DNS

Sujet

Électrocinétique de base

A. Rappel de quelques méthodes de résolution en continu

1) Passage entre modèles de Thévenin et de Norton

On considère, d'une part, le générateur de courant [courant électromoteur (c.é.m.) η et résistance r en parallèle] et d'autre part, le générateur de tension [force électromotrice (f.é.m.) E et résistance R en série] (voir *figure* 1).

1. Pour chacun de ces deux générateurs, déterminer:
   - la tension à vide $u_{AB,\,vide}$ c'est à dire la tension lorsque les bornes A et B ne sont reliées à rien.
   - l'intensité du courant de court-circuit $i_{B\rightarrow A,\,court-circuit}$ c'est à dire l'intensité qui passe dans le fil de résistance nulle reliant A et B passant dans le sens $B\rightarrow A$ dans le court-circuit.
2. Pour chacun de ces deux générateurs, écrire la loi d'Ohm en convention récepteur et vérifier la cohérence avec les résultats des deux questions précédentes.
3. On veut que ces deux générateurs soient équivalents. Déterminer E et R en fonction de η et r . De même, déterminer η et r en fonction de E et R

2) Association de résistances en série et en parallèle

4. Trois résistors de résistances respectives R_1 , R_2 R_3 sont placés en série. Démontrer avec soin l'expression de la résistance équivalente.

5. Trois résistors de conductances respectives G_1 , G_2 G_3 sont placées en parallèle. Démontrer avec soin l'expression de la conductance équivalente.

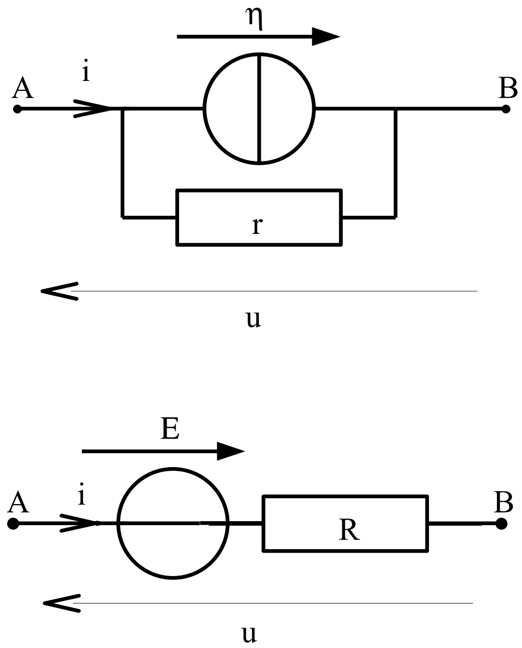


Figure 1

3) Diviseur de tension et diviseur de courant

6. Un dipôle AB est constitué de trois résistors en série (résistances respectives R_1 , R_2 R_3). L'ensemble est soumis à une tension u_E . Démontrer l'expression de la tension u_S , aux bornes du résistor de résistance R_3 , en fonction de u_E , R_1 , R_2 R_3 .

7. Un dipôle AB est constitué de trois résistors en parallèle (conductances respectives G_1 , G_2 G_3). L'intensité qui passe dans l'ensemble vaut i_E . Démontrer l'expression de l'intensité i_S dans le résistor de conductance G_3 , en fonction de i_E , G_1 , G_2 G_3 .

4) Application 1

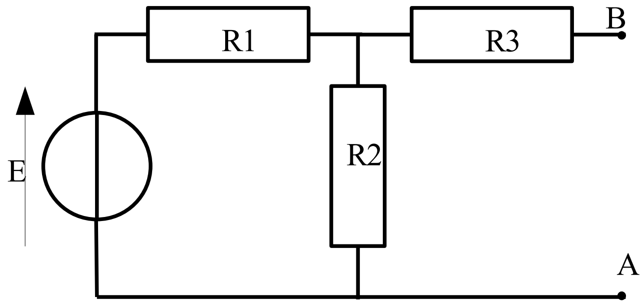
8. En utilisant les méthodes précédentes (donc aucun calcul à faire, uniquement des schémas), pour chacun des deux générateurs (voir *figure* 2):
   - Déterminer directement le courant de court-circuit
   - Déterminer directement la tension à vide
   - En déduire alors la résistance interne du générateur

5) Association de générateurs en série et en parallèle

9. On associe, en parallèle, deux générateurs $(E_{1,} R_1)$ et $(E_{2,} R_2)$ définis par leur modèle de Thévenin. Déterminer en utilisant la transformation Thévenin-Norton et la transformation Norton-Thévenin (donc aucun calcul à faire, uniquement des schémas) le modèle de Thévenin du générateur équivalent.

10. On associe, en série, deux générateurs $(\eta_{1,} r_1)$ et $(\eta_{2,} r_2)$ définis par leur modèle de Norton.

Déterminer en utilisant la transformation Thévenin-Norton et la transformation Norton-Thévenin le modèle de Norton du générateur équivalent.



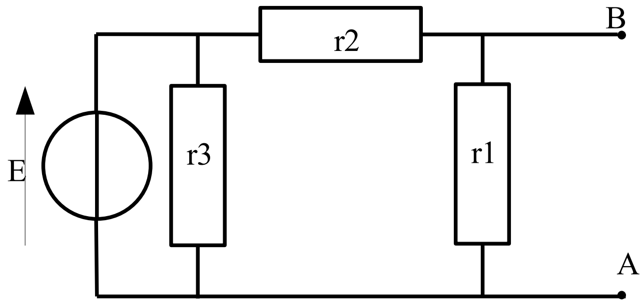


Figure 2

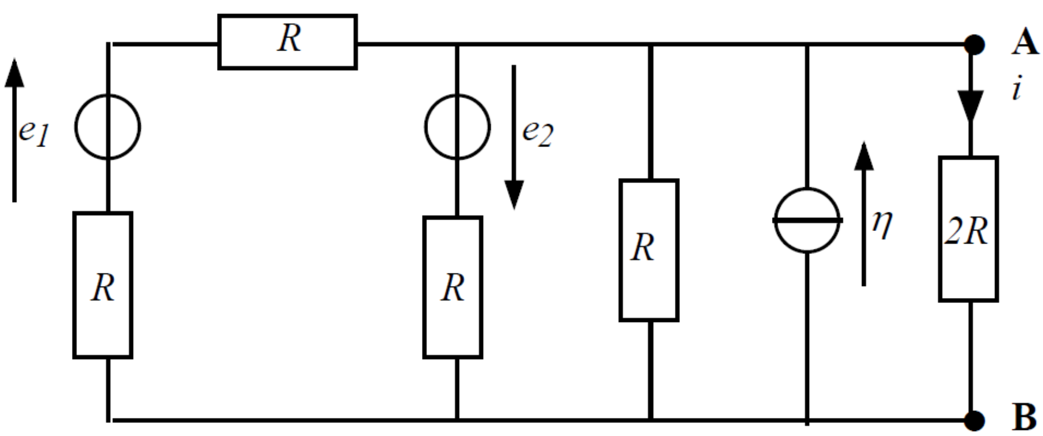
6) Application 2

Soit un circuit linéaire dont les résistances des conducteurs ohmiques, les f.é.m. des sources de tension et les c.é.m. des sources de courant sont indiqués sur la *figure* 3 .

11. Déterminer, en fonction de $e1$, $e2$, η et R , la tension aux bornes du dipôle AB de résistance 2R ou l'intensité i du courant qui circule dans le dipôle

- soit en utilisant uniquement les méthodes précédentes (faire des dessins successifs)
- soit en utilisant uniquement la méthode des noeuds avec résolution en termes de potentiels (méthode de Millman)

Figure 3



B. Circuit RLC

On étudie le circuit linéaire composé de trois dipôles en série : une résistance R , une inductance de coefficient d'induction L , et d'un condensateur de capacité C .

1) Régime sinusoïdal

Ce circuit est soumis à une tension d'entrée sinusoïdale $e(t)=E_m\cos(\omega t)$. On note $s(t)$ la tension de sortie aux bornes du condensateur.

12.Prévoir la nature de ce filtre.

13.Établir la fonction de transfert de ce filtre sous la forme canonique: $\underline{H}=\frac{H_0}{1-x^2+j\,2mx}$ avec $x=\frac{\omega}{\omega_0}$. <u>On déduira</u> les expressions de H_0 , ω_0 et m .Quel est l'ordre de ce filtre.

14.Gain:

- Exprimer le module G de la fonction de transfert en fonction de ω_0 , ω et m .
- Montrer que G passe par un maximum si $m<m_{max}$. Déterminer la valeur de m_{max} .
- Déterminer ω_r , la pulsation correspondant alors à ce maximum, en fonction de ω_0 et m .

15.Gain dB : on rappelle que le gain dB est défini en dB par $G_{dB}=20\log G$.

- Établir les équations des asymptotes de G_{dB} aux basses fréquences et aux hautes fréquences. Préciser la valeur des pentes en dB par décade.
- Exprimer $G_{dB}(\omega=\omega_0)$. Application numérique: $m=0,05$ et $m=5$.
- Tracer le diagramme de Bode sur du papier semi_logarithmique en gain pour $m=0,05$ et $m=5$.

16.On définit les pulsations de coupures ω_c d'un filtre par la relation : $G<\frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$.

- Justifier que la bande passante est alors définie à -3dB .
- Pour quelle valeur de m , ω_0 correspond-il à une valeur de coupure?

17.Interprétation énergétique du coefficient de qualité.

- On note W , l'énergie emmagasinée (sous forme électrique et sous forme magnétique) dans le circuit. Exprimer W en fonction notamment de L , C , ω , U_m . On posera pour la tension aux bornes du condensateur: $u(t)=U_m\cos(\omega t-\varphi)$. Montrer que W est indépendant de t si l'on se place à la résonance d'intensité $\omega=\omega_0$.
- On définit $<W>$ moyenne temporelle de W et ΔW énergie dissipée par effet Joule dans le circuit sur une période. Montrer $\frac{<W>}{\Delta W}$ s'exprime simplement en fonction de

m , $x=\frac{\omega}{\omega_0}$.

- On définit ici le coefficient de qualité du circuit résonant par $Q=2\pi\frac{<W>}{\Delta W}$ à la résonance d'intensité. Retrouver Q en fonction de m (On rappelle $Q=\frac{1}{2\text{m}}$).

2) Réponse à un échelon

18.Si $e(t)$ est une fonction quelconque du temps, quelle est l'équation différentielle entre les fonctions $s(t)$ et $e(t)$? (On la déduira de l'étude précédente). Pour quelle raison peut-on affirmer la convergence du régime transitoire ?

19.On applique ici un échelon de tension de hauteur E à l'entrée du circuit en $t=0$ (le condensateur étant déchargé et l'intensité étant nulle dans le circuit). Déterminer la tension de sortie pour $m=0,05$ et $m=5$. Représenter graphiquement. (Pour le tracé, on prendra $E=1$ et $\omega_0=2\pi$).

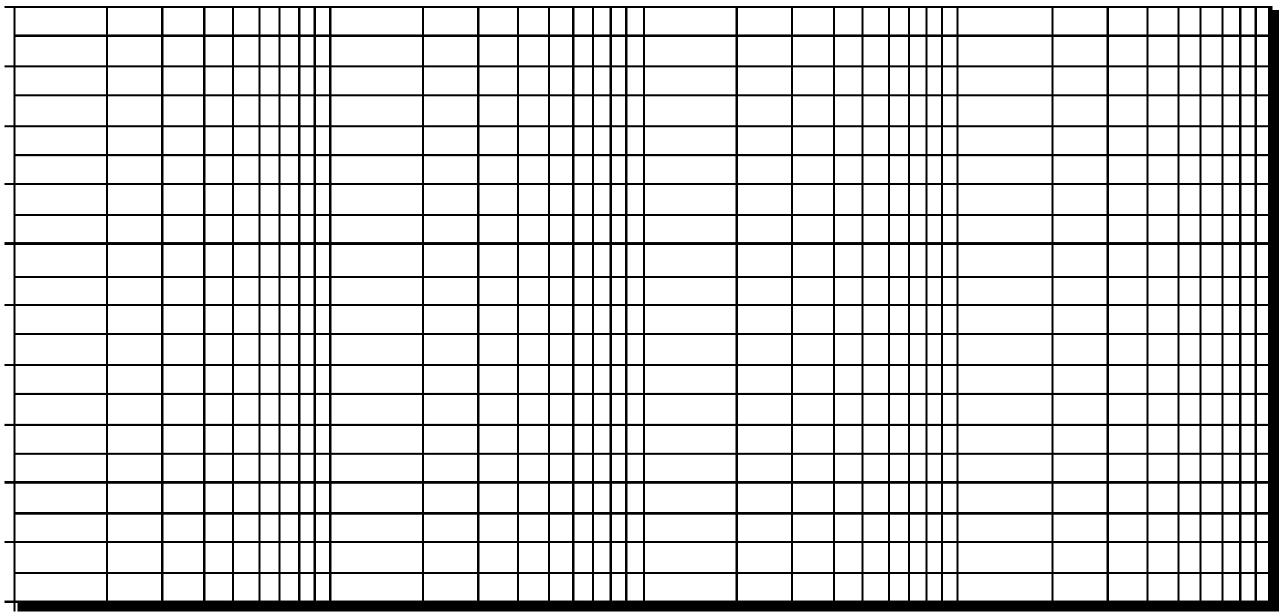
3) Filtrage

On envoie à l'entrée la tension $\underline{e}(t)=E-8\frac{E}{\pi^2}(\exp j(\omega_0 t)+\frac{1}{9}\exp j(3\omega_0 t)+\frac{1}{25}\exp j(5\omega_0 t))$

20.En utilisant la calculatrice graphique, représenter $e(t)$. (Pour le tracé, on prendra $E=1$ et $\omega_0=2\pi$).

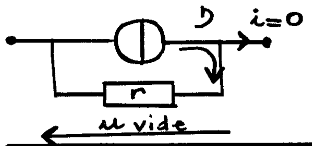
21.Déterminer la tension de sortie pour $m=0,5$ en régime forcé et représenter $s(t)$. Commenter.

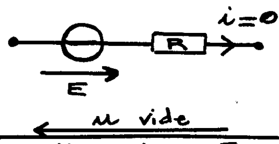
Papier semi-log



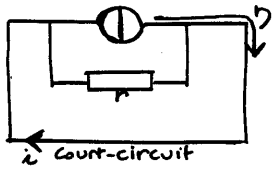
Réponses

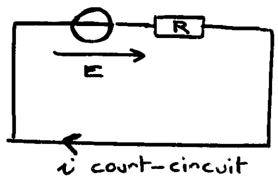
1)





$$\boxed{u_{AB,\text{vide}} = -r\eta \qquad\qquad u_{AB,\text{vide}} = -E}$$





r est court-circuitée
le courant passe totalement
dans le court circuit

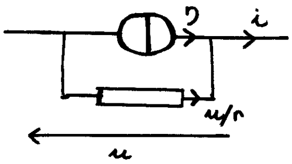
$$\boxed{i_{B\to A,\text{court-circuit}} = \eta \qquad\qquad i_{B\to A,\text{court-circuit}} = \frac{E}{R}}$$

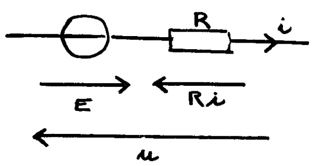
<u>remarque</u> : les générateurs sont équivalents si :

$$\left.\begin{aligned} -r\eta &= -E \\ \eta &= \frac{E}{R} \end{aligned}\right\} \quad r = R = \frac{E}{\eta}$$

---

2) Loi d'ohm (en "<u>convention" récepteur</u>)





$$\boxed{i = \eta + \frac{u}{r} \qquad\qquad u = -E + Ri}$$

<u>remarque</u> : en faisant $u=0$ on retrouve les courants de court-circuit
en faisant $i=0$ on retrouve les tensions à vide

---

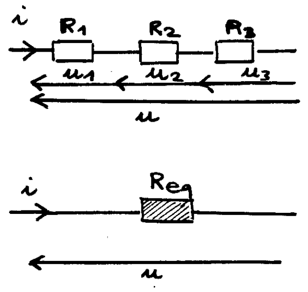
3) Donc

$$\left.\begin{aligned} u &= ri - r\eta \\ \text{et} \quad u &= Ri - E \end{aligned}\right\} \quad \underline{\forall i \ \forall u}$$

$$\boxed{r = R = \frac{E}{\eta}}$$

---

4)



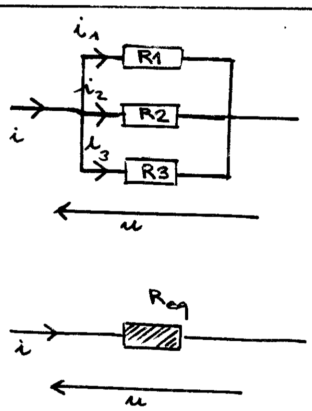
Même intensité dans chaque R_i

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$
$$= R_1 i + R_2 i + R_3 i$$
$$u = R_{eq}\, i$$

donc

$$\boxed{R_{eq} = \sum_i R_i}$$

5)



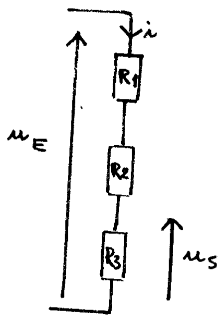
Même tension aux bornes de chaque R_i

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$
$$= G_1 u + G_2 u + G_3 u$$
$$i = G_{eq}\, u$$

donc

$$\boxed{G_{eq} = \sum_i G_i}$$

6)

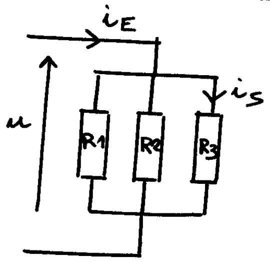


$$\left.\begin{aligned} u_S &= R_3\, i \\ u_E &= \sum_i R_i\, i \end{aligned}\right\}\ \text{le même } i$$

$$\boxed{\frac{u_S}{u_E} = \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3}}$$

(diviseur de tension)

7)



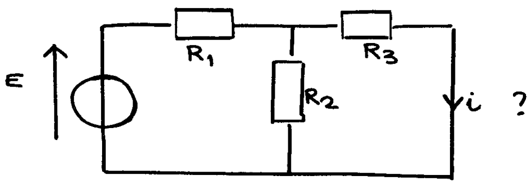
$$\left.\begin{aligned} i_S &= G_3\, u \\ i_E &= \sum_i G_i\, u \end{aligned}\right\}\ \text{le même } u$$

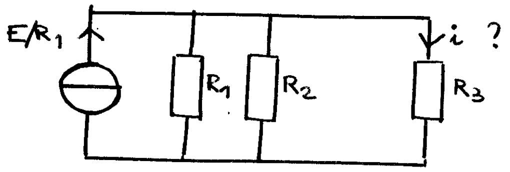
$$\boxed{\frac{i_S}{i_E} = \frac{G_3}{G_1+G_2+G_3}}$$

(diviseur de courant)

8) résistances en T et générateur de tension

$\longrightarrow$ courant de court circuit :





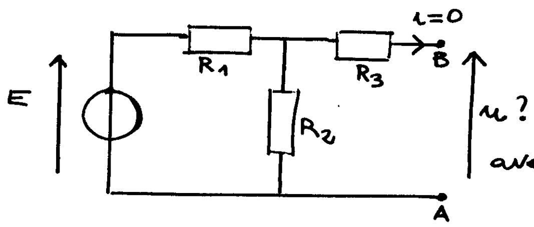
(transformation thévenin → norton)

$$\boxed{i = \frac{1/R_3}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}\, E/R_1}$$

(diviseur de courant)

$$i = \frac{R_2 E}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}$$

→ tension à vide :



avec $u = u_{BA}$ (convention générateur)

Pas de chute de tension dans R_3

$$\boxed{u = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E}$$

(diviseur de tension)

→ $i = I_{NORTON}$

$u = E_{THEVENIN}$

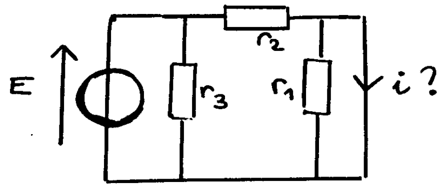
$$R_{interne} = \frac{E_{THEVENIN}}{I_{NORTON}}$$

$$R_{interne} = \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\boxed{R_{interne} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

résistances en π et générateur de tension.

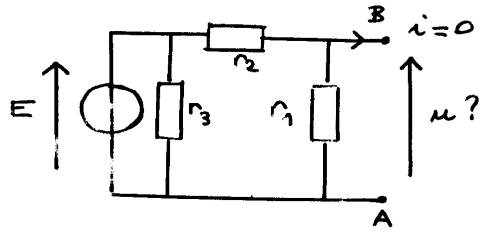
→ courant de court-circuit :



- pas de courant dans r_1 (l'intensité passe dans le court-circuit)
- r_3 ne change rien (la tension aux bornes de r_3 vaut E)

$$\boxed{i = \frac{E}{r_2}}$$

→ tension à vide



La tension E se divise entre r_1 et r_2

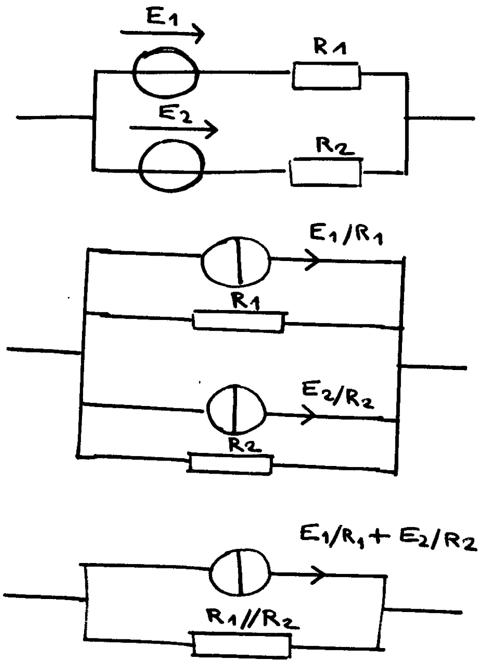
$$\boxed{u = \frac{r_1}{r_1+r_2}\,E}$$ (diviseur de tension)

→ $$R_{interne} = \frac{E_{THEVENIN}}{\eta_{NORTON}}$$

$$= \frac{(r_1/r_1+r_2)E}{(1/r_2\ )E}$$

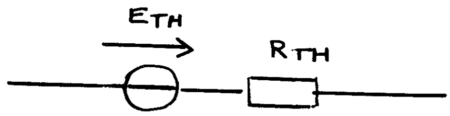
$$\boxed{R_{interne} = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}}$$

9)



(avec $R_1 // R_2 = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$)

On repasse en thévenin



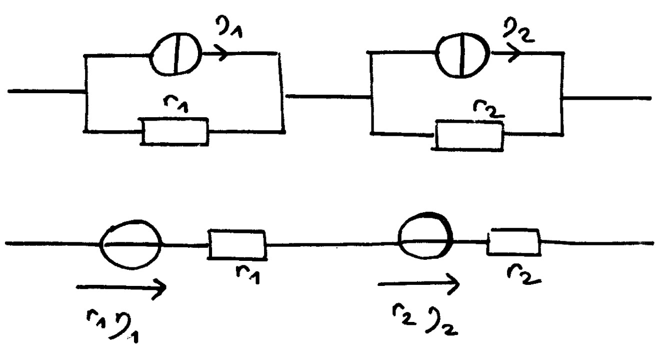
avec $R_{TH} = R_1 // R_2$

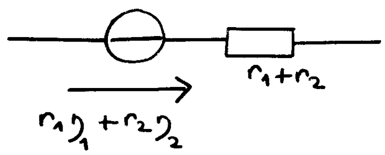
$$E_{TH} = \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\right) R_1 // R_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_{TH} &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\ E_{TH} &= \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2} \end{aligned}}$$

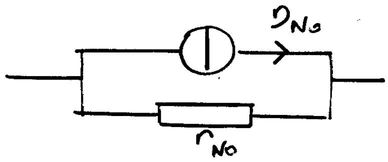
---

10)





On repasse en norton

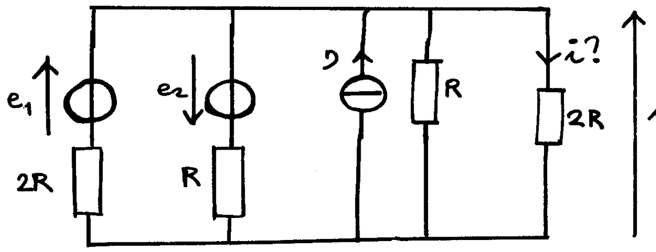


avec

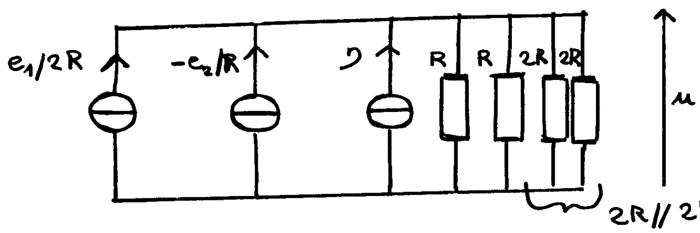
$$\boxed{\begin{aligned} r_{No} &= r_1+r_2 \\ \eta_{No} &= \frac{r_1\eta_1+r_2\eta_2}{r_1+r_2} \end{aligned}}$$

---

11) première méthode : successivement par exemple



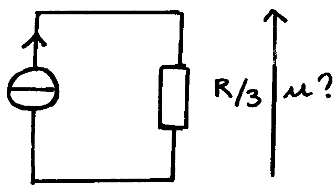
(alors $i = \frac{u}{2R}$)



$2R // 2R = R$

$R // R // R = R/3$

$\left(\frac{e_1}{2R} - \frac{e_2}{R} + \eta\right)$



donc $$u = \frac{R}{3}\left(\frac{e_1}{2R} - \frac{e_2}{R} + \eta\right)$$

$$\boxed{u = \frac{e_1}{6} - \frac{e_2}{3} + \frac{R\eta}{3}}$$

deuxième méthode :

On appelle $u = V_A - V_B$

et on compte positivement les courants arrivant en A

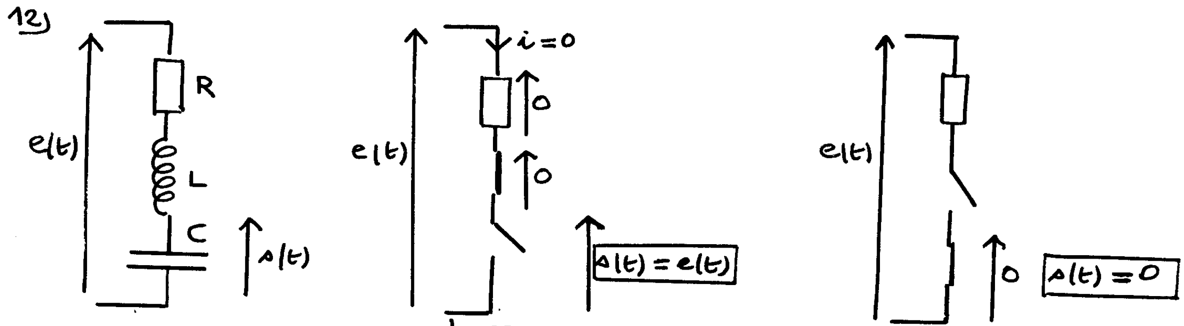
$$\sum i = 0$$

$$\boxed{\frac{-u+e_1}{2R} + \frac{-u-e_2}{R} + \frac{-u}{R} + \eta + \frac{-u}{2R} = 0}$$

on retrouve la même chose.

---

12)



basse fréquence $\omega = 0$

donc $jL\omega = 0$

$\frac{1}{jC\omega} = \infty$

haute fréquence $\omega = \infty$

donc $jL\omega = \infty$

$\frac{1}{jC\omega} = 0$

Il s'agit donc d'un <u>filtre passe-bas</u> (du deuxième ordre)

---

13) Diviseur de tension

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R}$$

$$= \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Par identification, on a donc :

→ $\boxed{H_0 = 1}$

→ $x^2 = \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} = LC\omega^2$ d'où : $\boxed{\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}}$

→ $2mx = 2m\dfrac{\omega}{\omega_0} = RC\omega$ d'où : $2m = RC\omega_0$

$\boxed{2m = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$

remarque : résultat connu.

Pour un RLC série

$Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0}$ (avec $Q = \dfrac{1}{2m}$)

---

14) $G = |\underline{H}|$

→ $\boxed{G = \dfrac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4m^2x^2}}}$

→ maximum de G quand le dénominateur est minimal

Posons

$D = (1-u)^2 + 4m^2u$ (avec $u = x^2 \geq 0$)

$\dfrac{dD}{du} = -2(1-u) + 4m^2$

extremum si $\dfrac{dD}{du} = 0$

soit $u = 1 - 2m^2$

ce qui impose

$m^2 < \dfrac{1}{2}$

$\boxed{m < m_{max} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(inutile d'étudier la dérivée seconde

cf si $u \to \infty$ $D \to \infty$ donc c'est bien un minimum pour D)

→ $x_r = \sqrt{1-2m^2}$

$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2m^2}}$

$= \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$

---

15)

→ asymptotes $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 - x^2 + j2mx}$

• aux basses fréquences ($x \ll 1$) on sait que :

$$\underline{H} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se comporte} \\ \text{comme}}}{\sim} \frac{H_0}{1}$$

$$G \sim H_0$$

asymptote $\boxed{\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log H_0 \\ G_{dB} &= 0 \end{aligned}}$ pente : 0

• aux hautes fréquences ($x \gg 1$) on sait que :

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{-x^2}$$

$$G \sim \frac{H_0}{x^2}$$

asymptote $\boxed{\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log H_0 - 40 \log x \\ G_{dB} &= \qquad\qquad - 40 \log \frac{\omega}{\omega_0} \end{aligned}}$ pente : -40 dB/décade

→ en $x = 1$ $\underline{H} = \dfrac{H_0}{j2m}$

$$G = \frac{H_0}{2m}$$

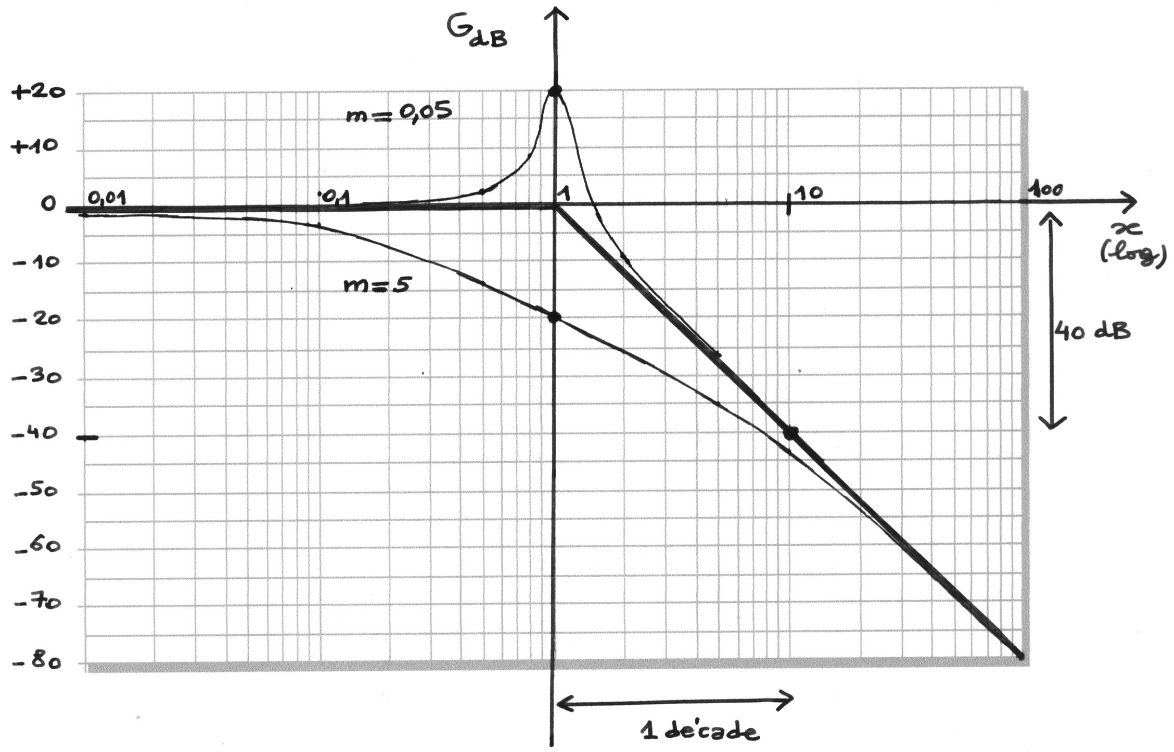
$$\boxed{\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log H_0 - 20 \log(2m) \\ G_{dB} &= -20 \log(2m) \end{aligned}}$$

A.N.

$m = 0{,}05$ $G_{dB} = -20 \log(0{,}1) = \underline{20\,dB}$

$m = 5$ $G_{dB} = -20 \log(10) = \underline{-20\,dB}$

→ diagramme de Bode.



---

16) $\longrightarrow$ si $G = \dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}}$

$$G_{dB} = \underbrace{20 \log G_{max}}_{G_{max\,dB}} - \underbrace{20 \log \sqrt{2}}_{= -10 \log 2}$$

$$\log 2 = 0{,}30103$$

$$= -3{,}0$$

$$\boxed{G_{dB} = G_{max\,dB} \underbrace{- 3{,}0}}$$

La bande passante est bien définie à -3 dB

$\longrightarrow$ Dans le cas du passe-bas du second ordre, ω_0 n'est pas tout à fait la pulsation de coupure sauf si on a :

$$G_{(x=1)} = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

soit $\frac{1}{2m} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{m = 1/\sqrt{2}}$$

---

17) $\longrightarrow$ $W = \frac{1}{2} C u^2 + \frac{1}{2} L i^2$ avec $i = C \frac{du}{dt}$

$$= \frac{1}{2} C U_m^2 \cos^2(\omega t - \varphi) + \frac{1}{2} L C^2 \omega^2 U_m^2 \sin^2(\omega t - \varphi)$$

$$\boxed{W_{(t)} = \frac{1}{2} C U_m^2 \left(\cos^2(\omega t - \varphi) + LC\omega^2 \sin^2(\omega t - \varphi) \right)}$$

si $\omega = \omega_0$ (avec $LC\omega_0^2 = 1$)

$$\boxed{W_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{2} C U_m^2 \quad \text{indépendant de } t}$$

$\longrightarrow$ $\langle W \rangle = \frac{1}{2} C U_m^2 \left(\frac{1}{2} + LC\omega^2 \frac{1}{2} \right)$

$$\boxed{\langle W \rangle = \frac{1}{4} C U_m^2 (1 + LC\omega^2)}$$

$$\Delta W = \int_0^T R i^2 \, dt$$

$$= R C^2 \omega^2 U_m^2 \underbrace{\int_0^T \sin^2(\omega t - \varphi) \, dt}_{\frac{1}{2} T}$$

$$\boxed{\Delta W = R C^2 \omega U_m^2 \pi}$$

$$\frac{\langle W \rangle}{\Delta W} = \frac{1 + LC\omega^2}{4\pi RC\omega}$$

$$= \frac{1 + x^2}{4\pi \times 2m x}$$

$$= \frac{1}{8\pi m} \left(\frac{1}{x} + x \right)$$

$$\boxed{\frac{\langle W \rangle}{\Delta W} = \frac{1}{8\pi m} \left(\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0} \right)}$$

$\longrightarrow$ Pour $\omega = \omega_0$, W est indépendant de t et de plus :

$$\frac{W}{\Delta W} = \frac{1}{4\pi m}$$

on trouve bien :

$$Q = 2\pi \frac{\langle W \rangle}{\Delta W} = \frac{1}{2m}$$

---

18) équation différentielle : on part de

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\,2m\frac{\omega}{\omega_0}}$$

on pose $p = j\omega$

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{H_0}{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2} + 2m\frac{p}{\omega_0}}$$

$$\frac{p^2\underline{s}}{\omega_0^2} + \frac{2m\,p\,\underline{s}}{\omega_0} + \underline{s} = H_0\,\underline{e}$$

$$\boxed{p^2\underline{s} + 2m\omega_0\,p\,\underline{s} + \omega_0^2\,\underline{s} = H_0\,\omega_0^2\,\underline{e}}$$

d'où l'équa diff associée (cf $j\omega \leftrightarrow \frac{d}{dt}$)

$$\boxed{\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2\,s(t) = H_0\,\omega_0^2\,e(t)}$$

(ici : $H_0 = 1$)

Si on résout l'équation caractéristique, on obtient

- si $m>1$ $\quad r = -m\omega_0 \pm \sqrt{m^2-1}\,\omega_0$

  deux racines réelles négatives donc e^{r_1t} et $e^{r_2t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

- si $m<1$ $\quad r = -m\omega_0 \pm j\sqrt{1-m^2}\,\omega_0$

  L'exponentielle $e^{-m\omega_0 t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc le régime transitoire converge vers 0.

---

19) Pour $t>0$

$$\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{ds}{dt} + \omega_0^2\,s = H_0\,\omega_0^2\,E}$$

$\longrightarrow$ si $m<1$

$$s = \underset{\uparrow 1}{H_0}\,E + e^{-m\omega_0 t}\left(A\cos(\underbrace{\sqrt{1-m^2}\,\omega_0}_{\Omega}t) + B\sin(\underbrace{\sqrt{1-m^2}\,\omega_0}_{\Omega}t)\right)$$

Les conditions initiales sont $u_C = s = 0$ et $i = C\dfrac{du_C}{dt} = 0$

soit pour $s = 0$ en $t = 0$:

$$\underline{0 = E + A}$$

et

$$\frac{ds}{dt} = -m\omega_0\, e^{-m\omega_0 t}\left(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t\right) + \Omega\, e^{-m\omega_0 t}\left(-A \sin \Omega t + B \cos \Omega t\right)$$

donc $\dfrac{ds}{dt} = 0$ en $t = 0$

$$\underline{0 = -m\omega_0 A + \Omega B}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= -E \\ B &= -\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\,E \end{aligned}}$$

$$\boxed{s = E\left(1 - e^{-m\omega_0 t}\left(\cos\left(\sqrt{1-m^2}\,\omega_0 t\right) + \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \sin\left(\sqrt{1-m^2}\,\omega_0 t\right)\right)\right)}$$

$\longrightarrow$ si $m > 1$

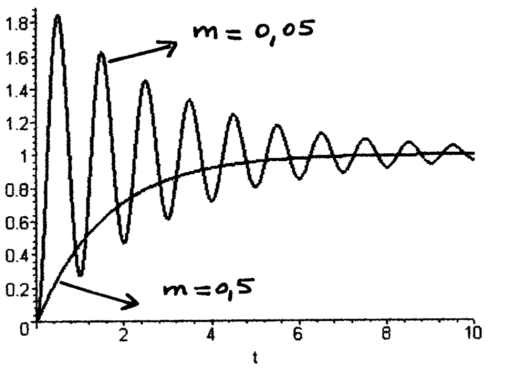
$$s = \underset{1}{\underset{\uparrow}{H_0}}E + e^{-m\omega_0 t}\left(A\, \mathrm{ch}\big(\underbrace{\sqrt{m^2-1}\,\omega_0}_{\Omega}\, t\big) + B\, \mathrm{sh}\big(\underbrace{\sqrt{m^2-1}\,\omega_0}_{\Omega}\, t\big)\right)$$

conditions initiales :

$$\underline{0 = E + A}$$

$$\underline{0 = -m\omega_0 A + \Omega B}$$

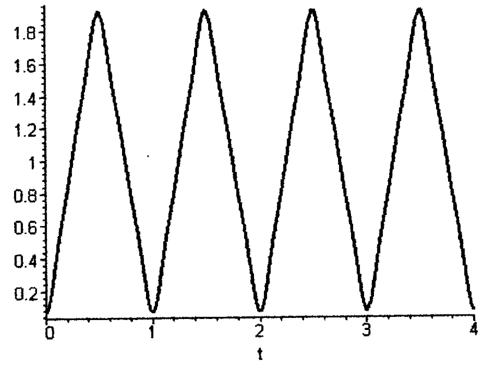
$$\boxed{s = E\left(1 - e^{-m\omega_0 t}\left(\mathrm{ch}\left(\sqrt{m^2-1}\,\omega_0 t\right) + \frac{m}{\sqrt{m^2-1}}\, \mathrm{sh}\left(\sqrt{m^2-1}\,\omega_0 t\right)\right)\right)}$$



2°) $\underline{e}(t) = E - \frac{8E}{\pi^2}\left(\exp(j\omega_0 t) + \frac{1}{9}\exp(3j\omega_0 t) + \frac{1}{25}\exp(5j\omega_0 t)\right)$

il s'agit du début du développement d'une fonction triangle.

On prend la partie réelle et on fait le graphe.



Pour trouver $\underline{s}(t)$ on a besoin de fonction de transfert pour

$\omega = 0 \quad \underline{H}(\omega=0) = \underline{H}(x=0) = 1$

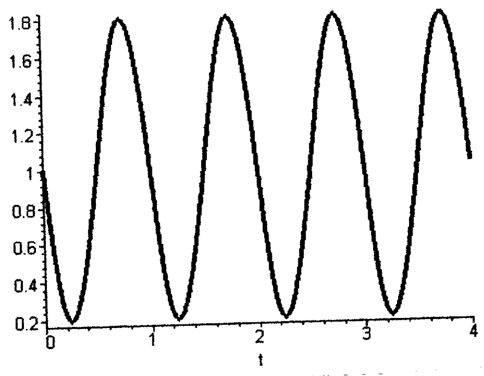
$\omega = \omega_0 \quad \underline{H}(\omega=\omega_0) = \underline{H}(x=1) = \frac{1}{j2m}$

$\omega = 3\omega_0 \quad \underline{H}(\omega=3\omega_0) = \underline{H}(x=3) = \frac{1}{-8+j6m}$

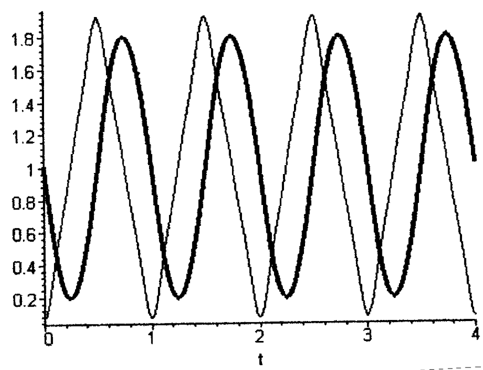
$\omega = 5\omega_0 \quad \underline{H}(\omega=5\omega_0) = \underline{H}(x=5) = \frac{1}{-24+j10m}$

$$\underline{s}(t) = \underline{H}(x=0)\,E - \frac{8E}{\pi^2}\Big(\underline{H}(x=1)\exp(j\omega_0 t) + \underline{H}(x=3)\,\frac{1}{9}\exp(3j\omega_0 t) + \underline{H}(x=5)\,\frac{1}{25}\exp(5j\omega_0 t)\Big)$$

on prend la partie réelle et on fait le graphe.



On retrouve le continu (valeur moyenne) et essentiellement le fondamental (ou premier harmonique) d'où l'allure plus sinusoïdale de $s(t)$.



La sortie semble en retard d'un quart de période

(cf $\underline{H}$ pour l'harmonique 1 $= \frac{1}{j2\pi} = \frac{1}{j} = \exp(-j\pi/2)$)