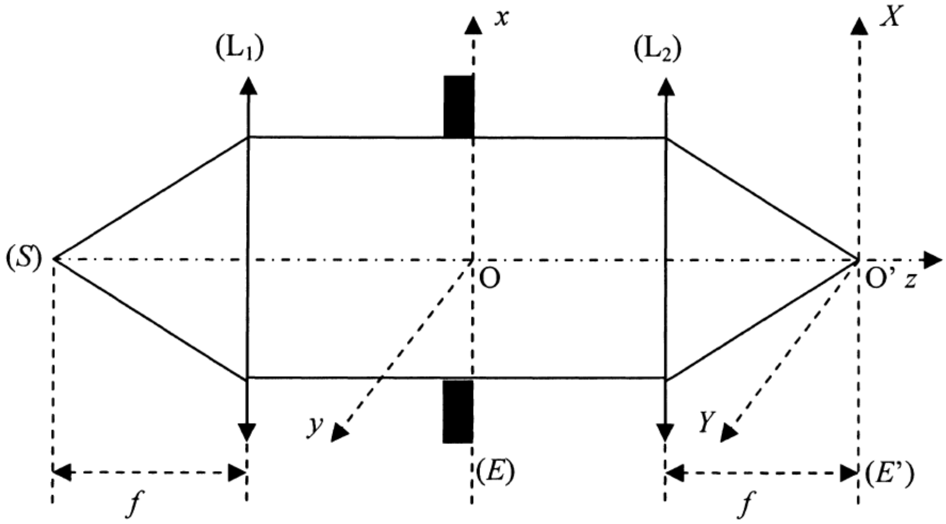


6. En déduire que, dans l'approximation de Fraunhofer, la simplification de r dans $\dfrac{\exp(jkr)}{r}$ conduit à l'expression approchée suivante pour l'amplitude complexe de l'onde au point P : $\underline{\Psi}(M)=\underline{K}\iint_{\mathcal{D}}\underline{\Psi}_0(P)\exp(-j\vec{k}\,\overrightarrow{OP})\,dS$ où $\vec{k}=k\,\vec{u}_{OM}=\dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{u}_{OM}$. Expliciter la constante $\underline{K}$ en fonction de la constante C , de R et k . Quelle est la dimension physique de $\underline{K}$.

7. On introduit les fréquences spatiales $u=\dfrac{\alpha}{\lambda}$ et $y=\dfrac{\beta}{\lambda}$ où α et β sont les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}_{OM}$ suivant les axes Ox et Oy . Que devient l'expression de l'amplitude complexe $\underline{\Psi}(M)=\underline{\Psi}(u,v)$?

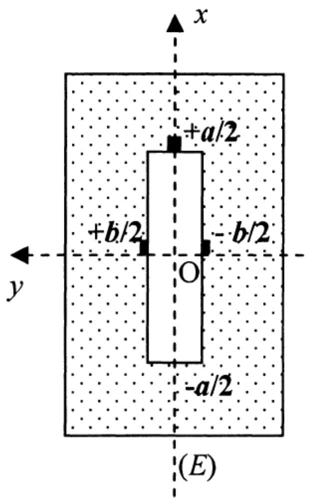
8. En déduire l'intensité de l'onde lumineuse $I(u,v)$ dans le plan d'observation suivant la direction (u,v) .

III. Diffraction par une fente



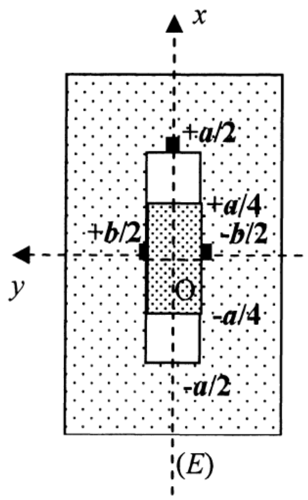
Le système optique, représenté sur la *Figure* 2 , comprend un écran opaque (E) , percé d'un diaphragme rectangulaire ($Figure\,3$), placé entre deux lentilles minces convergentes identiques (L_1) et (L_2) (focales images f). Une source ponctuelle (S) émettant une radiation monochromatique (longueur d'onde λ) est placée au foyer objet de (L_1) . La lumière diffractée est observée sur un écran (E') placé dans le plan focal image de (L_2) .

On repère un point P du diaphragme par ses coordonnées x et y dans (E) et un point M de (E') par ses coordonnées X et Y dans (E') . Les axes Ox et $O'X$ d'une part, Oy et $O'Y$ d'autre part, sont parallèles. Les deux lentilles sont disposées suivant le même axe optique Oz perpendiculaire à (E) et (E') .



9. Montrer que l'amplitude de l'onde lumineuse diffractée par la fente, représentée sur la $Figure\,3$, dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u}_{OM}(\alpha,\beta,\gamma)$ est de la forme $\underline{\Psi}_{(u,v)}=\underline{\zeta}_0\dfrac{\sin U}{U}\dfrac{\sin V}{V}$. Les paramètres $\underline{\zeta}_0$, U et V seront exprimés en fonction de $a\,,b$ dimensions de la fente, de $\underline{\Psi}_0(P)$, de $\underline{K}$ et des fréquences spatiales u et v pour la longueur d'onde λ .

10. En déduire l'intensité $I(u,v)$ en un point $M(u,v)$ de l'écran (E') .



11. On recouvre la fente rectangulaire transparente de dimensions a et b d'une pupille

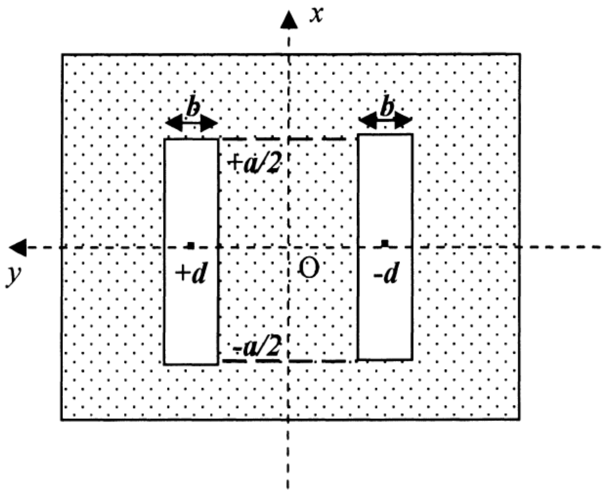
rectangulaire transparente de même centre O , de mêmes axes de symétries Ox et Oy , de dimensions $a/2$ et b et qui introduit un déphasage de π pour les ondes qui la traversent $(Figure\,4)$. Déterminer, à nouveau, l'amplitude diffractée $\underline{\Psi}'(u,v)$ et l'intensité $I'(u,v)$ au point $M(u,v)$ de (E') .

IV. Diffraction par deux fentes

12.On fait subir à la fente une translation dans son plan Oxy pour la centrer au point de coordonnées (x_0, y_0) . Exprimer l'amplitude complexe $\underline{\Psi}_0(u,v)$; en quoi diffère-t-elle de $\underline{\Psi}(u,v)$?

13.Comparer la nouvelle intensité $I_0(u,v)$ à $I(u,v)$.

14.En tenant compte des résultats précédents, indiquer quelles sont les amplitudes complexes $\underline{\Psi}_1(u,v)$ et $\underline{\Psi}_2(u,v)$ de deux fentes centrées respectivement en ($x_1=0$; $y_1=+d$) et en ($x_2=0$; $y_2=-d$) ($Figure\,5$)?



15.En déduire l'amplitude complexe $\underline{\Psi}''(u,v)$ et l'intensité $I''(u,v)$), que l'on mettra sous la forme $I_0''.f(u).g(v)$, de la lumière diffractée par ces deux fentes sur l'écran (E') . On exprimera les I_0'' , $f(u)$ et $g(v)$.

16.Comment peut-on, à partir de la représentation graphique de la fonction $g(v)$, déterminer la distance entre les fentes et une des deux dimensions des fentes?

Réponses

1) La contribution de Huygens (1678)

La lumière se propage de proche en proche.

Chaque élément de surface atteint par elle se comporte comme une source secondaire qui émet des ondelettes sphériques dont l'amplitude est proportionnelle à cet élément de surface.

---

2) La contribution de Fresnel (1818)

Les vibrations de ces ondelettes sphériques sont cohérentes. Elles interfèrent pour former la vibration au point considéré.

---

3) • Le terme en $\exp(j k r_{PM})$ traduit le terme en $\exp j\varphi_{PM}$ avec $\varphi_{PM} = \frac{2\pi}{\lambda} PM$ désignant le déphasage de l'ondelette issue de P dans sa propagation de P à M.

remarque

on remarquera que le texte proposé travaille dans la convention $\boxed{\exp - j\omega t}$

d'où l'amplitude complexe en

$$\exp j(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

• La fonction $\frac{1}{r_{PM}}$ caractérise la décroissance en $\frac{1}{r}$ de l'amplitude pour une onde sphérique issue du point M

---

4)

$$\Psi(M) = C \iint_S \Psi_0(P) \frac{\exp(jkr)}{r} dS$$

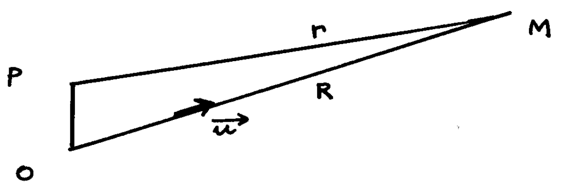
dimensions: $[\Psi] = [C] \quad [\Psi] \quad \frac{1}{L} \quad L^2$

donc $\boxed{[C] = L^{-1}}$

(C a pour dimension l'inverse d'une longueur)

---

5)



$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM}$$

donc

$$\vec{PM} = \vec{OM} - \vec{OP}$$

$$\vec{PM}^2 = \vec{OM}^2 - 2\,\vec{OM}.\vec{OP} + \vec{OP}^2 \qquad \text{(cf AL Kashi)}$$

$$= \vec{OM}^2 \left(1 - 2\,\frac{\vec{OM}.\vec{OP}}{\vec{OM}^2} + \frac{\vec{OP}^2}{\vec{OM}^2} \right)$$

avec $\|\vec{OM}\| = R$

$\|\vec{OP}\| = r$

$\dfrac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} = \vec{u}$

$$\boxed{r = R \left(1 - \frac{2\,\vec{u}\,\vec{OP}}{R} + \frac{OP^2}{R^2} \right)^{1/2}}$$

---

6) Dans l'approximation de Fraunhofer (diffraction à l'infini)

on fait r et R grands ...

plus exactement

$$\boxed{\frac{OP}{R} << 1}$$

On travaille <u>au premier ordre</u> en $\dfrac{OP}{R}$ donc

$$r = R \left(1 - \underbrace{\frac{2\,\vec{u}\,\vec{OP}}{R}}_{\text{terme du premier ordre}} + \underbrace{\cancel{\frac{OP^2}{R^2}}}_{\text{terme du deuxieme ordre}} \right)^{1/2}$$

$$\simeq R \left(1 - \frac{\vec{u}\,\vec{OP}}{R} \right)$$

$$\boxed{r = R - \vec{u}\,\vec{OP}}$$

$$\longrightarrow \exp(j k r) = \exp jk(R - \vec{u}\,\vec{OP})$$

$$= \exp jkR \quad \exp - jk\vec{u}\,\vec{OP}$$

$$= \exp jkR \quad \exp - j\vec{k}\,\vec{OP}$$

$\rightarrow \frac{1}{r}$ Ce terme est moins "sensible" que le terme de phase. On peut travailler ici à l'ordre zéro

$$= \frac{1}{R}$$

finalement :

$$\underline{\Psi}(M) = C \iint_S \underline{\Psi_0}(P) \frac{\exp jkr}{r} dS$$

$$= C \iint_S \underline{\Psi_0}(P) \frac{\exp jkR \exp -j\vec{k}\,\overrightarrow{OP}}{R} dS$$

$$\underline{\Psi}(M) = \underbrace{\frac{C \exp(jkR)}{R}}_{\text{noté } \underline{K}} \iint_S \underline{\Psi_0}(P) \exp -j\vec{k}\,\overrightarrow{OP} \, dS$$

donc

$$\boxed{\underline{K} = \frac{C \exp(jkR)}{R}}$$

$$[K] = \frac{[C]}{L} = \frac{L^{-1}}{L}$$

$$\boxed{[K] = L^{-2}}$$

---

7)

$$\underline{\Psi}(M) = \underline{K} \iint_S \underline{\Psi_0}(P) \exp -jk(\alpha x + \beta y) \, dS$$

$$= \underline{K} \iint_S \underline{\Psi_0}(P) \exp -j 2\pi \left(\frac{\alpha}{\lambda} x + \frac{\beta}{\lambda} y\right) dS$$

$$\boxed{\underline{\Psi}(u,v) = \underline{K} \iint_S \underline{\Psi_0}(x,y) \exp -j 2\pi (u x + v y) \, dx \, dy}$$

---

8) En définissant l'intensité (à une constante près) par

$$I(u,v) = |\underline{\Psi}(u,v)|^2$$

$$= \underline{\Psi}(u,v) \, \underline{\Psi}^*(u,v)$$

$$\boxed{\begin{aligned} I(u,v) = \underline{K}\,\underline{K}^* & \left[\iint_S \underline{\Psi_0}(x,y) \exp -j 2\pi(ux+vy) \, dx \, dy\right] \\ & \times \left[\iint_S \underline{\Psi_0}(x,y) \exp -j 2\pi(ux+vy) \, dx \, dy\right]^* \end{aligned}}$$

---

9) En incidence normale : $\underline{\Psi_0}(x,y) = \underline{\Psi_0}$ (uniforme) donc

$$\underline{\Psi}(u,v) = \underline{K}\,\underline{\Psi_0} \int_{-a/2}^{a/2} \exp -j2\pi ux \, dx \int_{-b/2}^{b/2} \exp -j2\pi vy \, dy$$

$$\boxed{\underline{\Psi}(u,v) = \underline{K}\,\underline{\Psi_0}\; a\, b \;\operatorname{sinc}(\pi u a)\;\operatorname{sinc}(\pi v b)}$$

ce qui correspond à la formule proposée :

$$\underline{\varsigma_0} = \underline{K}\,\underline{\Psi_0}\, a\, b$$
$$U = \pi u a$$
$$V = \pi v b$$

$$\boxed{\underline{\Psi}(u,v) = \underline{\varsigma_0}\;\operatorname{sinc}(U)\;\operatorname{sinc} V}$$

---

10) $$\boxed{I(u,v) = |\underline{\varsigma_0}|^2 \;\operatorname{sinc}^2(U)\;\operatorname{sinc}^2(V)}$$

---

11) $$\underline{\Psi}'(u,v) = \underline{K}\,\underline{\Psi_0}\left[\int_{-a/2}^{-a/4} \exp -j2\pi ux\, dx + \int_{a/4}^{a/2} \exp -j2\pi ux\, dx - \int_{-a/4}^{a/4} \exp -j2\pi ux\, dx\right] \times b\,\operatorname{sinc}(\pi v b)$$

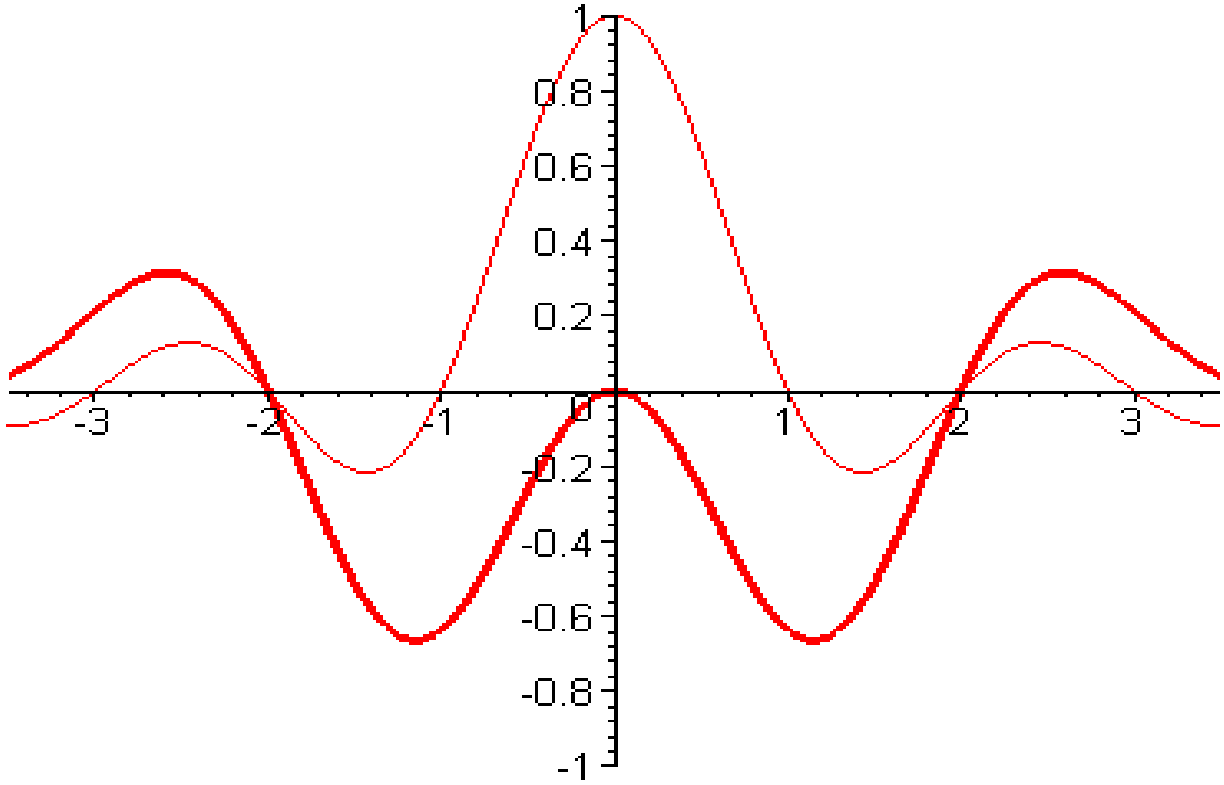
$$= \underline{K}\,\underline{\Psi_0}\left[\int_{-a/2}^{a/2} \exp -2j\pi ux\, dx - 2\int_{-a/4}^{a/4} \exp -j2\pi ux\, dx\right] \times b\,\operatorname{sinc}(\pi v b)$$

$$= \underline{K}\,\underline{\Psi_0}\left[a\,\operatorname{sinc}(\pi u a) - 2\,\frac{a}{2}\,\operatorname{sinc}(\pi u \frac{a}{2})\right] \times b\,\operatorname{sinc}(\pi v b)$$

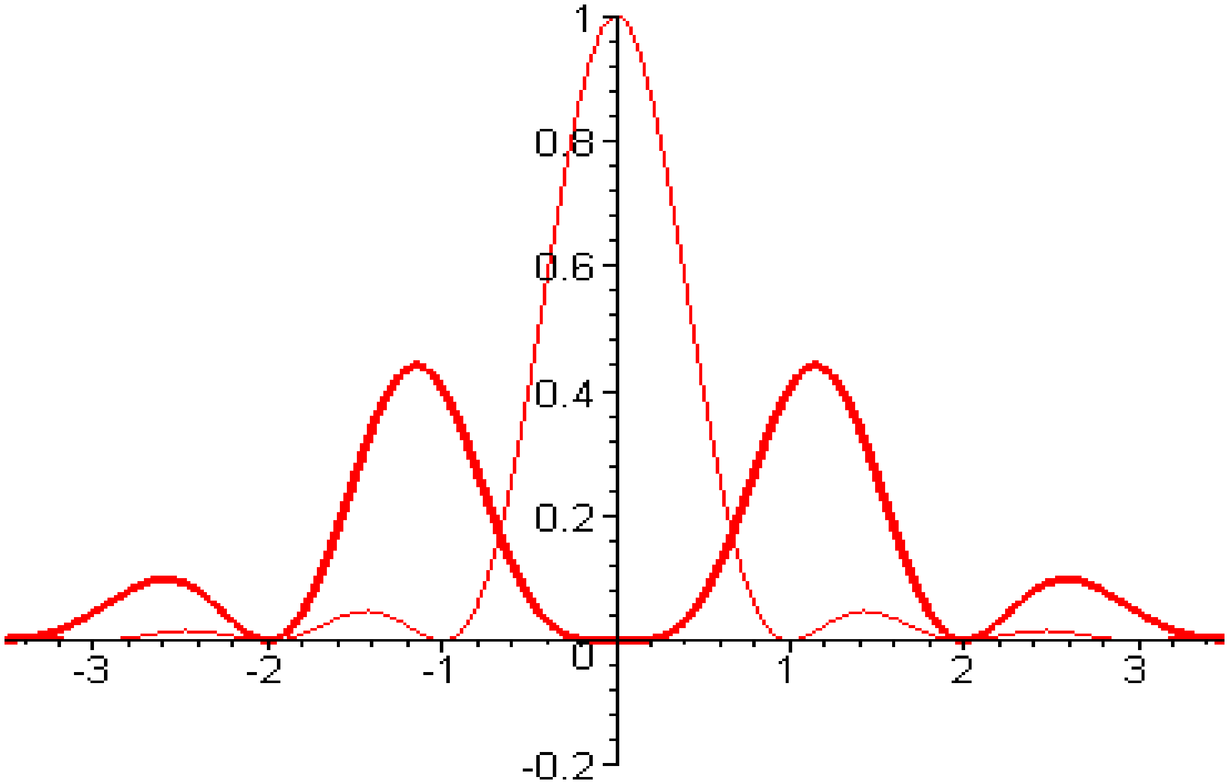
$$\boxed{\underline{\Psi}'(u,v) = \underline{\varsigma_0}\left(\operatorname{sinc} U - \operatorname{sinc}\frac{U}{2}\right)\operatorname{sinc} V}$$

$$\boxed{I'(u,v) = |\underline{\varsigma_0}|^2\left(\operatorname{sinc} U - \operatorname{sinc}\frac{U}{2}\right)^2\operatorname{sinc}^2 V}$$

Tracés de $sinC(U)$ et de $sinC(U)-sinC(U/2)$ (en abscisse, on a U/π)



Tracés de $sinC^2(U)$ et de $[sinC(U)-sinC(U/2)]^2$ (en abscisse, on a U/π)



12) On avait :

$$\underline{\Psi}(u,v) = \underline{K}\Psi_0 \int_{-a/2}^{a/2} \exp -j2\pi u x \, dx \int_{-b/2}^{b/2} \exp -j2\pi v y \, dy$$

On a maintenant :

$$\underline{\Psi}_0(u,v) = \underline{K}\Psi_0 \int_{x_0-\frac{a}{2}}^{x_0+a/2} \exp -j2\pi u x \, dx \int_{y_0-\frac{b}{2}}^{y_0+\frac{b}{2}} \exp -j2\pi v y \, dy$$

$$= \underline{K}\Psi_0 \; a\, b \; \exp(-j2\pi u x_0) \; \exp(-j2\pi v y_0) \; \operatorname{sinc}(\pi u a) \; \sin(\pi v$$

$$\boxed{\underline{\Psi}_0(u,v) = \exp -j\, 2\pi(u x_0 + v y_0) \quad \underline{\Psi}(u,v)}$$

La différence tient seulement à un <u>terme de phase</u> (correspondant au <u>déphasage</u> du <u>rayon milieu</u> de la fente par rapport au <u>rayon de référence</u> passant par O et arrivant en M)

---

13) $\boxed{I_0(u,v) = I(u,v)}$

Pas de différence.

---

14)

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\Psi}_1(u,v) &= \exp(-j\,2\pi v d) \quad \underline{\Psi}(u,v) \\ \underline{\Psi}_2(u,v) &= \exp(+j\,2\pi v d) \quad \underline{\Psi}(u,v) \end{aligned}}$$

---

15)

$$\underline{\Psi}''(u,v) = \underline{\Psi}_1(u,v) + \underline{\Psi}_2(u,v)$$

$$= 2\cos 2\pi v d \quad \underline{\Psi}(u,v)$$

$$= 2\,\underline{S}_0 \quad \operatorname{sinc} U \quad \operatorname{sinc} V \quad \cos 2\pi v d$$

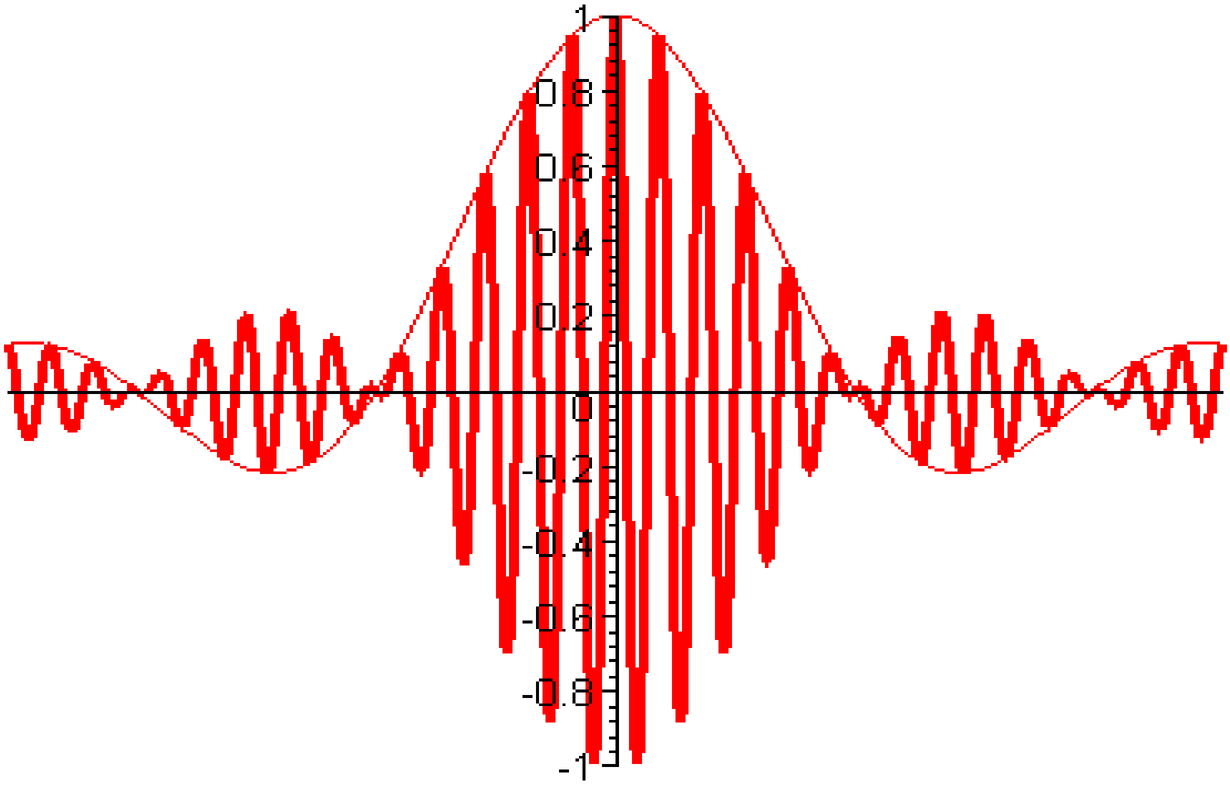
$$\boxed{\underline{\Psi}''(u,v) = 2\,\underline{S}_0 \quad \operatorname{sinc}(\pi u a) \quad \operatorname{sinc}(\pi v b) \quad \cos(2\pi v d)}$$

$$\boxed{I''(u,v) = \underbrace{4|\underline{S}_0|^2}_{I''_0} \quad \underbrace{\operatorname{sinc}^2(\pi u a)}_{f(u)} \quad \underbrace{\operatorname{sinc}^2(\pi v b) \quad \cos^2(2\pi v d)}_{g(v)}}$$

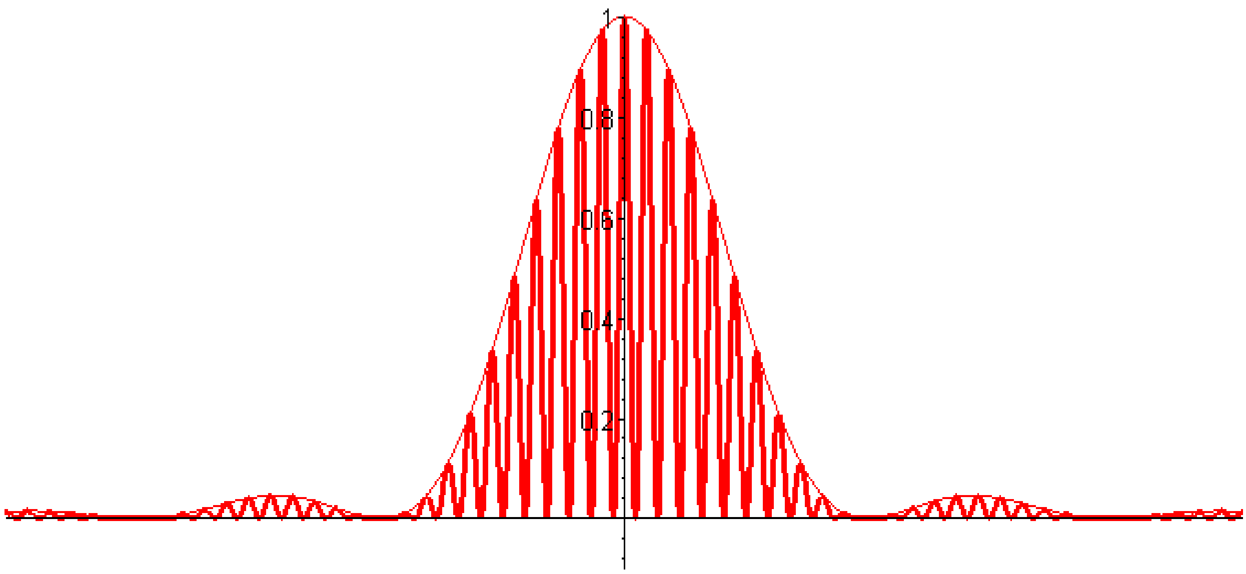
remarque : au lieu de $\cos^2(2\pi v d)$, on peut aussi écrire

$$\frac{1+\cos(4\pi v d)}{2}$$

Tracés de $sinC(\pi\nu b)$ et de $sinC(\pi\nu b)*cos(2\pi\nu b)$



Tracés de $sinC^2(\pi\nu b)$ et de $sinC^2(\pi\nu b)*cos^2(2\pi\nu b)$



16) Pour trouver la largeur d'une fente :

on remarque que $\mathrm{sinc}^2(\pi \nu b)$ s'annule pour la première fois pour $\boxed{\nu = \frac{1}{b}}$ (ou $\beta = \frac{\lambda}{b}$ ou $\boxed{Y \simeq \frac{\lambda f}{b}}$)

La largeur de la tache centrale est $\Delta \nu = \frac{2}{b}$.

Pour trouver la distance entre les deux fentes

on cherche la période de $\cos^2(2\pi \nu d)$

$$2\pi \Delta\nu d = \pi$$

soit $\boxed{\Delta \nu = \frac{1}{(2d)}}$ (ou $\Delta\beta = \frac{\lambda}{(2d)}$ ou $\boxed{\Delta Y = i \simeq \frac{\lambda f}{(2d)}}$)

(La distance entre les deux fentes est notée ici $(2d)$)