# DNS

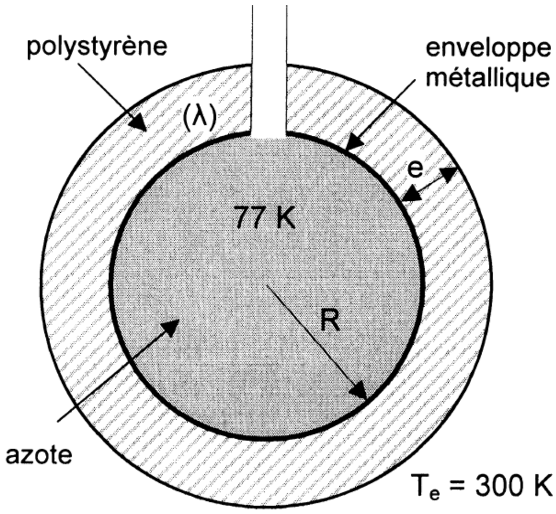
## Sujet



# Problème I : Cryostat

Les parois métalliques seront assimilées à des corps noirs.

La constante de Stefan-Boltzmann est $\sigma = 5,67.10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}$ .




Un récipient contenant de l'azote liquide a une forme de ballon sphérique, de rayon $R = 10\,cm$ , entouré d'une couche de polystyrène d'épaisseur $e = 5\,cm$ et de conductivité thermique $\lambda = 0,035\,W.m^{-1}.K^{-1}$ . La température de l'azote est $T_a = 77\,K$ et la température extérieure vaut $T_e = 300\text{K}$ . On suppose le contact thermique parfait en $r = R + e$ .

Le récipient est ouvert sur l'extérieur par l'intermédiaire d'un tube de décompression très étroit. La chaleur latente massique de vaporisation de l'azote à 77 K est $L_v = 0,20.10^6 J.kg^{-1}$ .La masse volumique de l'azote liquide est $\rho = 808\,kg.m^{-3}$ .

Le problème est supposé à symétrie sphérique ( malgré le tube de décompression ) et l'on se place en régime stationnaire.

Le laplacien scalaire d'une fonction $f(r)$ en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{d^2(r\,f(r))}{d\,r^2} \quad .$$

# I. Préliminaires

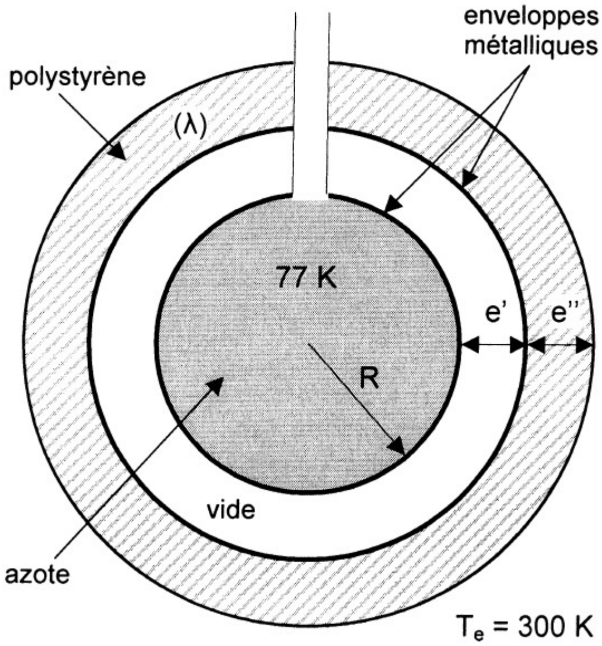
La loi de Fourier traduisant la transmission de la chaleur par conduction dans un mi-lieu continu, homogène et isotrope au point $M(r)$ à l'instant $t$ s'exprime de la façon suivante : $\vec{j}(\vec{r},t) = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,T(\vec{r},t)$ .

1. Que représente le vecteur $\vec{j}$ ? En quelle unité s'exprime son intensité ?
2. Dans un milieu de masse volumique $\rho$ , de capacité calorifique massique $c$ et de conductivité thermique $\lambda$ , l'équation de la chaleur s'écrit : $\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\Delta T$ . Quelle est l'unité de $D$ et quelle est la nature de cette grandeur ?
3. Calculer la masse d'azote contenue dans le récipient.

# II. Modèle continu

4. Déterminer la répartition de température $T(r)$ en régime permanent dans l'enveloppe de polystyrène. Expression littérale et application numérique.
5. Exprimer le flux thermique $\Phi$ . Dans quel sens ce flux est-il dirigé ?
6. Exprimer la masse $\mathring{M}$ d'azote qui s'évapore par unité de temps en fonction de $\lambda$ , $R$ , $e$ , $T_e$ , $T_a$ et $L_v$ .
7. Calculer $\Phi$ et $\mathring{M}$ . Exprimer $\mathring{M}$ en $kg.h^{-1}$ .

# III. Étude du cryostat



Pour améliorer les performances, le récipient est modifié. L'enceinte de rayon $R$ contenant l'azote liquide est maintenant séparée d'une autre enceinte métallique, de rayon $R+e'$, par un espace vide de toute matière et d'épaisseur $e'=1\,cm$. La température de l'enveloppe intermédiaire en $r=R+e'$ est notée $T_i$. Les échanges, entre les deux enveloppes métalliques se font donc uniquement par rayonnement.

Cette deuxième enceinte est entourée par une épaisseur $e''=4\,cm$ de polystyrène. Les échanges à la surface extérieure de la couche isolante (interface air-polystyrène) sont maintenant supposés conducto-convectifs de coefficient $h=10\,W.m^{-2}.K^{-1}$. La température de cette surface extérieure est notée $T_s$.

8. Préciser les expressions des flux rayonnés entre les deux enveloppes.
9. Donner diverses expressions pour $\Phi$. Vérifier que le nombre d'équations écrites est égal au nombre d'inconnues.
10. Donner l'expression de la température $T_i$ en fonction de $T_s$ et des données $T_e$, $h$, $R$, $e'$, $e''$, $\lambda$.
11. Quelle équation détermine la température $T_s$ ?
12. Déterminer, en utilisant la calculatrice, la valeur numérique de $T_s$ puis celle de $T_i$.
13. Calculer $\Phi$ et $\mathring{M}$ masse d'azote qui s'évapore par unité de temps .

# Problème II : Régime instationnaire

On considère un cylindre de longueur $L$ compris entre $x=0$ et $x=L$, de diffusivité égale à $D$. Il n'y a pas de sources d'énergie dans le cylindre. Le cylindre est thermiquement isolé sur sa paroi latérale. Au niveau des sections terminales, la température est maintenue à $T_a$. Le problème est supposé unidimensionnel selon $x$ de sorte que $T=T(x,t)$.

On connait la répartition de température initiale dans le cylindre $T_0(x)=T(x,t=0)$.

1. Application: quelle sera, dans le cas particulier étudié ici, la répartition finale ( en régime stationnaire ) de température dans le cylindre $T_\infty(x)=T(x,t=\infty)$ ?
2. On pose dans la suite $\theta(x,t)=T(x,t)-T_\infty(x)$ qui désigne l'écart de température par rapport à l'équilibre. Quelle est l'équation différentielle aux dérivées partielles vérifiée, dans le cas général, par $\theta(x,t)$ ?
3. On décide de rechercher si une solution à variable séparée est possible pour ce problème. On cherche donc une solution de la forme $\theta(x,t)=f(x)g(t)$. En reportant dans l'équation différentielle, montrer que les variables se séparent effectivement et que l'on obtient $G(t)=F(x)$ avec $G(t)=\dfrac{g'(t)}{g(t)}$. Préciser $F(x)$.
4. Justifier alors que $G(t)=constante$ et $F(x)=constante$. Préciser la dimension de cette constante.

5. Étudier alors la solution de $G(t)=constante$ selon le signe de la constante. En déduire que cette constante ne peut pas être positive. A quelle solution la constante nulle correspond-elle? Dans la suite, on désigne provisoirement cette constante inconnue par $constante=-\frac{1}{\tau}$ .

6. Déterminer $f(x)$ dans ce cas en utilisant deux constantes arbitraires supplémentaires.

7. Application: porter les conditions aux limites ( C.L. ) pour le cas particulier étudié ici et déduire qu'il existe une infinité de solutions ou modes. Écrire $\theta(x,t)$ sous la forme d'une somme de tous les modes possibles.

Pour simplifier, on choisit en plus ici un état initial simple ( C.I. ) pour la tige: on suppose donc $T_0(x)=T_a+(T_{MAX}-T_a)\ \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ .

8. En déduire pour le cas étudié l'expression de $T=T(x,t)$ .

9. Tracer $T(x,t)$ en fonction de $x$ pour différentes valeurs de $t$ .

10. Application numérique:

$L=0{,}100\,m$

$T_a=0\,°C$

$T_{MAX}=50\,°C$

$\lambda=376\,W.m^{-1.}K^{-1}$

$c=420\,J.kg^{-1}.K^{-1}$

$\rho=8{,}9.10^3\,kg.m^{-3}$

- Calculer la valeur numérique du temps caractéristique.
- A quel instant la température au milieu de la tige est-elle égale à $\frac{T_{MAX}}{2}$ ?
- A quel instant la température au milieu de la tige est-elle égale à $\frac{T_{MAX}}{10}$ ?

Réponses :

Cryostat

1) $\vec{j}$ densité volumique de courant thermique de conduction

$$\boxed{\vec{j} \text{ en } W.m^{-2}}$$

---

2) $$\frac{\partial T}{\partial t} = D \, \Delta T$$

D diffusivité ou coefficient de diffusion thermique

dont la dimension est telle que

$$\frac{\Theta}{T} = [D] \frac{\Theta}{L^2}$$

$$[D] = L^2 \, T^{-1}$$

$$\boxed{D \text{ en } m^2.s^{-1}}$$

Plus la diffusivité est grande, plus le front de chaleur se déplace rapidement dans le matériau étudié

remarque : expression de D

on retrouve rapidement l'équation pour $T = T(x,t)$

$$-\frac{\partial j}{\partial x} dx \, S \, dt = \rho \, S \, dx \; c \, \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho \, c \, \frac{\partial T}{\partial t}$$

donc $$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\boxed{D = \frac{\lambda}{\rho c}}$$

---

3) $$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

$$= \frac{4}{3} \pi (0,1)^3 \; 808$$

$$\boxed{M = 3,38 \text{ kg}}$$

---

4) En régime stationnaire :

$$\Delta T(r) = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2(rT(r))}{dr^2}=0$$

$$\frac{d}{dr}(rT(r))=A$$

$$rT(r)=Ar+B$$

$$\boxed{T(r)=A+\frac{B}{r}}$$

C.L.

$$T_a=A+\frac{B}{R}$$

$$T_e=A+\frac{B}{R+e}$$

donc

$$B=-(T_e-T_a)\frac{R}{e}(R+e)$$

$$A=(T_e-T_a)\frac{R}{e}+T_e$$

$$\boxed{T(r)=T_e-(T_e-T_a)\frac{R}{e}\left(\frac{R+e}{r}-1\right)}$$

A.N.

$$T(r)=300-(300-77)\frac{0{,}10}{0{,}05}\left(\frac{0{,}1+0{,}05}{r}-1\right)$$

$$\boxed{T(r)=746-\frac{66{,}9}{r}}$$

---

5)

$$\vec{j}=-\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T$$

$$=-\lambda\frac{dT}{dr}\overrightarrow{u_r}$$

$$=-\lambda\frac{R}{e}\frac{R+e}{r^2}(T_e-T_a)\overrightarrow{u_r}$$

$$\Phi=\underset{\substack{\text{sphère de}\\ \text{rayon } R<r<R+e}}{\oiint}\vec{j}\,\overrightarrow{dS}$$

(il s'agit du flux sortant donc dirigé conventionnellement vers l'extérieur)

$$\Phi=j_{(r)}4\pi r^2$$

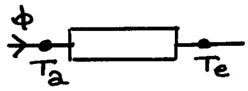
$$\boxed{\Phi=-\lambda\frac{4\pi R(R+e)}{e}(T_e-T_a)}$$

Ce flux est négatif ($T_e>T_a$)

Ce flux est dirigé effectivement vers l'intérieur c'est à dire des températures plus élevées vers les températures plus basses.

Remarque :

on a retrouvé




$$\Delta T = R_{therm}\ \phi$$

$$(T_a - T_e) = \frac{1}{\lambda}\frac{(R_2-R_1)}{4\pi R_1 R_2}\ \phi$$

$$= \frac{1}{\lambda}\frac{e}{4\pi R(R+e)}\ \phi$$

---

6) on a $(-\phi) = \dot{M}\ L_v$

avec :

$(-\phi)$ désigne la puissance reçue par l'azote liquide.

$$\boxed{\dot{M} = \frac{\lambda\ 4\pi R\ (R+e)\ (T_e - T_a)}{e\ L_v}}$$

---

7) Applications numériques

$$\phi = -\lambda\ \frac{4\pi\ R\ (R+e)}{e}\ (T_e - T_a)$$

$$= -\frac{0{,}035\ 4\pi\ 0{,}1\ (0{,}15)}{0{,}05}\ (300-77)$$

$$\boxed{\phi = -29{,}4\ \mathrm{W}}$$

$$\dot{M} = \frac{-\phi}{L_v}$$

$$= \frac{29{,}4}{0{,}2\ 10^6}$$

$$\dot{M} = 0{,}147\ 10^{-3}\ \mathrm{kg\ s^{-1}}$$

$$\boxed{\dot{M} = 0{,}53\ \mathrm{kg\ h^{-1}}}$$

(A ce rythme, l'azote s'évapore complètement en 6,4 h)

---

8) on a remplacé les 5 cm de polystyrène (conduction) par 1 cm de vide (rayonnement) et 4 cm de polystyrène. (conduction).
on tient, ici, compte des échanges conducto-convectifs à la surface extérieure

Entre les deux enveloppes :

$$\phi_{\substack{\text{émis par}\\ \text{enceinte } R}} = \sigma T_2^4 \, 4\pi R^2 \qquad \text{(totalement absorbé par l'enceinte } R+e'\text{)}$$

$$\phi_{\substack{\text{émis par}\\ \text{enceinte } R+e'}} = \sigma T_i^4 \, 4\pi (R+e')^2 \qquad \text{(totalement absorbé par l'enceinte } R\text{)}$$

flux radiatif compté positif de R vers R+e' ($\phi<0$)

$$\phi_R = \phi = \sigma T_2^4 \, 4\pi R^2 - \sigma T_i^4 \, 4\pi (R+e')^2$$

$$(1) \qquad \boxed{\phi = 4\pi\sigma \left( R^2 T_2^4 - (R+e')^2 T_i^4 \right)}$$

---

9) Ce flux (sens conventionnel vers l'extérieur) traverse ensuite le polystyrène. En vertu des résultats précédents :

$$(2) \qquad \boxed{\phi = -\lambda \frac{4\pi (R+e')(R+e'+e'')}{e''} (T_s - T_i)}$$

puis arrive dans le milieu extérieur par échanges conducto-convectifs.

$$\varphi_{\text{polystyrène} \to \text{air}} = h\,(T_s - T_e)$$

$$(3) \qquad \boxed{\phi = -4\pi (R+e'+e'')^2 \, h \, (T_e - T_s)}$$

On obtient trois équations avec trois inconnues : $\phi$, $T_i$, $T_s$.

---

10) (2) et (3) donnent $T_i$ en fonction de $T_s$

$$\boxed{T_i = T_s - \frac{h}{\lambda} \, e'' \, \frac{R+e'+e''}{R+e'} (T_e - T_s)}$$

---

11) Pour trouver l'équation en $T_s$, on fait (3) = (1) en remplaçant $T_i$ par son expression en fonction de $T_s$.

$$\cancel{-4\pi}(R+e'+e'')^2\, h\,(T_e-T_s) = \cancel{-4\pi}\,\sigma\left((R+e')^2\,T_i^4 - R^2\,T_a^4\right)$$

d'où :

$$T_i^4 = \frac{h}{\sigma}\left(\frac{R+e'+e''}{R+e'}\right)^2 (T_e-T_s) + \left(\frac{R}{R+e'}\right)^2 T_a^4$$

$$\boxed{\left[T_s - \frac{h}{\lambda}\,e''\left(\frac{R+e'+e''}{R+e'}\right)(T_e-T_s)\right]^4 = \frac{h}{\sigma}\left(\frac{R+e'+e''}{R+e'}\right)^2 (T_e-T_s) + \left(\frac{R}{R+e'}\right)^2 T_a^4}$$

---

12) application numérique :

→ $T_s$ vérifie donc :

$$\left[T_s - \frac{10}{0{,}035}\,0{,}04\,\frac{15}{11}\,(300-T_s)\right]^4 = \frac{10}{5{,}67\,10^{-8}}\left(\frac{15}{11}\right)^2(300-T_s) + \left(\frac{10}{11}\right)^2 77^4$$

On pose
$a = 15{,}5844$
$b = 3{,}27955\ 10^8$
$c = 2{,}90521\ 10^7$

On résout avec le solveur de la calculatrice :

$$\left[T_s - a\,(300-T_s)\right]^4 = b\,(300-T_s) + c$$

J'obtiens deux solutions : 294,427 et 261,715 .

→ $T_i$ vérifie alors : (cf équation 10) )

$$T_i = T_s - \frac{10}{0{,}035}\,0{,}04\,\frac{15}{11}\,(300-T_s)$$
$$= T_s - a\,(300-T_s)$$

| $T_s$ | $T_i$ | |
|---|---|---|
| 294,427 | 207,579 | |
| 261,715 | -334,936 | impossible $T_i < 0$ |

finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l} T_s = 294{,}4\ \text{K} \\ T_i = 207{,}6\ \text{K} \end{array}}$$

---

13) Par exemple, en utilisant (3) pour déterminer $\phi$

$$\phi = -4\pi\,(R+e'+e'')^2\,h\,(T_e - T_S)$$

$$= -4\pi\,(\quad 0{,}15 \quad)^2\;10\,(300-294{,}4)$$

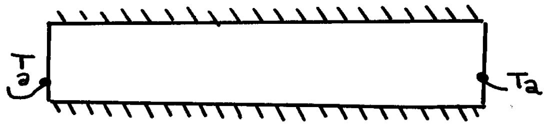
$$\boxed{\phi = -15{,}8\ \text{W}} \qquad (15{,}8 < 29{,}4\ \text{W})$$

$$\dot{M} = \frac{-\phi}{L_V}$$

$$\boxed{\dot{M} = 0{,}28\ \text{kg}\ h^{-1}}$$

(A ce rythme, l'azote s'évapore complètement en 11,9 h)

Régime instationnaire




1) En régime stationnaire dans le cas particulier étudié :

$$\boxed{T_\infty(x) = T_a}$$

---

2) On a :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 0$$

et en régime stationnaire (puisque $T_\infty$ ne dépend pas du temps)

$$\frac{d^2 T_\infty(x)}{dx^2} = 0$$

En faisant la différence :

$$\frac{\partial^2 (T(x,t) - T_\infty(x))}{\partial x^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = 0$$

ou encore (puisque $T_\infty(x)$ ne dépend pas de $t$)

$$\frac{\partial^2 (T(x,t) - T_\infty(x))}{\partial x^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}(T(x,t) - T_\infty(x)) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = 0}$$

---

3) On cherche $\theta(x,t) = f(x)\, g(t)$. On reporte dans l'équation différentielle.

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} g(t) - \frac{1}{D} f(x) \frac{dg(t)}{dt} = 0$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{D \frac{d^2 f(x)}{dx^2}}{f(x)}}_{F(x)} = \underbrace{\frac{\frac{dg(t)}{dt}}{g(t)}}_{G(t)}}$$

---

4) Si la solution à variable séparée convient, on doit avoir

$$F(x) = G(t) \quad \forall x, t$$

Par exemple pour $t = t_1$, la relation doit être vérifiée $\forall x$

$$F(x) = G(t_1) \quad \forall x$$
$$F(x) = \text{constante}$$

De même pour $x = x_1$, la relation doit être vérifiée $\forall t$

$$F(x_1) = G(t) \quad \forall x$$
$$\text{constante} = G(t)$$

Finalement :

$$\boxed{F(x) = G(t) = \text{constante}}$$

$$\text{avec} \quad G(t) = \frac{g'(t)}{g(t)}$$
$$[G(t)] = T^{-1}$$

$$\boxed{\text{La constante est un } [\text{temps}]^{-1}}$$

---

5) → Si la constante est <u>positive</u> (Ex : $\alpha > 0$)

$$\frac{\frac{dg}{dt}(t)}{g(t)} = \alpha$$

$$\frac{dg}{dt}(t) - \alpha\, g(t) = 0$$

$$g(t) = K\, e^{\alpha t}$$

Si $t \to \infty$, $g(t) \to \infty$ Les températures tendent vers l'infini avec $t$ ... Cela n'a pas de sens physique.

→ Si la constante est <u>nulle</u>

$$g(t) = K$$

La température ne dépend pas du temps.
On est en régime stationnaire. On a déjà tenu compte de cette solution.

→ On pose constante $= -\frac{1}{\tau}$

$$\frac{dg(t)}{dt} - \frac{1}{\tau}\, g(t) = 0$$

$$\boxed{g(t) = K\, e^{-t/\tau}}$$

6)

$$\frac{D\,\frac{d^2f(x)}{dx^2}}{f(x)} = -\frac{1}{\tau}$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{1}{\tau D} f(x) = 0$$

$$\boxed{f(x) = A\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\tau D}}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\tau D}}x\right)}$$

7) On fait $KA \to A$ et $KB \to B$

$$\boxed{\theta(x,t) = e^{-t/\tau}\left(A\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\tau D}}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\tau D}}x\right)\right)}$$

(inconnues : $\tau$, $A$, $B$)

Conditions aux limites

- en $x=0$ $\quad \theta(x=0,t) = 0 \quad \forall t$

$$0 = e^{-t/\tau}\,(A) \quad \text{donc} \quad A = 0$$

- en $x=L$ $\quad \theta(x=L,t) = 0 \quad \forall t$

$$0 = e^{-t/\tau}\left(B\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\tau D}}L\right)\right)$$

si on choisit $B=0$, la solution étudiée est à "jeter".
On choisit :

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\tau D}}L\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\tau D}}L = m\pi}$$

avec $m \in \mathbb{R}^*$

Pour la solution $m$ (mode $m$)

$$\tau_m = \frac{L^2}{\pi^2 D}\,\frac{1}{m^2}$$

$$\theta_m(x,t) = e^{-t/\tau_m} \; B_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$\boxed{\theta_m(x,t) = B_m \exp\left(-m^2\frac{\pi^2 D}{L^2}t\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}$$

La solution est finalement :

$$\boxed{\theta(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \exp\left(-m^2\frac{\pi^2 D}{L^2}t\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}$$

(inconnues : les $B_m$ )

---

8) Conditions initiales : on donne

$$\theta_0(x) = (T_{MAX} - T_a) \sin\frac{\pi x}{L}$$

On voit ( ici, c'est immédiat) que seul $B_1$ est non nul avec $B_1 = (T_{MAX} - T_a)$

Finalement:

$$\theta(x,t) = (T_{MAX} - T_a) \exp\left(-\frac{\pi^2 D}{L^2}t\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\boxed{T(x,t) = T_a + (T_{MAX} - T_a) \exp\left(-\frac{\pi^2 D}{L^2}t\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}$$

---

9) et 10)

$$D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

$$= \frac{376}{8{,}9\ 10^3 . 420}$$

$$\boxed{D = 0{,}10\ 10^{-3}\ m^2 s^{-1}}$$

$$\tau = \frac{L^2}{\pi^2 D}$$

$$= \frac{0{,}1^2}{\pi^2\ 0{,}1\ 10^{-3}}$$

$$\boxed{\tau = 10\ s}$$

$$T\left(\frac{L}{2},t_1\right) = \frac{T_{MAX}}{2}$$

$$\left(\frac{T_{MAX}}{2} - T_a\right) = (T_{MAX} - T_a) \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right)$$

$$t_1 = \tau \ln \frac{T_{MAX} - T_a}{\frac{T_{MAX}}{2} - T_a}$$

$$t_1 = \tau \ln \frac{50}{25}$$
$$= 0{,}693\,\tau$$
$$\boxed{t_1 = 7\,s}$$

$$T\left(\frac{L}{2}, t_2\right) = \frac{T_{MAX}}{10}$$
$$t_2 = \tau \ln \frac{T_{MAX} - T_2}{\frac{T_{MAX}}{10} - T_2}$$
$$= \tau \ln \frac{50}{5}$$
$$= 2{,}30\,\tau$$
$$\boxed{t_2 = 23\,s}$$