DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: non autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Afin de faciliter le travail du correcteur:

- On indiquera la numérotation des questions
- On passera une ligne entre chaque question
- On $\boxed{\textit{encadrera}}$ les réponses au rouge

Les copies mal écrites, mal présentées, mal rédigées, sont corrigées aux risques et périls de l'étudiant.

On justifiera toutes les réponses, même celles jugées « évidentes », avec précision.

En l'absence de calculatrice, pour les applications numériques:

- Si le calcul est lourd, on évaluera de manière même très approchée le premier chiffre significatif mais l'ordre de grandeur doit être correct ainsi que l'unité.
- Si le calcul est plus simple, on se contentera de 1 ou 2 chiffres significatifs.

Rappels mathématiques:

valeur moyenne dans le temps d'une fonction périodique $f(t)$ notée $<f(t)>$:

$$<\cos^2(\omega t)> = \frac{1}{2}$$
$$<\sin^2(\omega t)> = \frac{1}{2}$$
$$<\sin(\omega t)\times\cos(\omega t)> = 0$$

---

trigonométrie:

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

Optique non linéaire

On se propose dans le problème d'analyser les origines de comportements non linéaires de la matière éclairée par une lumière puissante et d'en décrire l'application à la réalisation de systèmes bistables qui peuvent constituer les éléments essentiels de mémoires optiques.

Dans tout le problème, on néglige le poids des particules devant les autres forces auxquelles elles sont soumises. Tous les mouvements sont étudiés dans un référentiel galiléen.

La partie III peut être traitée sans avoir résolu les parties I et II.

Données numériques:

- Constante de Planck $h=6{,}63\times 10^{-34}\,J.s$
- Permittivité du vide $\varepsilon_0=8{,}85\times 10^{-12}\,F.m^{-1}$
- Vitesse de la lumière dans le vide $c=3{,}00\times 10^{8}\,m.s^{-1}$
- Charge du proton $e=1{,}60\times 10^{-19}\,C$
- Masse de l'électron $m=9{,}11\times 10^{-31}\,kg$

I. Origine de l'indice de réfraction d'un matériau

A. Modèle d'atome hors équilibre

Pour interpréter les interactions de la lumière avec les atomes dans la matière, on adopte le modèle de l'électron élastiquement lié qui permet de dégager les principales propriétés nécessaires à la suite de l'étude. Dans le cadre de ce modèle, on considère le mouvement sur un axe Ox d'origine O d'un seul électron atomique, assimilé à un point matériel P de charge $-e$, de masse m, d'abscisse x. En absence de champ électrique, et lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre, ce point est soumis à l'unique force de rappel: $\vec{F}=-m\omega_0^2 x\ \vec{u}_x$ ($\vec{u}_x$ désigne un vecteur unitaire de l'axe Ox et ω_0 est une pulsation).

On néglige ici les effets dus au rayonnement (voir suite).

1. Préciser l'unité de ω_0.

2. Établir l'équation différentielle du mouvement de P.

A l'instant $t=0$, le point P est écarté de sa position d'équilibre d'une quantité x_0 et abandonné sans vitesse initiale.

3. Déterminer l'expression de l'abscisse x de P en fonction du temps en tenant compte des deux conditions initiales.

4. Retrouver l'expression donnant l'énergie potentielle E_{pot} du point P à l'abscisse x. La constante arbitraire est choisie de telle façon que $E_{pot}=0$ pour $x=0$.

5. Exprimer l'énergie totale du point P en fonction uniquement de m, x_0 et ω_0.

B. Freinage dû au rayonnement

On admettra qu'une charge ponctuelle q animée d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation ω, d'amplitude x_m, émet de la lumière de pulsation ω. On peut alors démontrer que la puissance perdue à cause de ce rayonnement est: $P_R = \dfrac{q^2\omega^4 x_m^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

À l'instant $t=0$, le point P est à nouveau écarté de sa position d'équilibre d'une quantité x_0 et abandonné sans vitesse initiale.

6. Quelle est l'énergie W_0 de l'oscillateur à $t=0$?
7. Comment évolue l'énergie de l'oscillateur au cours du temps ? Décrire qualitativement le mouvement. Justifier les réponses.
8. On pourra considérer qu'à chaque instant, l'oscillateur est assimilable à un oscillateur quasi sinusoïdal de pulsation ω_0 et que l'expression de l'énergie W établie à la *question* 5 est encore utilisable.
   - Écrire la relation entre P_R et $\dfrac{dW}{dt}$.
   - Démontrer que l'énergie W du point P est de la forme: $W = W_0 \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$. On exprimera τ en fonction de e, m, c, ω_0 et ε_0.
9. Calculer τ dans le cas d'un oscillateur émettant une lumière de longueur d'onde $500\,nm$. Calculer aussi la période propre T_0 de l'oscillateur. Commenter éventuellement.
10. On souhaite démontrer que ce rayonnement peut être pris en compte en ajoutant à la force de rappel une force de freinage dont l'expression est: $\vec{F}_R = -\,m\gamma\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse du point P et γ une grandeur positive.
    - Préciser la dimension et l'unité de γ ?
    - Écrire la nouvelle équation différentielle du mouvement.
11. En respectant les notations du problème, établir l'expression de $x(t)$ pour l'oscillateur quasi sinusoïdal en tenant compte des deux conditions initiales. On écrira finalement $x(t)$ sous la forme $A(t)\cos(\Omega t+\varphi)$. On donnera l'expression de la pseudopulsation Ω. En ce qui concerne la phase à l'origine φ, on donnera les expressions de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\tan\varphi$ en fonction du rapport $\dfrac{\gamma}{\Omega}$.
12. On supposera dans toute la suite que $\omega_0 \gg \gamma$.
    - Montrer que l'abscisse $x(t)$ est approximativement donnée par $x(t) = x_0 \exp\left(-\dfrac{\gamma t}{2}\right)\cos(\omega_0 t)$.

- Représenter l'allure de $x(t)$.
- Exprimer dans ce cas l'énergie totale de l'oscillateur en fonction du temps.

13.Comment doit-on choisir γ pour que ce résultat coïncide avec celui de la *question* 8 obtenu par un bilan énergétique ? Interpréter physiquement l'approximation $\omega_0 \gg \gamma$.

C. Action d'une onde sinusoïdale sur un matériau

On suppose maintenant que le point P est soumis à la force de rappel et à la force de freinage introduites précédemment. Dans la région de l'espace où se déplace P , il existe un champ électrique sinusoïdal parallèle à l'axe Ox dont l'expression est: $\vec{E}=E\vec{u}_x=E_0\cos(\omega t)\vec{u}_x$. On ne tient pas compte de la force due au champ magnétique de l'onde.

14.Écrire l'équation différentielle qui régit le déplacement $x(t)$ en fonction de γ , ω_0 , $\frac{e}{m}$, E .

15.On cherche la solution en régime sinusoïdal forcé. Pour cela on travaille avec les grandeurs complexes associées.

- Exprimer $\underline{x}(t)$ sous la forme $j\frac{e}{m}\underline{E}\times\frac{1}{\underline{z}(\omega)}$ où $\underline{z}(\omega)$ désigne un nombre complexe et $j=\sqrt{-1}$.
- Donner l'expression de l'amplitude $A(\omega)$ de $x(t)$.
- Écrire la solution $x(t)$ en faisant intervenir un $\sin(\omega t-\Psi)$. On donnera les expressions de $\sin\Psi$, $\cos\Psi$, $\tan\Psi$.

16.On décide ici d'écrire la solution $x(t)$ en régime sinusoïdal forcé sous la forme: $x(t)=-E_0[X'(\omega)\cos(\omega t)-X''(\omega)\sin(\omega t)]$

- Préciser les fonctions $X'(\omega)$ et $X''(\omega)$.
- En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$ du point P avec les mêmes fonctions $X'(\omega)$ et $X''(\omega)$. Préciser le déphasage des deux termes obtenus dans la vitesse en prenant pour référence la force excitatrice.

17.La puissance fournie à un atome par le champ s'accompagne d'une diminution équivalente de la puissance transportée par l'onde électromagnétique.

- Rappeler le relation donnant la puissance instantanée d'une force $\vec{F}$ en fonction de $\vec{F}$ et $\vec{v}$ (vitesse du point d'application).
- Donner l'expression de la puissance instantanée $p(t)$ de la force électrique de l'onde sinusoïdale.
- Les fréquences sont telles que l'on ne s'intéresse qu'à la puissance moyenne $<p(t)>$ dans le temps notée $p_{moy}=<p(t)>$. Donner son expression et tracer la courbe p_{moy} en fonction de ω .
- Commenter le sens physique de ces résultats en ce qui concerne la transparence du matériau

étudié.

18.On étudie ici $X'(\omega)$ (terme de dispersion). Ce terme intervient dans l'expression de l'indice du matériau.

- Que vaut $X'(\omega_0)$.
- Représenter $X'(\omega)$ dans le cas limite $\gamma=0$ (On peut partir des résultats de la $question\,16$ où reprendre le raisonnement $question\,14$ avec $\gamma=0$). À quelle situation physique ce cas correspondrait-il?
- En déduire l'allure de $X'(\omega)$ quand $\gamma\neq 0$.
- Donner une expression approchée de $X'(\omega)$ quand $|\omega-\omega_0|\gg\gamma$.

D. Indice de réfraction

À l'échelle macroscopique, la lumière ne se propage pas dans un matériau à la même vitesse que dans le vide.

19.Si on désigne par n l'indice de réfraction du matériau, quelle est la vitesse de la lumière dans celui-ci?

Un matériau contenant N atomes par unité de volume, est éclairé par une onde lumineuse de longueur d'onde dans le vide λ , de pulsation ω . On admettra que dans cette situation, un seul électron par atome est concerné par les échanges d'énergie avec l'onde lumineuse. Le modèle développé précédemment est alors applicable. L'onde lumineuse peut être décrite par la propagation d'un champ électrique et d'un champ magnétique sinusoïdaux de pulsation ω . À un endroit donné, un atome est donc soumis à un champ électrique de la forme $\vec{E}=E_0\cos(\omega t)\vec{u}_x$ et rayonne à son tour de la lumière de pulsation ω (voir $partie\, I.B$). L'existence de l'indice n est attribuée aux diffusions successives de l'onde lumineuse par les atomes ou les molécules du milieu.

On peut alors démontrer que pour un milieu de faible densité électronique N , et pour des pulsations telles que $|\omega-\omega_0|\gg\gamma$, $n(\omega)$ est donné par la relation: $n(\omega)=1+\dfrac{e\,N\,X'(\omega)}{2\,\varepsilon_0}$ (voir $question\,18$).

20. n dépend donc de la longueur d'onde de la lumière. Comment s'appelle ce phénomène ? Décrire brièvement l'expérience classique qui met cela en évidence.

21.Donner l'expression de $n(\omega)$. Tracer l'allure de n en fonction de ω pour $\omega<\omega_0$ et $|\omega-\omega_0|\gg\gamma$.

22.En partant de l'expression précédente, expliquer qualitativement comment varie n avec la longueur d'onde dans le domaine considéré ? Cela paraît-il compatible avec l'expérience classique décrite à la $question\,20$?

23.Pour $\omega\ll\omega_0$ et $|\omega-\omega_0|\gg\gamma$, retrouver l'expression de la loi de Cauchy sous la forme: $n(\lambda)=A+\dfrac{B}{\lambda^2}$. Donner les expressions de A et B .

II. L'effet Kerr optique: un effet non linéaire

Le modèle d'une force de rappel linéaire (*partie I.A*) est correct tant que les déplacements ne sont pas trop importants, c'est-à-dire que les champs électriques appliqués aux atomes ne sont pas trop forts. On peut aujourd'hui sortir de ces limites avec des sources laser pour entrer dans le domaine de l'optique non linéaire. La force de rappel n'est plus proportionnelle au déplacement. Pour un matériau isotrope: $\vec{F}=-(m\omega_0^2 x+m D x^3)\ \vec{u}_x$ où D est une constante caractéristique du matériau et de l'électron mis en jeu. Dans la suite, on supposera que $\omega<\omega_0$ et que $|\omega-\omega_0|$ est suffisamment grand devant γ pour que l'on puisse négliger le terme de freinage dû au rayonnement dans l'équation du mouvement.

24. Écrire alors l'équation du mouvement du point P soumis au champ électrique de la *partie I.C* .

25. Le déplacement $x(t)$ en régime forcé est décomposé en deux termes: $x(t)=x_l(t)+x_{nl}(t)$. $x_l(t)$ représente la solution pour $D=0$, c'est-à-dire la solution étudiée aux *questions* $14-15-16-17-18$ (approximation d'un milieu linéaire). $x_{nl}(t)$ représente une perturbation due au comportement non linéaire du milieu. Écrire l'équation différentielle qui relie $x_l(t)$, $x_{nl}(t)$, et leurs dérivées.

26. Cette équation ne peut être résolue analytiquement de façon exacte. Montrer qu'en supposant $|x_l(t)|\gg|x_{nl}(t)|$ la perturbation non linéaire vérifie l'équation: $\ddot{x}_{nl}+\omega_0^2 x_{nl}=A(\omega)\cos\omega t+B(\omega)\cos 3\omega t$. Préciser les fonctions $A(\omega)$ et $B(\omega)$.

27. On rappelle que la solution de l'équation approchée précédente en régime sinusoïdal forcé est la somme des deux solutions $x_{nl_1}(t)$ et $x_{nl_3}(t)$ obtenues respectivement avec le premier terme du second membre seul et le deuxième terme du second membre seul. Déterminer $x_{nl_1}(t)$ et $x_{nl_3}(t)$ (on conservera les notations $A(\omega)$ et $B(\omega)$).

28. Quelle est finalement la solution $x(t)$ en régime forcé? On rappelle qu'une charge oscillante rayonne de l'énergie, cf. *partie I.B* , indiquer alors quelles sont les longueurs d'onde susceptibles d'être rayonnées par les atomes en présence d'effets non linéaires ?

29. On supposera dans la suite que les conditions expérimentales sont telles que la contribution $x_{nl_3}(t)$ n'est pas à prendre en compte. L'éclairement du matériau (puissance par unité de surface, unité $kW.m^{-2}$) appelé intensité dans la suite par abus de langage et noté I , est proportionnel à E_0^2 . Montrer que pour un matériau non linéaire, l'indice de réfraction dépend de I et peut se mettre sous la forme: $n=n_0+n_2 I$ (effet Kerr optique) où n_0 et n_2 dépendent de ω . Quel est le signe de n_2 , dans le domaine de pulsations considéré ?

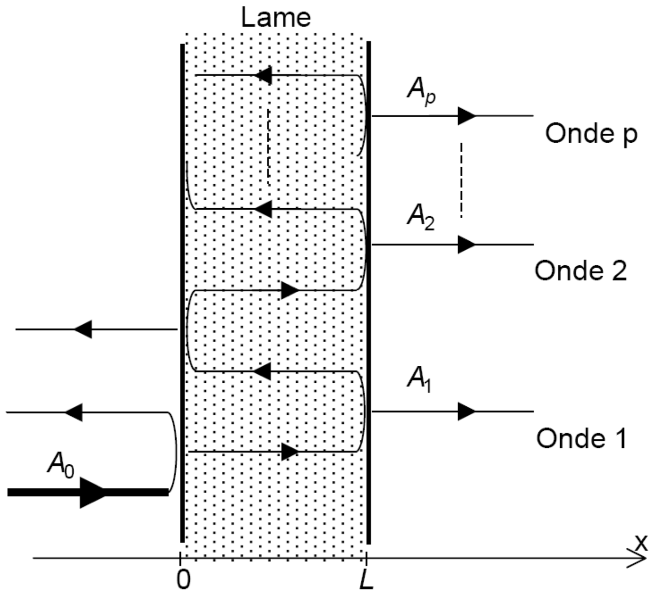
III. Effets non linéaires dans une cavité optique

A. Étude de la transmission de la cavité en intensité

Une cavité optique est formée de deux miroirs partiellement réfléchissants dont les coefficients de réflexion et de transmission sont respectivement r' et t'. Cela signifie qu'une onde incidente d'amplitude A sur un miroir donne naissance à une onde réfléchie d'amplitude $r'A$ et à une onde transmise d'amplitude $t'A$. De plus $|r'|<1$ et $|t'|<1$.

On envoie sur cette cavité une onde lumineuse de longueur d'onde dans le vide λ et de pulsation ω sous incidence normale. Les deux miroirs donnent naissance à une multitude d'ondes réfléchies et d'ondes transmises (voir *figure*). La vibration incidente (en $x=0$) est notée: $s(t)=A_0 \cos \omega t$ ou en complexe $\underline{s}(t)=A_0 \exp(j\omega t)$. On appelle intensité d'entrée la quantité $I_E=A_0^2$.

La cavité est remplie d'un milieu d'indice n.



Réflexions et transmissions successives d'une onde lumineuse

Les décalages transversaux sont fictifs et ont pour seul but de faciliter la lecture

30.Le retard de phase dû à la propagation sur une longueur L dans le milieu d'indice n est noté Φ. Exprimer Φ en fonction de λ, n, L, puis en fonction de ω, n, L et c.

31.En déduire le retard de phase noté φ du rayon transmis $p+1$ par rapport au rayon transmis p. φ désigne donc le déphasage entre deux rayons transmis successifs.

32.Donner une condition sur φ pour que les ondes successivement transmises par la cavité interfèrent constructivement. Pour une longueur L fixée, donner l'expression des longueurs d'onde qui donneront un maximum de transmission (réponse en fonction de L, n et d'un entier positif m) ?

33.Les coefficients de réflexion et de transmission pour l'intensité sont respectivement $R=r'^2$ et $T=t'^2$. Les miroirs sont supposés sans pertes de sorte que $R+T=1$. Le calcul précis de l'amplitude résultante A_S , en sortie de la cavité ($x=L$), et de l'intensité associée $I_S=A_S^2$ donne alors: $\tau(\Phi)=\dfrac{I_S}{I_E}=\dfrac{1}{1+K\sin^2\Phi}$ avec $K=\dfrac{4R}{(1-R)^2}$. Comment varie K si R varie de 0 à 1 ? Commenter la valeur de $\tau(\Phi)$ pour $R=0$ et $R=1$.

34.Quelle est la période de $\tau(\Phi)$? Montrer que ce résultat confirme la réponse à la *question* 32 . Préciser la valeur des maxima et des minima de $\tau(\Phi)$ sans faire de calcul de dérivée (expressions littérales en fonction de R puis applications numériques). Tracer, sur un même graphe, l'allure de $\tau(\Phi)$ pour $R=0{,}3$ et pour $R=0{,}9$.

35.Pour étudier la qualité de la cavité, on définit la « finesse »: $F=\dfrac{\text{écart entre deux pics}}{\text{largeur d'un pic à mi-hauteur}}$
Comment choisir K pour que la cavité agisse en transmission comme un filtre de fréquence de bonne qualité? Dans ces conditions, exprimer de manière approchée la finesse en fonction de R . Application numérique $R=0{,}9$.

36.On commence ici la démonstration de la formule *question* 33 .

- Montrer que la première vibration transmise en $x=L$ s'écrit: $\underline{s_1}(t)=(1-R)A_0\exp(-j\Phi)\exp(j\omega t)$.
- Écrire les deux vibrations transmises suivantes $\underline{s_2}(t)$ et $\underline{s_3}(t)$.
- Il faudrait ensuite faire la somme de ces vibrations. Montrer que ces vibrations forment une progression géométrique dont on exprimera la raison.

B. Étude d'une cavité avec un milieu présentant de l'effet Kerr optique

La cavité est maintenant remplie d'un milieu présentant de l'effet Kerr optique (voir *partie II*) c'est-à-dire un milieu dont l'indice n_c en un point dépend de l'intensité de la lumière qui s'y propage sous la forme: $n_c=n_0+n_2 I_c$. I_c désigne l'intensité au point de la cavité considéré.

37.Pourquoi l'intensité de la lumière varie-t-elle d'un point à un autre à l'intérieur de la cavité ? On définit l'intensité moyenne dans la cavité par: $I_{c,m}=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L I_c(x)\,dx.$. On montre que l'intensité moyenne $I_{c,m}$ est reliée à l'intensité de sortie I_S par la relation $I_{c,m}=\beta I_S$ où β est une constante ($\beta=\dfrac{1+R}{1-R}$). Calculer numériquement β pour $R=0{,}9$. Commenter physiquement le résultat.

38.L'expression du retard de phase Φ défini à la *question* 30 est donc modifiée puisque l'indice dépend du point de la cavité.

- Écrire son expression en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_0^L n_c(x)\,dx.$.
- En déduire que $\Phi=\Phi_0+\gamma I_S$. Préciser Φ_0 en fonction de n_0 , L , λ , ainsi que

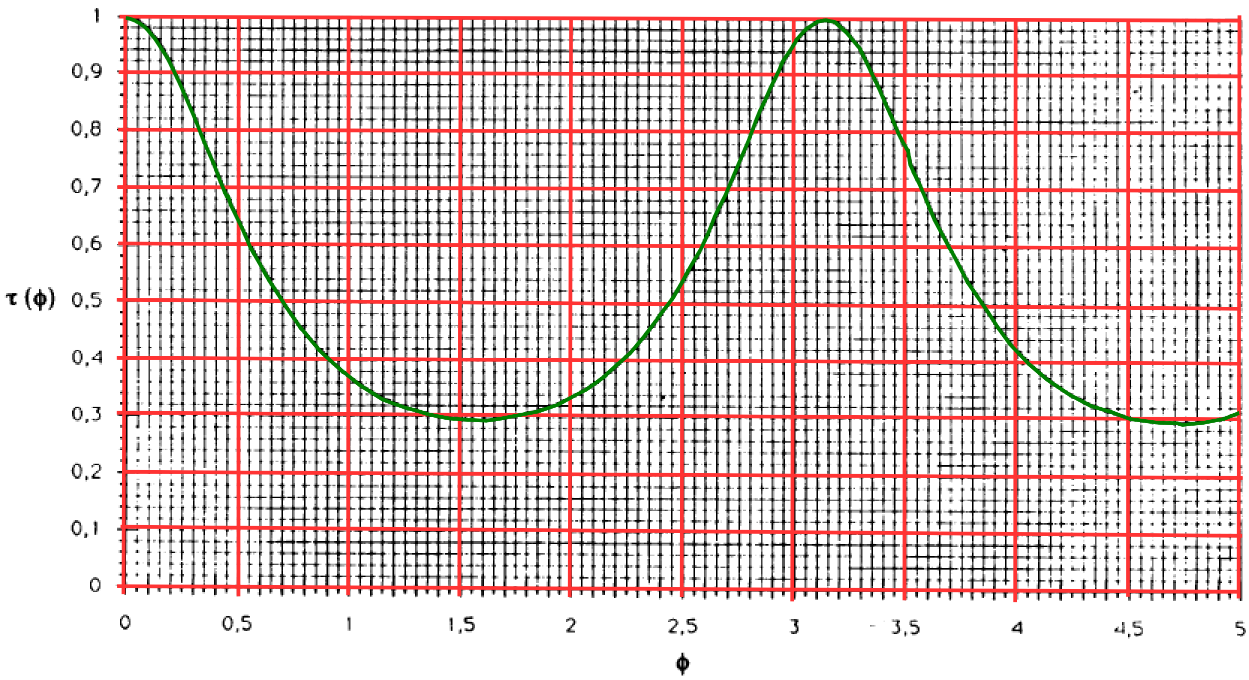
γ en fonction de n_2 , L , λ , β .

- Donner l'expression de τ en fonction de Φ , Φ_0 , γ , I_E .

39. Φ_0 et γ sont connus, l'intensité d'entrée I_E est la grandeur variable. Quelle droite (D) faut-il tracer sur la courbe (C) : $\tau(\Phi)$ (obtenue à la *question* 34) pour déterminer τ et Φ (à l'intersection entre la courbe (C) et la droite (D)). Montrer que la pente de la droite (D) dépend de l'intensité d'entrée I_E .

C. Transistor optique et mémoire optique

La courbe $\tau(\Phi)$ à laquelle on fait référence dans la question précédente est donnée ci-dessous pour $R=0,3$. On supposera dans la suite que $\gamma=1\,rad.cm^2.kW^{-1}$.



1) Transistor optique

40.On choisit $\Phi_0=2,2\,rad$.

- En utilisant une résolution graphique (voir courbe précédente reproduite sur le document-réponse), compléter le tableau ci-dessous (voir document-réponse) - pour une droite, les points d'ordonnées $\tau=0$ et $\tau=1$ faciliteront le tracé -.

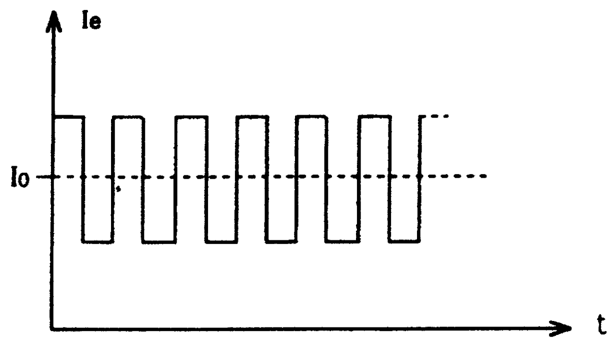
$I_E(kW\,cm^{-2})$	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7
τ										
$I_S(kW\,cm^{-2})$										

- Tracer la courbe I_S (ordonnée) fonction de I_E (abscisse) avec des échelles identiques sur les deux axes: $10\ cm$ pour $1\ kW.cm^{-2}$.

41.Estimer la valeur numérique de:

- l'intensité d'entrée I_0 pour laquelle la courbe précédente possède un point d'inflexion
- la pente de la courbe précédente au niveau du point d'inflexion

42.On envoie alors sur ce système de la lumière dont l'intensité est modulée en fonction du temps (voir *figure*). On supposera que l'intensité I_E reste très voisine de la valeur I_0 définie dans la question précédente.



- Montrer que la partie modulée du signal lumineux est amplifiée. Préciser. Éventuellement, faire un schéma qualitatif.
- A-t-on globalement fabriqué un amplificateur de lumière. Dire pourquoi en une phrase.

2) Mémoire optique

On choisit maintenant $\Phi_0 = 1{,}25\,rad$.

43.Déterminer les deux valeurs I_{E_1} et I_{E_2} de I_E entre lesquelles la construction graphique conduit à plusieurs valeurs possibles de τ .

Dans une telle situation, on admettra ici , sans démonstration, que:

- les points d'intersection tels que la pente de la droite D est plus petite que celle de la courbe C correspondent à des états instables; le système ne peut donc s'y maintenir;
- le système évolue d'un état stable vers l'état stable le plus proche.

Pour des intensités d'entrée comprises entre I_{E_1} et I_{E_2} la valeur de I_S prend alors deux valeurs différentes suivant que I_E est croissant ou décroissant (voir question suivante). Le système présente donc une certaine mémoire.

44.Compléter le tableau ci-dessous et tracer la courbe I_S (ordonnée) fonction de I_E (abscisse) avec des échelles identiques sur les deux axes: 5 cm pour 1 $kW.cm^{-2}$ (voir document-réponse).

$I_E(kW\ cm^{-2})$	0,2	0,5	1,0	1,6	I_{E_1}	2,0	2,2	I_{E_2}	2,9	3,5
τ $(I_E croissant)$										
τ $(I_E décroissant)$										
$I_S(kW\ cm^{-2})$ $(I_E croissant)$										
$I_S(kW\ cm^{-2})$ $(I_E décroissant)$										

45.L’intensité d’entrée est maintenue à la valeur $I_{Eb}=\frac{(I_{E_1}+I_{E_2})}{2}$. Il y a donc deux valeurs possibles pour l’intensité de sortie I_{S_1} , et $I_{S_0}<I_{S_1}$. On suppose qu’initialement on maintient $I_S=I_{S_0}$ à l’aide d’une source laser. À l’aide d’un laser moins puissant, on envoie une impulsion lumineuse sur le système.

- Quelle doit être l’intensité minimale de cette impulsion pour que l’intensité I_S bascule à la valeur I_{S_1} ?
- Expliquer en quoi on a réalisé une mémoire optique. Comment faire pour effacer la mémoire?
- Voyez-vous des raisons pour lesquelles on aurait intérêt à utiliser ce type de dispositif à la place des mémoires électroniques?

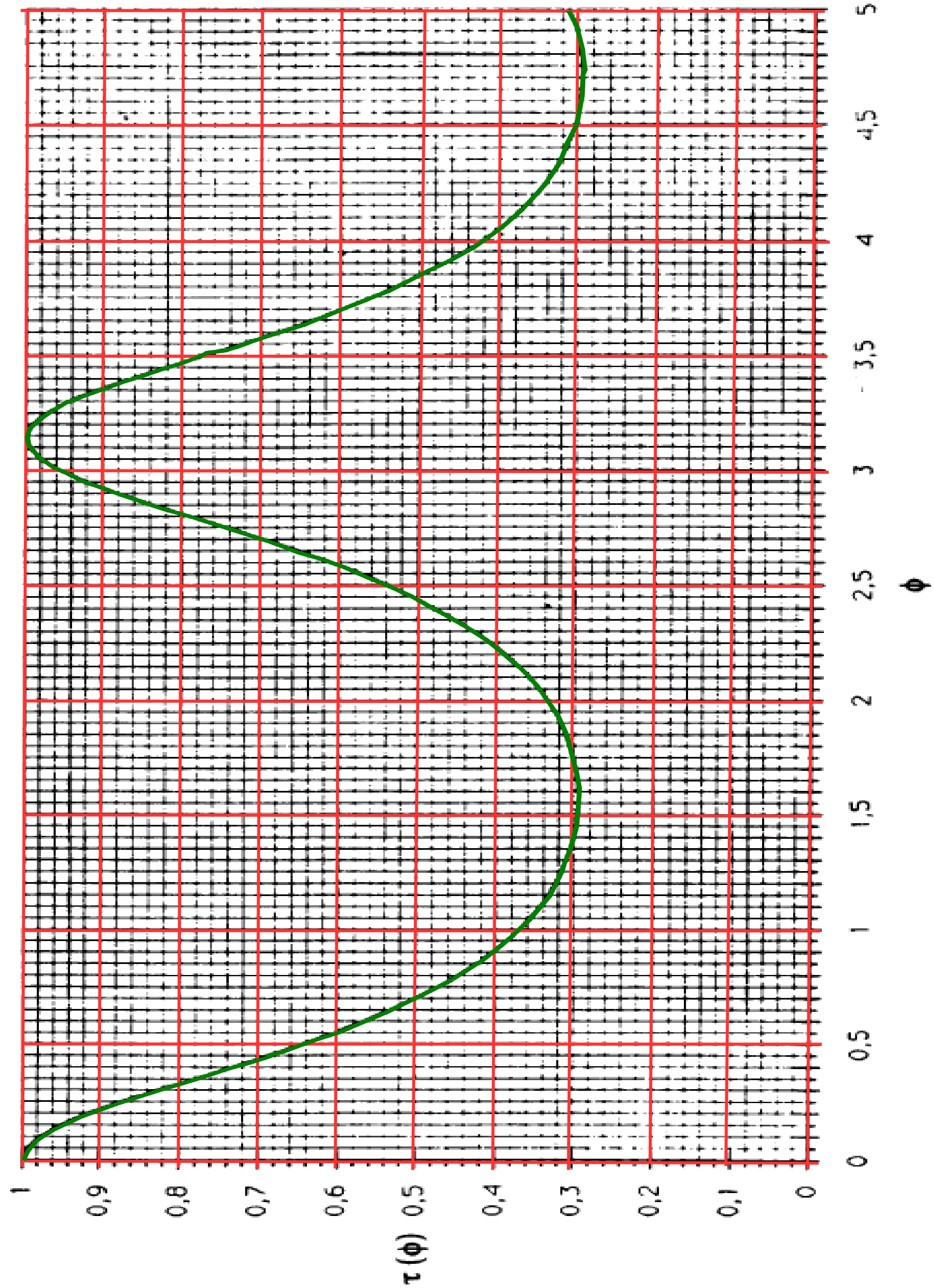
Document réponse

NOM: ____________________________________

$I_E(kW\ cm^{-2})$	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7
τ										
$I_S(kW\ cm^{-2})$										

$I_E(kW\ cm^{-2})$	0,2	0,5	1,0	1,6	I_{E_1}	2,0	2,2	I_{E_2}	2,9	3,5
τ $(I_E croissant)$										
τ $(I_E décroissant)$										
$I_S(kW\ cm^{-2})$ $(I_E croissant)$										
$I_S(kW\ cm^{-2})$ $(I_E décroissant)$										

Document -réponse (suite) NOM:



Réponses

optique non linéaire

1) ω_0 pulsation

$$\boxed{\text{en rad } s^{-1}}$$

---

2) $\overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a}$

$-m\omega_0^2 x = m\ddot{x}$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

---

3) $x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

$\dot{x} = \omega_0(-A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t)$

Conditions initiales : $x_{t=0} = x_0$ et $\dot{x}_{t=0} = 0$ donc :

$x_0 = A$

$0 = \omega_0 B$

$$\boxed{x = x_0\cos\omega_0 t}$$

$\dot{x} = -\omega_0 x_0 \sin\omega_0 t$

---

4) $dE_P = -\overrightarrow{F}\,\overrightarrow{dl}$ (ou $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_P$)

$= -(-m\omega_0^2 x)\,dx$

$E_P = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \cancel{\text{constante}}$

nulle car $E_P = 0$ pour $x = 0$

$$\boxed{E_P = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2}$$

---

5) Energie totale W :

$W = E_C + E_P$

$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$

$= \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \sin^2\omega_0 t + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2\cos^2\omega_0 t$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2}$$

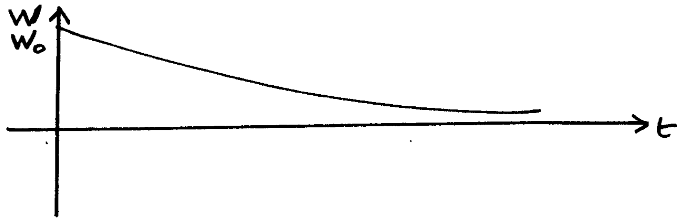
(remarque : en l'absence de frottements, W est constante. Il suffisait de chercher la valeur en $t=0$

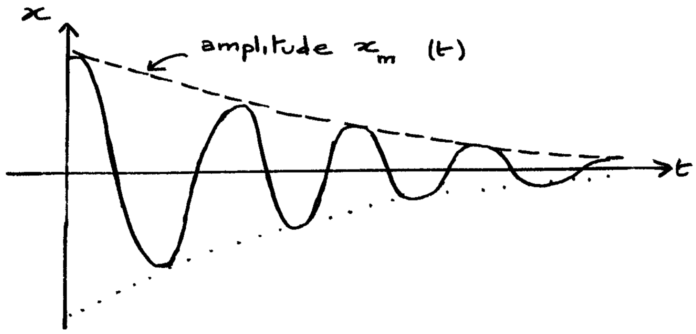
$$W = E_{C\,t=0} + E_{P\,t=0}$$
$$= 0 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \quad)$$

6) $$\boxed{W_0 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2}$$

comme précédemment

7) L'oscillateur émet de l'énergie par rayonnement. Son énergie va donc diminuer au cours du temps. L'amplitude des oscillations diminue au cours du temps.





8) En notant ici $\delta\mathcal{T}$ un travail élémentaire, on aura pour le bilan d'énergie cinétique pendant dt

$$dE_C = \underbrace{\delta\mathcal{T}_{\substack{\text{force de}\\ \text{rappel}}}}_{-dE_P} + \delta\mathcal{T}_{\text{rayonnement}}$$

(< 0 cf amortissement)

avec $\delta\mathcal{E}_R = - P_R \, dt$

$$d(E_c + E_P) = - P_R \, dt$$

$$dW = - P_R \, dt$$

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = - P_R}$$

avec

$$W = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \qquad \text{(Joule)}$$

$$P_R = \frac{q^2 \omega_0^4 x_m^2}{12\pi \varepsilon_0 c^3} \qquad \text{(Watt)}$$

$\dfrac{W}{P_R}$ est un temps noté τ

$$\tau = \frac{6\pi \varepsilon_0 m c^3}{q^2 \omega_0^2}$$

ici $\boxed{q = -e}$

$$\boxed{\tau = \frac{6\pi \varepsilon_0 m c^3}{e^2 \omega_0^2}}$$

finalement :

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{W}{\tau}$$

$$\frac{dW}{W} = - \frac{dt}{\tau}$$

$$\int_{W_0}^{W} \frac{dW'}{W'} = - \frac{1}{\tau} \int_0^t dt'$$

$$\ln \frac{W}{W_0} = - \frac{t}{\tau}$$

$$\boxed{W = W_0 \, e^{-t/\tau}}$$

9) A.N. $\lambda_0 = 500\ \text{nm}$

$$\boxed{T_0 = \frac{\lambda_0}{c}}$$

$$= \frac{500\ 10^{-9}}{3.\ 10^8}$$

$$\boxed{T_0 = 1{,}7\ 10^{-15}\ \text{s}}$$

$$\tau = \frac{6\pi\varepsilon_0\ m c^3}{e^2\ \omega_0^2}$$

avec $\omega_0 = k c = \frac{2\pi}{\lambda_0} c$

$$= \frac{6\pi\varepsilon_0\ m c^3 \lambda_0^2}{e^2\ 4\pi^2 c^2}$$

$$\boxed{\tau = \frac{3\ \varepsilon_0 c\ m\ \lambda_0^2}{2\ e^2\ \pi}}$$

$$= \frac{3 \times 8{,}85\ 10^{-12} \times 3.\ 10^8 \times 9{,}11\ 10^{-31} \times (5\ 10^{-7})^2}{2 \times (1{,}6\ 10^{-19})^2 \times \pi}$$

$$\boxed{\tau = 1{,}1\ 10^{-8}\ \text{s}}$$

On remarque que

$$\boxed{\frac{\tau}{T_0} \simeq 10^7}$$

La décroissance est très lente (cela justifie a posteriori les deux approximations du texte :

$$\omega \simeq \omega_0 \quad \text{et} \quad \langle W \rangle_T = W$$

- on a confondu la valeur moyenne de l'énergie avec sa valeur instantanée -)

---

10) $\vec{F_R} = -m\gamma\,\vec{v}$

donc au niveau des dimensions :

$$[\gamma] = \frac{[F]}{[m][v]}$$

$$= \frac{\cancel{[m]}[a]}{\cancel{[m]}[v]}$$

$$\boxed{[\gamma] = T^{-1}}\ (\text{temps}^{-1})$$

$$\boxed{\gamma \text{ est en } s^{-1}}$$

La nouvelle équation différentielle est donc :

$$-m\omega_0^2 x - m\gamma \dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

---

11) équation caractéristique

$$r^2 + \gamma r + \omega_0^2 = 0$$

$$r = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

le problème indique la presence d'oscillations (γ "petit")

donc écrire :

$$r = -\frac{\gamma}{2} \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$= -\frac{\gamma}{2} \pm j\underbrace{\omega_0\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}}}_{\text{pseudopulsation } \Omega}$$

$$\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}}}$$

$$\boxed{x = e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t\right)}$$

ou plutôt ici

$$\boxed{x = e^{-\frac{\gamma t}{2}}\, C \cos(\Omega t + \varphi)}$$

$$\dot{x} = -\frac{\gamma}{2} x - C e^{-\frac{\gamma t}{2}} \Omega \sin(\Omega t + \varphi)$$

on porte les conditions initiales : $x_{t=0} = x_0$ et $\dot{x}_{t=0} = 0$

$$x_0 = C \cos \varphi$$

$$0 = -\frac{\gamma}{2} x_0 - C\,\Omega \sin\varphi$$

$$C \cos\varphi = x_0$$
$$C \sin\varphi = -x_0 \frac{\gamma}{2\Omega}$$

En choisissant C de même signe que x_0

$$\boxed{C = x_0 \sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4\Omega^2}}}$$

φ tel que
$$\boxed{\begin{aligned} \sin\varphi &= -\frac{\gamma/2\Omega}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4\Omega^2}}} \\ \cos\varphi &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4\Omega^2}}} \\ \tan\varphi &= -\frac{\gamma}{2\Omega} \end{aligned}}$$

donc $\cos\varphi > 0$ et φ est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{\gamma}{2\Omega}\right)$$

$$\boxed{\varphi = -\arctan\left(\frac{\gamma}{2\Omega}\right)}$$

finalement :

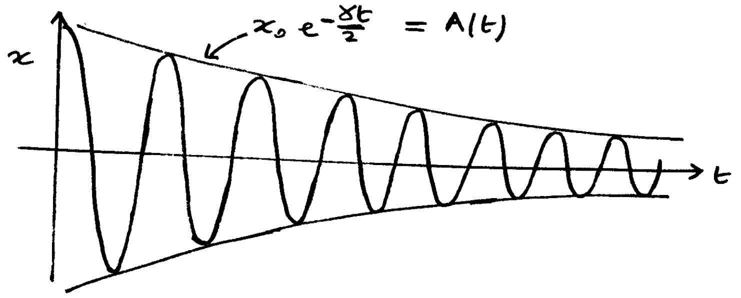
$$\boxed{x = \overbrace{x_0 \sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4\Omega^2}}\; e^{-\frac{\gamma t}{2}}}^{A(t)} \cos\left(\Omega t - \arctan\left(\frac{\gamma}{2\Omega}\right)\right)}$$

---

12) <u>On travaille à l'ordre 0</u> en $\frac{\gamma}{\omega_0}$

donc $\boxed{\Omega = \omega_0}$ et

$$\boxed{x = x_0 \; e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega_0 t)}$$



Pour trouver l'énergie totale, dans la mesure où l'amortissement est faible, on peut utiliser la formule vue en 5) en remplaçant x_0 par $A(t)$

$$W = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2(t)$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \quad e^{-\gamma t}}$$

démonstration :

$$x = x_0 \, e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{x} = -\frac{\gamma}{2} x_0 \, e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega_0 t) - \omega_0 x_0 \, e^{-\frac{\gamma t}{2}} \sin(\omega_0 t)$$

$$= -\omega_0 x_0 \, e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left(\sin \omega_0 t + \underbrace{\cancel{\frac{\gamma}{2\omega_0} \cos \omega_0 t}} \right)$$

on néglige à l'ordre zéro en γ/ω_0 car cette sinusoïde est d'amplitude négligeable par rapport à l'autre

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \, e^{-\gamma t} \sin^2 \omega_0 t$$

$$E_P = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \, e^{-\gamma t} \cos^2 \omega_0 t$$

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \, e^{-\gamma t}$$

---

13) On vient de trouver $W = W_0 \; e^{-\gamma t}$

on avait précédemment $W = W_0 \; e^{-t/\tau}$

pour que les deux modèles coïncident, il faut

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\tau}}$$

On a $\omega_0 \gg \gamma$

$$\frac{2\pi}{T_0} \gg \frac{1}{\tau}$$

$$\boxed{\frac{\tau}{T_0} \gg \frac{1}{2\pi}}$$

Le temps caractéristique de l'amortissement (τ) est beaucoup plus grand que le temps caractéristique des oscillations (T_0).

Le mouvement est alors très peu amorti.

La durée du train d'onde lumineux émis par l'atome qui rayonne est très supérieur à sa période.

On avait trouvé ici $\frac{\tau}{T_0} = 10^7$

---

14) L'électron est soumis en plus à la force

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{F} = -e E_0 \cos\omega t \ \vec{u}_x}$$

L'équation du mouvement selon x devient :

$$-m\omega_0^2 x - m\gamma \dot{x} - e E_0 \cos\omega t = m\ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{-\frac{e}{m} E_0 \cos\omega t}_{E}}$$

---

15) → On sait que, en régime forcé, x est en $\cos(\omega t + \varphi)$. On travaille en complexe donc $\underline{x}$ est en $\exp j\omega t$

$$\ddot{\underline{x}} + \gamma\dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = -\frac{e}{m} E_0 \exp j\omega t$$

$$-\omega^2 \underline{x} + j\omega\gamma \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = -\frac{e}{m} E_0 \exp j\omega t$$

$$\underline{x} = \frac{-\frac{e}{m} E_0 \exp j\omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\gamma}$$

$$\boxed{\underline{x} = \frac{j\frac{e}{m} E_0 \exp j\omega t}{\omega\gamma + j(\omega^2 - \omega_0^2)}}$$

de la forme $\dfrac{j\frac{e}{m}\underline{E}}{\underline{z}(\omega)}$

→ L'amplitude est :

$$\boxed{A(\omega) = \frac{\frac{e}{m} E_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}}$$

on pose $\Psi = \arg\left(\omega\gamma + j(\omega^2-\omega_0^2)\right)$

avec
$$\boxed{\begin{aligned}\sin\Psi &= \frac{\omega^2-\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2}}\\ \cos\Psi &= \frac{\omega\gamma}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2}}\\ \tan\Psi &= \frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega_0\gamma}\end{aligned}}$$

le $\cos\Psi$ est positif donc Ψ est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ donc $\boxed{\Psi = \arctan\left(\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega_0\gamma}\right)}$

finalement $\boxed{x(t) = -A(\omega)\ \sin(\omega t - \Psi)}$

---

16)
$$\begin{aligned}x(t) &= -A(\omega)\left(\sin\omega t\ \cos\Psi - \cos\omega t\ \sin\Psi\right)\\ &= \frac{-\frac{e}{m}E_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2}}\left(\sin\omega t\ \frac{\omega\gamma}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2}} - \cos\omega t\ \frac{\omega^2-\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2}}\right)\\ &= -E_0\left(-\sin\omega t\ X''_{(\omega)} + \cos\omega t\ X'(\omega)\right)\end{aligned}$$

avec
$$\boxed{\begin{aligned}X'(\omega) &= \frac{e}{m}\,\frac{-(\omega^2-\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2}\\ X''(\omega) &= -\frac{e}{m}\,\frac{\omega\gamma}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2}\end{aligned}}$$

$$x(t) = -E_0\left(-X''(\omega)\sin\omega t + X'(\omega)\cos\omega t\right)$$

$$\boxed{v(t) = E_0\omega\left(X''(\omega)\cos\omega t + X'(\omega)\sin\omega t\right)}$$

↑ en phase avec la force excitatrice en $-eE_0\cos\omega t$

↑ $\sin\omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$

si $\omega^2<\omega_0^2$ en quadrature retard / force

si $\omega^2>\omega_0^2$ en quadrature avance / force

---

17)
$$\boxed{p(t) = \overrightarrow{F}_{(t)}\,\overrightarrow{v}_{(t)}}$$

$$p(t) = -e E_0 \cos\omega t \times E_0 \omega \left(X''(\omega) \cos\omega t + X'(\omega) \sin\omega t \right)$$

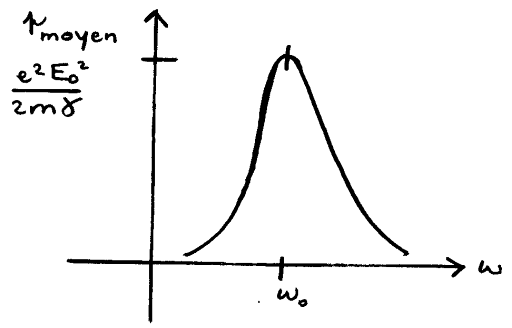
$$\boxed{p(t) = -e E_0^2 \omega \left(X''(\omega) \cos^2\omega t + X'(\omega) \sin\omega t \cos\omega t \right)}$$

$$p_{moyen} = -e E_0^2 \omega \left(X''(\omega) \underbrace{\langle \cos^2\omega t \rangle}_{1/2} + X'(\omega) \underbrace{\langle \sin\omega t \cos\omega t \rangle}_{\text{nul}} \right)$$

$$\boxed{p_{moyen} = -\frac{e E_0^2 \omega \, X''(\omega)}{2}}$$

$$p_{moyen} = \frac{e^2 E_0^2}{2m} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

$$\boxed{p_{moyen} = \frac{e^2 E_0^2}{2m} \frac{\gamma}{\gamma^2 + \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}\right)^2}}$$



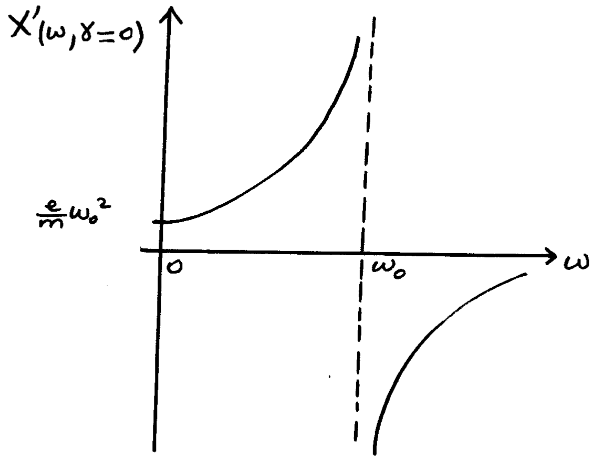
Le milieu absorbe au maximum pour $\omega = \omega_0$.
(Pour les pulsations proches de ω_0, le milieu n'est pas transparent à l'onde)

---

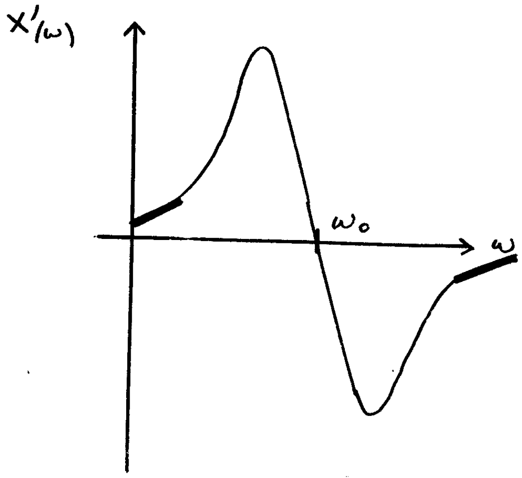
18) $\longrightarrow$ $\boxed{X'(\omega_0) = 0}$

$\longrightarrow$ Si $\gamma = 0$ (pas d'amortissement, milieu parfaitement transparent)

$$\boxed{X'(\omega, \gamma=0) = \frac{e}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}}$$



→ pour $\gamma \neq 0$, X' ne peut plus devenir égal à $\pm\infty$



→ Si ω est très éloigné de ω_0, on retrouve alors (cf $|\omega-\omega_0| \gg \gamma$) la courbe sans amortissement cf

$$\boxed{X'(\omega) \simeq \frac{e}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

vérification

$|\omega-\omega_0| \gg \gamma$ et donc, encore plus :

$\omega+\omega_0 \gg \gamma$

$|\omega^2-\omega_0^2| \gg \gamma^2$

$$X' = \frac{e}{m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega^2\gamma^2+(\omega^2-\omega_0^2)^2}$$

$$= \frac{e}{m}\frac{1}{\cancel{\frac{\omega^2\gamma^2}{(\omega_0^2-\omega^2)}}+(\omega_0^2-\omega^2)}$$

négligeable

19) $n = \frac{c}{v}$

donc $\boxed{v = c/n}$

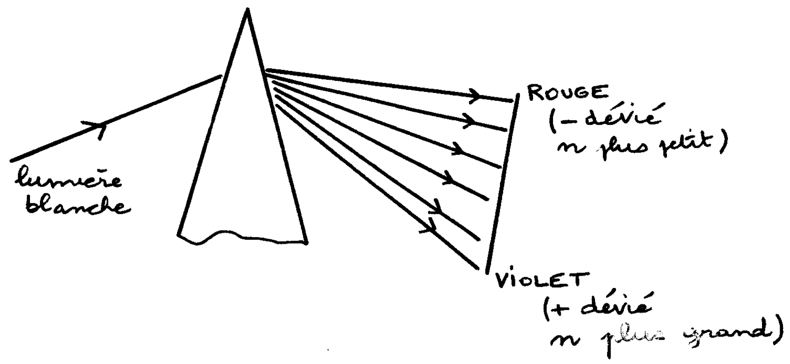
---

20) n dépend de la fréquence et donc de λ

(et donc de la couleur de la lumière)

il s'agit du $\boxed{\text{phénomène de dispersion}}$

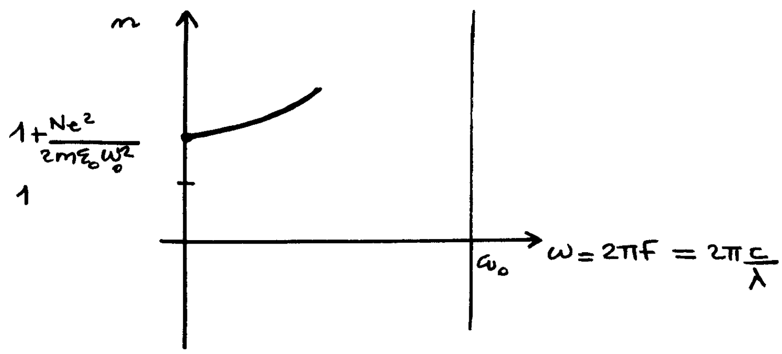
cf expérience de la dispersion par un prisme. On observe la décomposition de la lumière (spectre)



---

21) $n(\omega) = 1 + \frac{N e \, X'(\omega)}{2\varepsilon_0}$

$$\boxed{n(\omega) = 1 + \frac{N e^2}{2m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$ avec $\omega < \omega_0$



---

22) n augmente si $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ augmente

$\boxed{n \text{ diminue si } \lambda \text{ augmente}}$

λ rouge $>$ λ violet

$$\boxed{n \text{ rouge} < n \text{ violet}}$$

Le rouge est donc moins dévié par le prisme que le violet

---

23) Loi de Cauchy

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0\omega_0^2}\ \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

on fait un D.L. car $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \ll 1$

$$n \simeq 1 + \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0\omega_0^2}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

$$= \left(1+\frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0\omega_0^2}\right) + \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0\omega_0^4}\ \omega^2$$

$$\boxed{n = \left(1+\frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0\omega_0^2}\right) + \left(\frac{2Ne^2\pi^2c^2}{m\varepsilon_0\omega_0^4}\right)\frac{1}{\lambda^2}}$$

$$n = A + B\ \frac{1}{\lambda^2}$$

---

24)

$$-(m\omega_0^2 x + mDx^3) - eE_0\cos\omega t = m\ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x + Dx^3 = -\frac{e}{m}E_0\cos\omega t}$$

---

25) $(\ddot{x}_\ell + \ddot{x}_{n\ell}) + \omega_0^2(x_\ell + x_{n\ell}) + D(x_\ell + x_{n\ell})^3 = -\frac{e}{m}E_0\cos\omega t$

La solution x_ℓ vérifie (cf $D=0$)

$$\ddot{x}_\ell + \omega_0^2 x_\ell = -\frac{e}{m}E_0\cos\omega t$$

---

on fait la différence

$$\boxed{\ddot{x}_{n\ell} + \omega_0^2 x_{n\ell} + D(x_\ell + x_{n\ell})^3 = 0}$$

---

26) $|x_{nl}| < |x_\ell|$ donc l'équation devient

$$\boxed{\ddot{x}_{nl} + \omega_0^2 x_{nl} + D x_\ell^3 = 0}$$

avec $x_\ell\ (\gamma=0) = -E_0 \cos\omega t \ X'(\gamma=0)$ cf 16)

$$\boxed{x_\ell = -\frac{e}{m} E_0 \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2} \cos\omega t} \quad \text{cf 18)}$$

$$x_\ell^3 = -\left(\frac{e}{m} E_0 \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\right)^3 \cos^3\omega t$$

$$= -\left(\qquad \right)^3 \left(\frac{1}{4}\cos 3\omega t + \frac{3}{4}\cos\omega t\right)$$

On doit donc résoudre :

$$\boxed{\ddot{x}_{nl} + \omega_0^2 x_{nl} = \underbrace{\frac{3D}{4}\left(\frac{e}{m}E_0\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\right)^3}_{A(\omega)} \cos\omega t + \underbrace{\frac{D}{4}\left(\frac{e}{m}E_0\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\right)^3}_{B(\omega)} \cos 3\omega t}$$

---

27) $\rightarrow x_{nl_1}$ est la solution en régime forcé de

$$\ddot{x}_{nl_1} + \omega_0^2 x_{nl_1} = A(\omega) \cos\omega t$$

<u>Inutile en l'absence de termes en $\dot{x}$ de passer aux complexes.</u>

On essaye x_{nl_1} en $\cos\omega t$

donc $\ddot{x}_{nl_1}$ en $-\omega^2\cos\omega t$

$$\boxed{x_{nl_1} = \frac{A(\omega)}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t}$$

$\rightarrow x_{nl_3}$ est la solution en régime forcé de

$$\ddot{x}_{nl_3} + \omega_0^2 x_{nl_3} = B(\omega) \cos 3\omega t$$

On essaye x_{nl_3} en $\cos 3\omega t$

donc $\ddot{x}_{nl_3}$ en $-(3\omega)^2 \cos 3\omega t$

$$\boxed{x_{nl_3} = \frac{B(\omega)}{\omega_0^2-9\omega^2}\cos 3\omega t}$$

---

28) en régime forcé :

$$\boxed{x(t) = \underbrace{x_\ell(t)}_{\substack{\text{pulsation} \\ \omega}} + \underbrace{x_{n\ell_1}(t)}_{\substack{\text{pulsation} \\ \omega}} + \underbrace{x_{n\ell_3}(t)}_{\substack{\text{pulsation} \\ 3\omega}}}$$

Les pulsations des ondes rayonnées sont ω et 3ω

soit les longueurs d'ondes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{2\pi c}{\omega} \\ \lambda_3 = \dfrac{2\pi c}{3\omega} = \dfrac{\lambda_1}{3} \end{array}}$$

et

---

29) On a : $n = 1 + \dfrac{eN}{2\varepsilon_0} X'$

avec ici :

$$x = x_\ell + x_{n\ell_1}$$

$$= -E_0 \cos \omega t \underbrace{\left(\frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{3}{4} D \left(\frac{e}{m}\right)^3 \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^4} E_0^2 \right)}_{X'}$$

donc

$$n = \underbrace{\left(1 + \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}_{\substack{\text{l'indice obtenu} \\ \text{en 21)}}} - \left(\frac{3}{8} \frac{DNe^4}{m^3 \varepsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^4}\right) \underbrace{E_0^2}_{\substack{\text{proportionnel} \\ \text{à } I}}$$

finalement :

$$\boxed{n = n_0 + \underbrace{n_2}_{\text{négatif}} I}$$

---

30)

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda_{vide}} \times \text{(chemin optique)}$$

$$\boxed{\phi = \frac{2\pi \; nL}{\lambda}}$$

---

31)

$$\boxed{\varphi = 2\phi}$$

---

32) Les ondes interfèrent constructivement pour

$$\boxed{\varphi = m(2\pi)}$$

soit

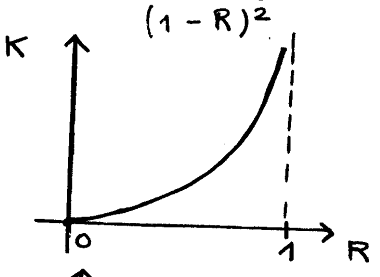
$$L = m \frac{(\lambda/n)}{2}$$

$$\boxed{\lambda = 2\frac{nL}{m}}$$

---

33)

$$K = \frac{4R}{(1-R)^2}$$



$\boxed{\mathcal{T} = 1}$ (toute la lumière est transmise)

$\boxed{\mathcal{T} = 0}$ (rien n'est transmis)

tout ceci est cohérent

---

34)

$$\sin^2\phi = \frac{1-\cos 2\phi}{2}$$

La période de $\mathcal{T}(\phi)$ est celle de $\sin^2\phi$ donc celle de $\cos 2\phi$ (ou $\cos\varphi$)

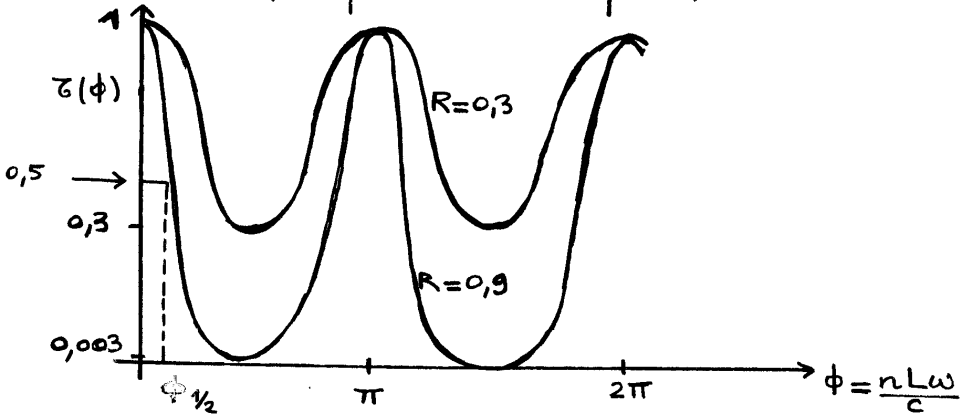
Par rapport à la variable φ, la période est 2π

$\boxed{\text{Par rapport à la variable } \phi \text{, la période est } \pi}$

cohérent avec 32) où l'on a vu que les interférences constructives se produisent pour $\phi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$ etc soit une période de π

A.N.

$\mathcal{T}$	max ($\sin^2\phi = 0$)	min ($\sin^2\phi = 1$)
littéral	1	$\frac{1}{1+K} = \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2$
A.N. $R = 0{,}3$	1	0,3
A.N. $R = 0{,}9$	1	0,003



35) Les fréquences qui "passent" sont celles telles que $\phi = m\pi$.
Cette cavité est un filtre de meilleure qualité si les pics sont étroits.
Il faut donc choisir $\boxed{R \text{ le plus proche de } 1}$
soit $\boxed{K \text{ le plus grand possible}}$.

$$F = \frac{\pi}{2\,\phi_{1/2}} \quad \text{avec} \quad K \sin^2 \phi_{1/2} = 1$$

$$\sin^2 \phi_{1/2} = \frac{1}{K}$$

on suppose $\phi_{1/2}$ "très petit" donc

$$\phi_{1/2} \simeq \frac{1}{\sqrt{K}}$$

$$F = \frac{\pi\sqrt{K}}{2}$$

$$\boxed{F = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}}$$

A.N. $= \dfrac{\pi\sqrt{0,9}}{0,1}$

$$\boxed{F \simeq 30}$$

---

36) $\longrightarrow$ $\underline{s}_0 = A_0 \exp jwt$

pour $\underline{s}_1$, il faut tenir compte de <u>deux transmissions</u> et du <u>retard de phase dû à la traversée L</u>

$$\boxed{\underline{s}_1 = t'^2 \; A_0 \exp jwt \; \exp -j\phi}$$ avec $t'^2 = T = 1-R$

$\underline{s}_1 = (1-R) \; A_0 \exp jwt \; \exp -j\phi$

$\longrightarrow$ pour $\underline{s}_2$, par rapport à $\underline{s}_1$, il faut ajouter un aller-retour et deux réflexions $(r'^2 = R)$

$$\boxed{\underline{s}_2 = \underline{s}_1 \; R \; \exp -j\varphi}$$

$\longrightarrow$ idem

$$\boxed{\underline{s}_3 = \underline{s}_2 \; R \; \exp -j\varphi}$$

termes en <u>progression géométrique de raison</u> :

$R \exp -j\varphi$ ou

$$\boxed{R \exp -2j\phi}$$

---

37) Dans la cavité, l'onde n'est pas progressive mais possède un aspect <u>stationnaire</u>. L'intensité dépend de z. Elle est plus importante aux ventres qu'aux nœuds.

Avec $I_{c,m} = \beta \, I_s$

A.N. $\beta = \dfrac{1+R}{1-R}$

$= \dfrac{1+0,9}{1-0,9}$

$$\boxed{\beta = 19}$$

<u>L'énergie s'accumule dans la cavité.</u>
<u>Il y a peu d'énergie qui en sort.</u>

---

38) $\rightarrow$ Au lieu de $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} n L$

on a :

$$\boxed{\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^L n \, dx}$$

$$\rightarrow \quad \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^L \left(n_o + n_2 \, I_{c(x)}\right) dx$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} n_o L + \frac{2\pi}{\lambda} n_2 \underbrace{\int_0^L I_{c(x)} \, dx}_{I_{c,m} L \text{ ou } \beta I_s L}$$

$$\boxed{\phi = \phi_o + \gamma I_s}$$

avec

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_o &= \frac{2\pi n_o L}{\lambda} \\ \gamma &= \frac{2\pi \beta n_2 L}{\lambda} \end{aligned}}$$

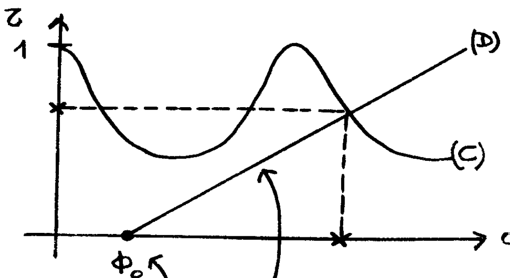
$$\rightarrow \quad \phi = \phi_o + \gamma I_s$$

$$= \phi_o + \gamma \tau_{(\phi)} I_E$$

$$\boxed{\tau_{(\phi)} = \frac{\phi - \phi_o}{\gamma I_E}}$$

---

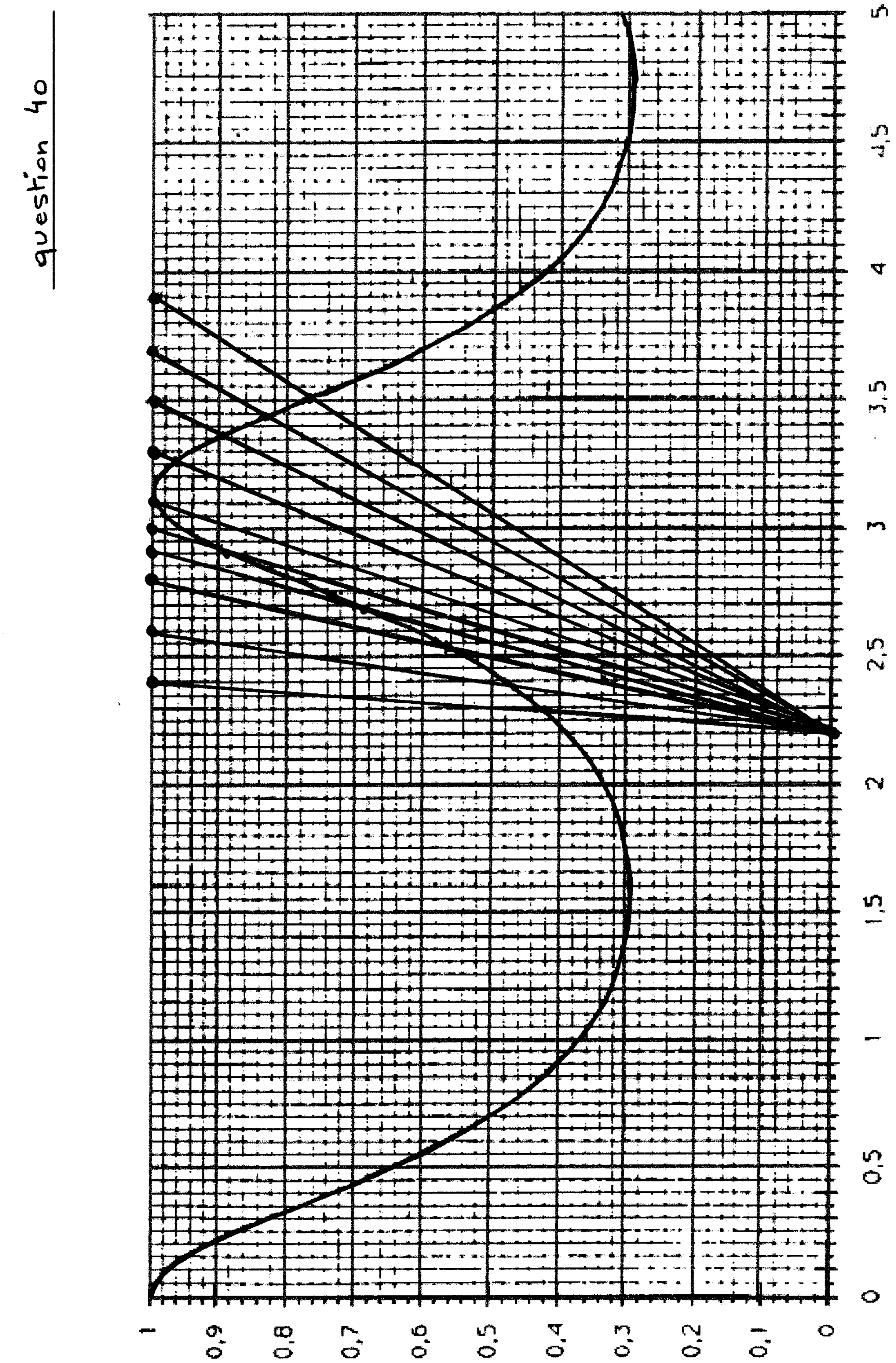
39)



droite : $\tau = \frac{1}{\gamma I_E}(\phi - \phi_o)$

ϕ_o (indépendant de I_E)

pente $\frac{1}{\gamma I_E}$ (dépend de I_E donc varie si I_E varie)


question 40
τ(Φ)
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
Φ
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5

40) Pour tracer une droite pour I_E on fait :

$$\tau = \frac{\phi - \phi_0}{\gamma I_E}$$

Ici :

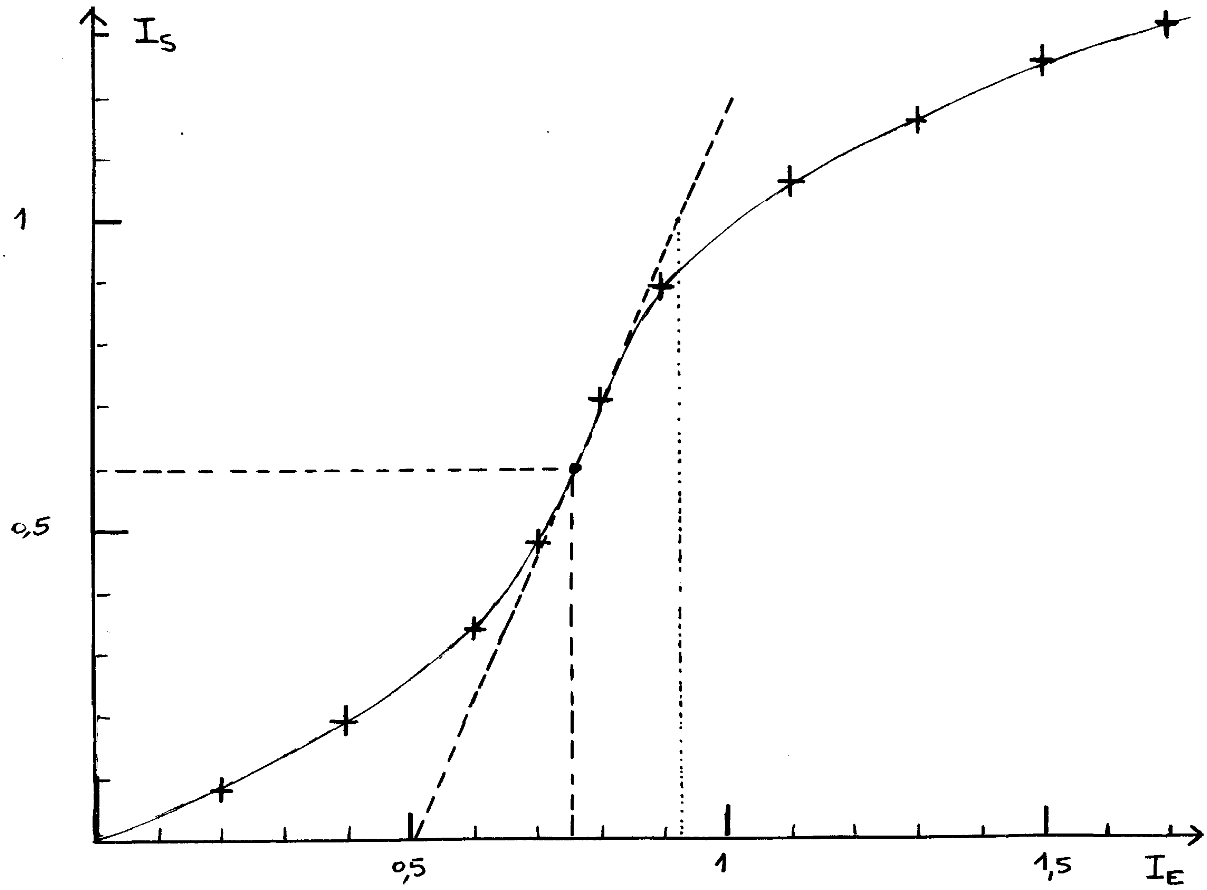
$$\tau = \frac{\phi - 2,2}{1 \quad I_E}$$

2 points :

$\tau = 0$	$\phi = 2,2$
$\tau = 1$	$\phi = 2,2 + I_E$

(voir tracé plus loin)

$I_E (kW\ cm^{-2})$	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7
τ	0,42	0,47	0,57	0,69	0,89	0,99	0,96	0,89	0,83	0,77
$I_S (kW\ cm^{-2})$	0,08	0,19	0,34	0,48	0,71	0,89	1,06	1,16	1,25	1,31



41) On peut estimer grossièrement sur la courbe

- les coordonnées du point d'inflexion

$$\boxed{I_E = I_0 \simeq 0{,}75 \ \mathrm{kW\,cm^{-2}}}$$

$$I_S = 0{,}60 \ \mathrm{kW\,cm^{-2}}$$

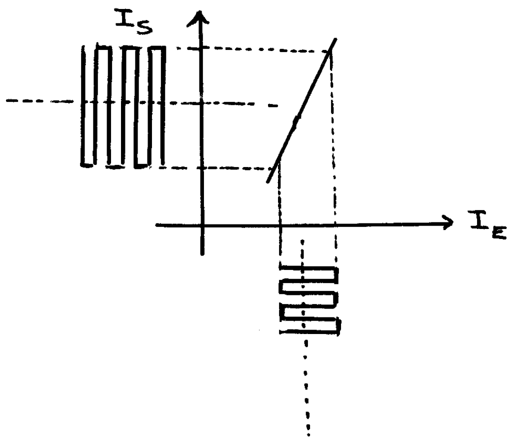
- la pente au point d'inflexion

$$\text{pente} \simeq \frac{1-0}{0{,}93-0{,}5}$$

$$\boxed{\text{pente}_{\max} \simeq 2{,}3 \qquad (>1)}$$

---

42) Au voisinage du point d'inflexion, en assimilant la courbe à sa tangente :



La partie modulée est amplifiée (× 2,3)

mais pas la valeur moyenne (0,75 → 0,6 en sortie)

Ce n'est un amplificateur de lumière

(il n'y a pas plus de lumière en sortie)

C'est un amplificateur pour le signal lumineux autour du point de repos ("transistor optique")

---

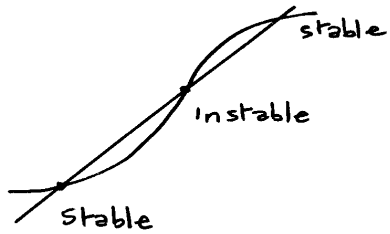
43) $\phi_0 = 1,25$

Pour tracer une droite, 2 points :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tau = 0 & \phi = 1,25 \\ \tau = 1 & \phi = 1,25 + I_E \end{array}}$$

Sur le graphe $\boxed{\begin{array}{l} I_{E_1} = 1,80 \\ I_{E_2} = 2,45 \end{array}}$

Pour I_E entre 1,8 et 2,45



---

44)

$I_E (kW\ cm^{-2})$	0,2	0,5	1,0	1,6	I_{E_1}	2,0	2,2	I_{E_2}	2,9	3,5
τ (I_E croissant)	0,31	0,30	0,29	0,30	0,31	0,32	0,34	0,41	0,78	0,67
τ (I_E décroissant)					0,97	0,98	0,94	0,87		
$I_S (kW\ cm^{-2})$ (I_E croissant)	0,06	0,15	0,29	0,48	0,54	0,64	0,75	1,00	2,26	2,34
$I_S (kW\ cm^{-2})$ (I_E décroissant)					1,75	1,96	2,10	2,13		

(voir courbes plus loin)

---

45) $I_{Eb} = 2,13$ $kW cm^{-2}$

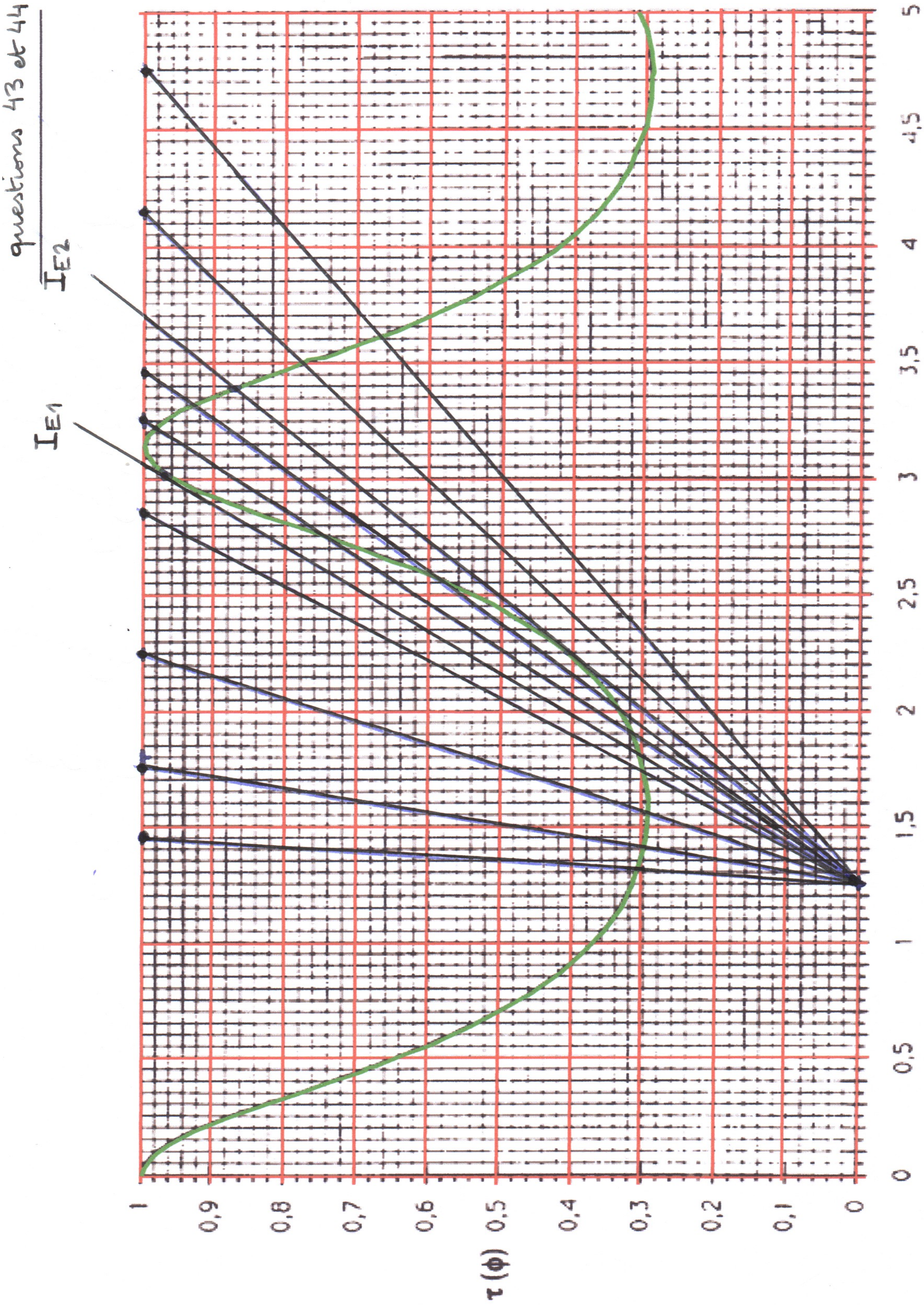
$I_{S_0} = 0,70$ $kW cm^{-2}$

$I_{S_1} = 2,05$ $kW cm^{-2}$

→ <u>impulsion</u> pour que I_S passe de I_{S_0} à I_{S_1}

$= I_{E2} - I_{Eb} = 2,45 - 2,13 = \boxed{0,32 \ kW\ cm^{-2}}$

→ <u>le système a mémorisé l'impulsion puisque son état a changé</u> (de I_{S_0} à I_{S_1})


questions 43 et 44
I_{E2}
I_{E1}
$\tau(\phi)$
ϕ
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
0,5
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5

→ pour effacer, il faut revenir à I_{S0} en baissant l'intensité (impulsion "négative")

impulsion négative de : $\boxed{-0{,}32\ \mathrm{kW\,cm^{-2}}}$

→ intérêt : rapidité de commutation