# DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

**calculatrice: autorisée**

**durée: 4 heures**

## Sujet

# Décomposition thermique de $PCl_5$

Le pentachlorure de phosphore se décompose selon la réaction suivante:

$PCl_5(g) = PCl_3(g) + Cl_2(g)$

Tous les composés sont ici gazeux et supposés parfaits. On notera $K°$ la constante de cet équilibre, qui vaut $1{,}85$ à la température de $525\,K$. On notera $P°$ la pression standard.

## A. Cas N° 1

On met dans une enceinte, initialement vide, à $T = 525\,K$ maintenue constante, une mole de $PCl_5$ sous la pression totale maintenue constante $P_{tot} = 2\text{ bar}$.

1. Déterminer l'équation, sous forme littérale, donnant l'avancement $\xi$ de la réaction à l'équilibre sous la forme $K° = f_1(\xi)$ (les autres grandeurs connues du problème peuvent intervenir).

2. Application numérique: calculer $\xi$.

## B. Cas N° 2

Dans une enceinte initialement vide maintenue à $T = 525\,K$, on place une mole de $PCl_5$. Le volume de l'enceinte est constant et tel qu'avant toute réaction on a $P_{tot}(0) = 2\text{ bar}$.

3. Déterminer l'´équation donnant l'avancement $\xi$ de la réaction à l'équilibre sous la forme $K° = f_2(\xi)$.

4. Exprimer la pression finale $P_{tot}(\xi)$ du système en fonction de cet avancement.

5. Application numérique: calculer $\xi$ et $P_{tot}(\xi)$.

## C. Cas N° 3

On met dans une enceinte initialement vide maintenue à $T = 525\,K$ une mole de $PCl_5$ et une mole d'argon, gaz inerte, sous une pression totale maintenue constante valant $P_{tot} = 2\text{ bar}$.

6. Déterminer l'équation donnant l'avancement $\xi$ de la réaction à l'équilibre sous la forme $K° = f_3(\xi)$.

7. Application numérique: calculer $\xi$.

## D. Conclusion

Regrouper dans un tableau les avancements et les pressions à l'équilibre (en bar) correspondants aux 3 cas précédents. Donner une interprétation physique des évolutions.

# Accéléromètre

## I. Condensateur plan

### A. Nappe plane de charge volumique

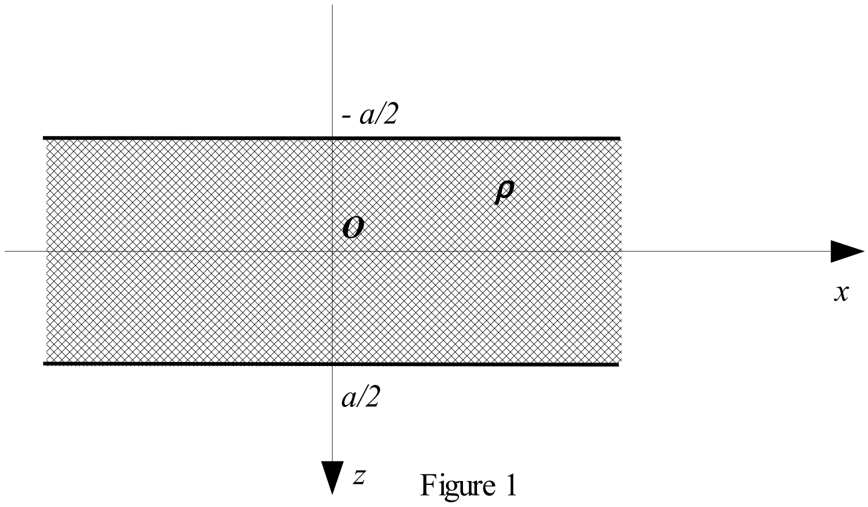



Figure 1

On considère une distribution de charge volumique uniforme et constante de densité $\rho$ entre les plans $z=-a/2$ et $z=a/2$ et nulle pour $|z|>a/2$ (voir figure 1).

1. Par une analyse précise des symétries:
   - déterminer la direction de $\vec{E}$ et justifier que ce champ n'est fonction que de la variable $z$ .
   - montrer également par un argument de symétrie que le champ est nul en $z=0$ .
   - étudier la parité de $E(z)$ , composante scalaire de $\vec{E}$ .
2. Écrire l'équation de Maxwell-Gauss et l'équation différentielle vérifiée par $E(z)$ pour chacune des trois régions:
   - $z>a/2$
   - $-a/2<z<a/2$
   - $z<-a/2$
3. Justifier que le champ $\vec{E}$ est continu au passage par les interfaces $z=-a/2$ et $z=a/2$ et déterminer $E(z)$ en tout point. Représenter $E(z)$ (pour le graphe, on supposera $\rho>0$ ).
4. On fait alors le passage à la limite suivant: $a\rightarrow 0$ , $\rho\rightarrow\infty$ , le produit $\rho\, a$ restant constant (voir figure 2).
   - Montrer que la distribution de charge est alors celle d'un plan chargé par une densité de charge surfacique $\sigma$ dont on donnera l'expression.
   - Que devient l'expression de $\vec{E}$ (en fonction de $\sigma$ ).

5. Écrire la relation de passage pour $\vec{E}$ à la traversée d'une surface chargée et la vérifier ici, avec précision, pour $\vec{E}(z=0^{+})-\vec{E}(z=0^{-})$ .

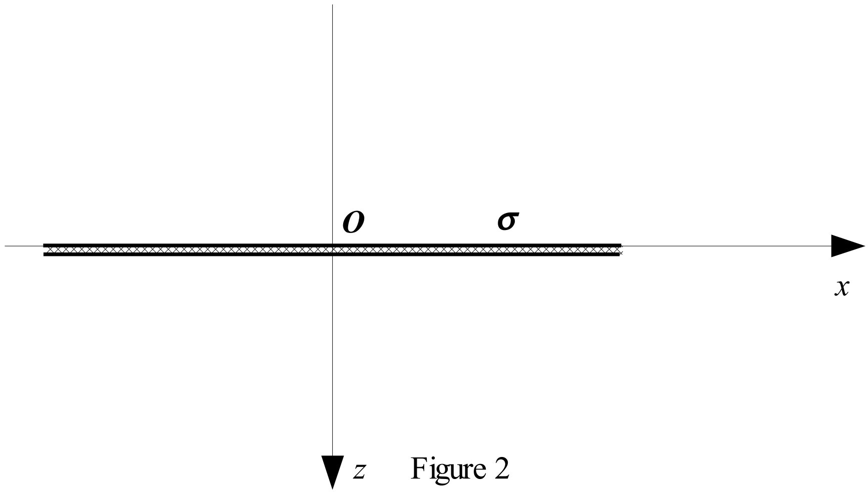



Figure 2

## B. Condensateur

Un condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques chargées sur les surfaces en vis-à-vis. On a donc à considérer deux plans chargés: un plan illimité (de l'armature 0) en $z=0$ chargé par une densité uniforme surfacique: $\sigma$ et un plan illimité (de l'armature 1) en $z=e$ chargé par une densité uniforme surfacique: $-\sigma$ . L'espace entre les deux armatures est assimilable au vide (voir figure 3).

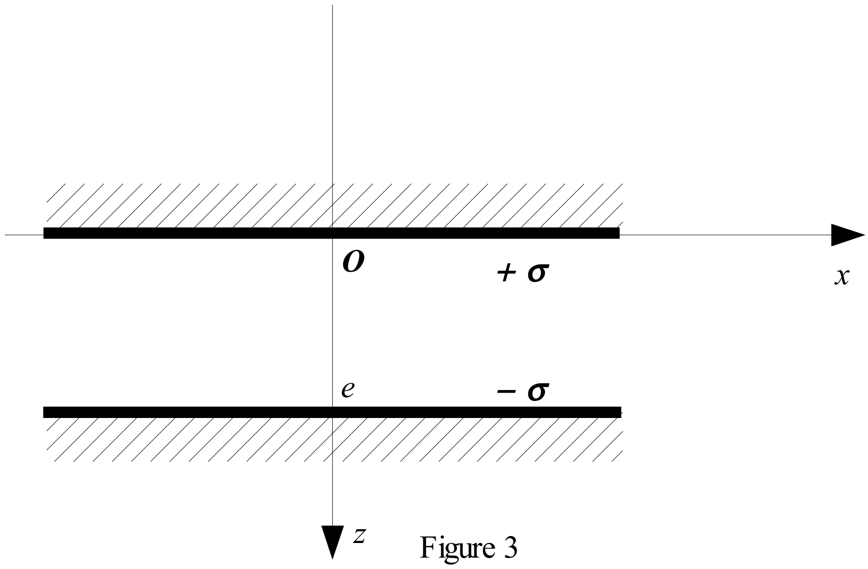



Figure 3

### *1) Champ*

On se propose de déterminer le champ électrique total.

6. En utilisant les résultats des questions précédentes et en travaillant par superposition, montrer, de façon précise, que pour $0<z<e$ on a $\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$ et que pour $z<0$ et pour $z>e$ , le champ est nul.

*2) Potentiel*

On rappelle que le potentiel est continu à la traversée d'une surface chargée.

7. Donner l'expression du potentiel $V(z)$ en tout point entre les deux armatures (à une constante arbitraire près que l'on désignera par une lettre quelconque). Exprimer la différence de potentiel $V(z=e)-V(z=0)$ .

8. Que vaut le potentiel dans la région $z<0$ (armature 0). Que vaut le potentiel dans la région $z>e$ (armature 1).

9. Tracer la courbe donnant $V(z)$ (pour ce graphe, on supposera $\sigma>0$ ).

*3) Capacité*

En réalité la surface chargée de chaque armature est finie de valeur $S$ . Les résultats précédents s'appliquent si l'on peut négliger les effets de bords, ce que l'on admettra ici.

10. Déterminer la charge totale de l'armature 0 située en $z=0$ en fonction de $\varepsilon_0, S, e, V(z=0)-V(z=e)$ . Déterminer de même la charge totale de l'armature 1 située en $z=e$ en fonction de $\varepsilon_0, S, e, V(z=e)-V(z=0)$ .

11. Exprimer la capacité $C$ du condensateur plan en fonction de $\varepsilon_0, S, e$ .

*4) Force*

On pose désormais: $U=V(z=e)-V(z=0)$ .

Soit un élément de surface $dS$ de la surface de l'armature 0 placée en $z=0$ du condensateur . On désigne par $dq$ la charge élémentaire de $dS$ .Cette charge subit les effets du champ créé par l'armature 1.

12. Exprimer la force élémentaire $\overrightarrow{dF}$ subie par $dS$ sachant que cette force est due au champ créé par la seule armature 1.

13. Donner l'expression de la force vectorielle $\vec{F}$ subie par l'armature 0 en fonction de $\varepsilon_0, S, e, U$ . Devait-on s'attendre à une force d'attraction ou de répulsion entre les deux plaques? Commenter. Vérifier le sens obtenu pour la force.

# II. Équilibre d'une armature de condensateur suspendue à un ressort

L'armature 0, de masse $m$ est mobile. Elle peut se translater dans la direction $Oz$ . Sa position est repérée par $z$ . Elle est soutenue par un ressort de constante de raideur $k$ et de longueur à vide $\ell_0$ . L'autre extrémité du ressort est fixée sur l'armature 1 fixe (voir figure 4). L'accélération de la pesanteur est $\vec{g}=g\,\vec{u}_z$ .

L'armature 0 est maintenue à un potentiel nul et l'armature 1 fixe est portée au potentiel $U$ . En l'absence de tension ( $U=0$ ) et à l'équilibre, la distance des armatures est $e$ .

Lorsque $U$ est différent de zéro, la norme de la résultante des forces électrostatiques qui agissent sur l'armature mobile s'écrit : $F_{el}=K\dfrac{U^2}{d^2}$ où $K$ est une constante positive et $d$ désigne la distance entre les deux armatures (un système de butée empêche les armatures d'entrer en contact).

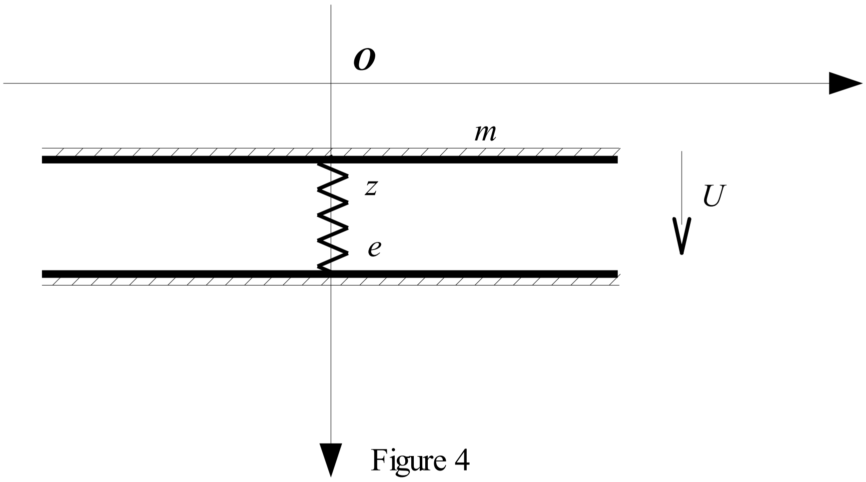



Figure 4

14. Donner l'expression de la force vectorielle exercée par le ressort sur la plaque mobile en fonction de $z$ et des autres données.

15. Écrire le théorème de la résultante cinétique pour la plaque 0 en mouvement lorsque la tension vaut $U$ .

16. En tenant compte de la relation d'équilibre lorsque $U=0$ , simplifier l'équation précédente et montrer que le mouvement de la plaque s'effectue sous l'action de deux forces: la première de norme $F_{el}$ et la deuxième $\vec{F}_r$ de norme $F_r$ due à la présence du ressort.

17. Écrire l'équation donnant la position d'équilibre de l'armature mobile en présence de $U$ .

18. On donne ci-dessous (voir figure 5) l'allure des courbes représentant les évolutions de $F_{el}$ et $F_r$ en fonction de $z$ en envisageant des cas différents pour $F_{el}$ .

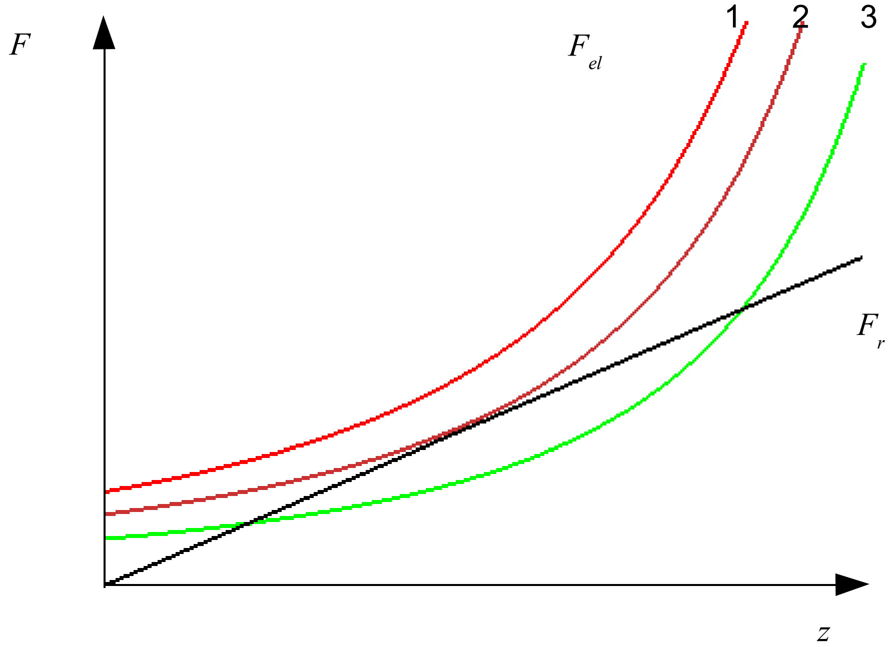



Figure 5

- Pour chacune des courbes discuter l'existence de position(s) d'équilibre.
- Par un raisonnement graphique, déterminer la stabilité de(s) position(s) d'équilibre (une position d'équilibre est stable si pour $z$ légèrement supérieur à $z_{équilibre}$ et si pour $z$ légèrement inférieur à $z_{équilibre}$ , les forces qui apparaissent font revenir le système vers sa position d'équilibre).

## III. Accéléromètre électrostatique

### A. Structure électrostatique du capteur

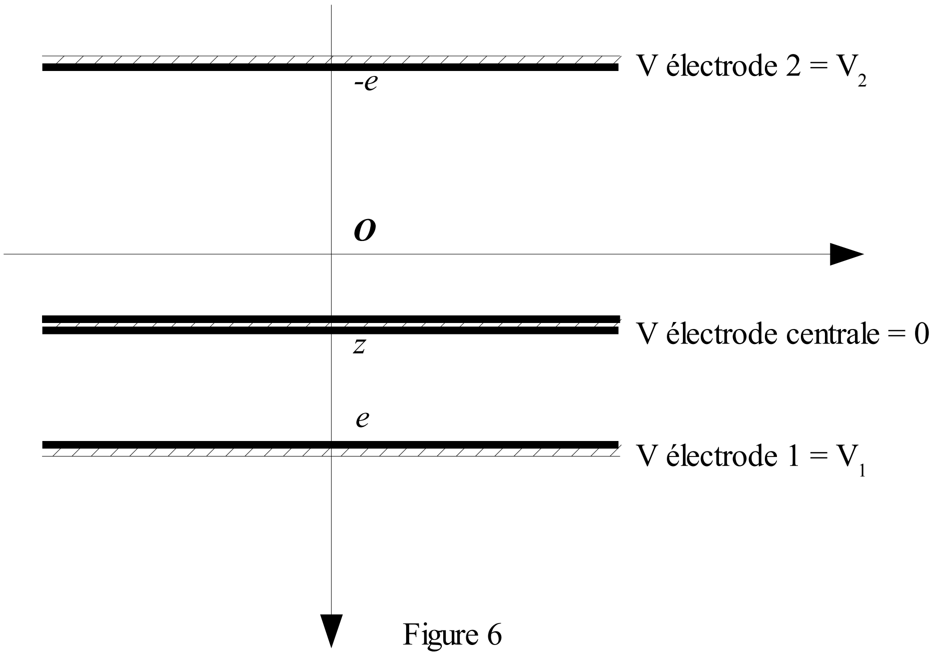



Figure 6

Ce capteur est constitué d'une armature ou électrode mobile réalisée dans un matériau conducteur. Les armatures inférieure et supérieure sont reliées à des générateurs de tensions respectives $V_1$ et $V_2$ (voir figure 6). L'armature centrale est maintenue à un potentiel nul.

L'association de l'électrode 1 et de l'électrode centrale se comporte comme un condensateur de capacité variable $C_1$ dont la variation est directement reliée au déplacement de l'électrode. Idem pour l'ensemble électrode 2 et l'électrode centrale formant un condensateur de capacité variable $C_2$ .

La position de l'électrode centrale est repérée par $z$ . On suppose son épaisseur négligeable. Elle porte donc des charges sur les deux faces. On posera $C_0=\varepsilon_0\dfrac{S}{e}$ .

19.Déterminer $C_1$ et $C_2$ en fonction de $C_0, z, e$ .

20.Charge:

- Exprimer la charge $Q(z)$ totale portée par l'électrode centrale en fonction de $C_0, z, e, V_1, V_2$
- Montrer que, dans l'hypothèse des petits déplacements ( $z \ll e$ ), $Q(z)$ est une fonction

affine de $z$ . Préciser, dans cette hypothèse, le cas $V_2 = -V_1$ .On suppose pour la suite que le signal issu de l'électrode centrale est l'entrée d'un montage convertisseur charge-tension permettant d'obtenir une tension de sortie $V_S$ proportionnelle à la charge $Q$ (voir figure 7). Conclure en donnant la relation entre $V_S$ et $z$ .

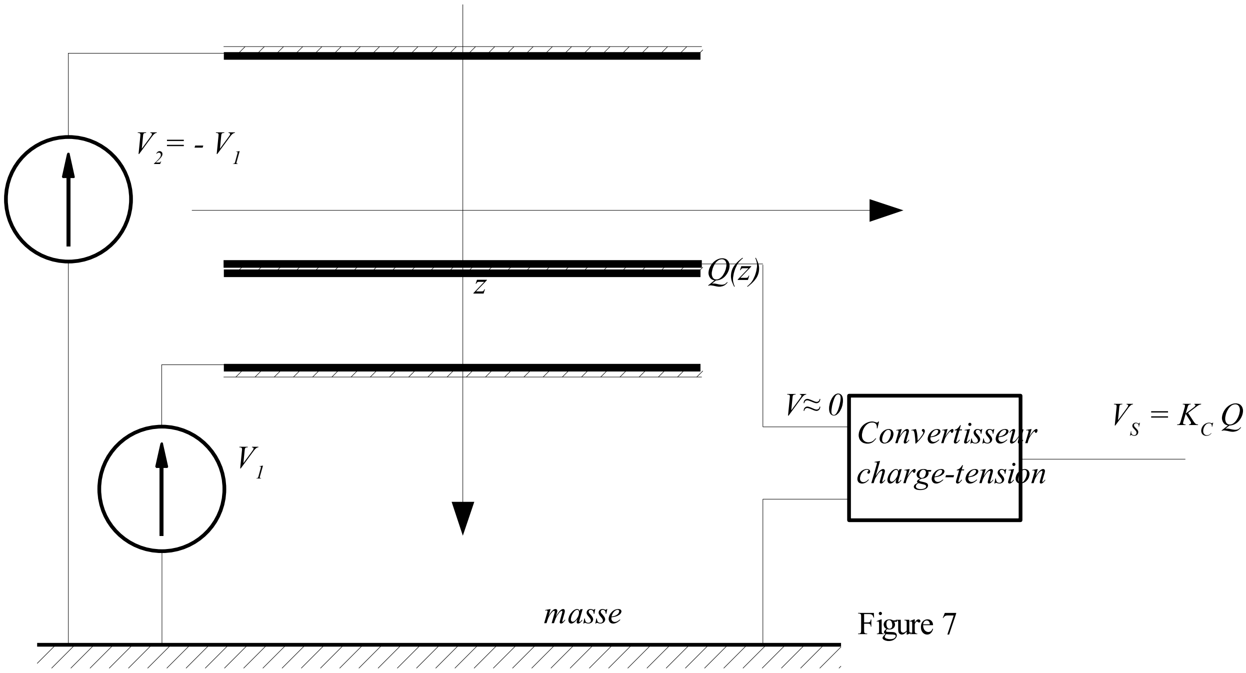


Figure 7

21.Force:

- En utilisant la formule donnée plus haut: $F_{el} = K \dfrac{U^2}{d^2}$ , déterminer la force électrostatique totale $\vec{F}_{électrostatique}$ subie par l'armature mobile.
- Donner son expression pour des petits déplacements. Préciser alors le cas $V_2 = -V_1$ .
- Exprimer l'énergie électrostatique $W_{el}$ stockée par les deux condensateurs et retrouver directement l'expression de la force, dans le cas particulier ci-dessus, sachant qu' à tension constante $\vec{F}_{électrostatique} = +\overrightarrow{grad}\, W_{el}$ .
- L'effet des forces électrostatiques est donc modélisable par: $F_{électrostatique} = k_{el} z$ . Exprimer $k_{el}$ .

**B. Structure mécanique du capteur**

L'objectif est ici de montrer que la mesure d'une accélération peut se ramener à celle d'un déplacement, grandeur bien plus accessible expérimentalement.

C'est par l'intermédiaire d'un système mécanique "masse-ressort-amortisseur" que s'effectue ce lien. On considère une masse $m$ liée à la cage par un ressort de raideur $k$ et un amortisseur de coefficient visqueux $\eta$ , disposés verticalement (voir figure 8) ; seuls les déplacements selon $Oz$ sont envisagés.

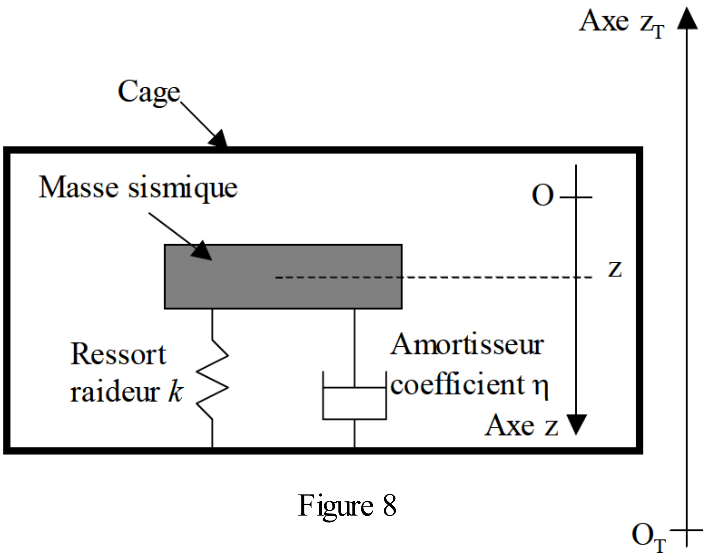



Figure 8

Sous l'effet de l'accélération de la cage, la masse sismique est écartée de sa position d'équilibre. La mesure du déplacement relatif de cette masse sismique renseigne sur la valeur de l'accélération. On notera $\vec{a}_C = a_C \vec{u}_{Z_T}$ l'accélération de la cage mobile dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le dispositif est plongé dans le champ de gravitation terrestre.

O est l'origine du repère lié à la cage et correspond également à la position d'équilibre de la masse sismique en absence d'accélération de la cage et de gravité. Le mouvement de la masse sismique est étudié dans le référentiel de la cage.

22.Exprimer la force d'inertie $\vec{f}_{i,e}$ agissant sur la masse sismique dans le référentiel lié à la cage.

23.Établir l'équation différentielle vérifiée par la cote $z$ en faisant intervenir $a_C$ , $m$ , $k$ et $\eta$ .

24.Donner la fonction de transfert mécanique liant la cote $\underline{z}$ et de l'accélération $\underline{a}_C$ , $\underline{H}(j\omega) = z(j\omega)/a_C(j\omega)$ et la mettre sous la forme canonique. On définira $H_0$ gain statique, $\omega_0$ pulsation propre, $Q$ coefficient de qualité. L'accéléromètre se comporte donc comme un filtre mécanique: quelle est la nature de ce filtre?

25.La masse sismique et l'électrode 0 forment en fait un seul ensemble. Justifier qu'il faut corriger $k$ dans les équations précédentes en tenant compte de $k_{el}$ . Quelle valeur faut-il prendre au lieu de $k$ dans les calculs?

26.En déduire la relation entre $\underline{z}$ et l'accélération $\underline{a}_C$ dans la bande passante.

# Température de surface de la Lune

On se propose d'étudier la température de la surface lunaire. Dans tout le problème, étoile et planètes seront considérées comme des sphères en équilibre thermique, et qui se comportent comme des corps noirs.

Les questions numérotées avec un astérisque (*) sont de type essentiellement qualitatif ; elles demandent peu de calculs, voire pas du tout.

*Données :*

| | |
|---|---|
| Rayon du Soleil : | $R_S = 7 \times 10^5\, km$ |
| Température de surface du Soleil : | $T_S \simeq 5800\, K$ |
| Rayon de la Terre : | $R_T = 6,38 \times 10^3\, km$ |
| Distance Terre - Soleil : | $D_{ST} = 1,5 \times 10^8\, km$ |
| Albédo de la Terre : | $A_T = 0,35$ |
| Rayon de la Lune : | $R_L = 1,74 \times 10^3\, km$ |
| Distance Terre - Lune : | $D_{LT} = 3,84 \times 10^5\, km$ |
| Albédo de la Lune : | $A_L = 0,073$ |
| Constante de Stefan : | $\sigma = 5,7 \times 10^{-8}\, W.m^{-2}.K^{-4}$ |
| Loi de Wien : | $\lambda_m T = 2898\, \mu m.K$ |

## I. Température terrestre

### A. Un modèle bien fruste

On modélise la surface de la Terre par une coquille sphérique de température uniforme, en équilibre thermodynamique : puissance absorbée et puissance émise sont égales.

Soit $P_S$ la puissance totale émise par le Soleil.

1. Exprimer $P_S$ en fonction du rayon solaire $R_S$ et de la température solaire $T_S$ .
2. Exprimer, en fonction de $P_S$ , la puissance $P_0$ reçue par la Terre, à la distance $D_{ST}$ du Soleil, supposé ponctuel.
3. Exprimer alors la température de surface de la Terre, $T_T$ .

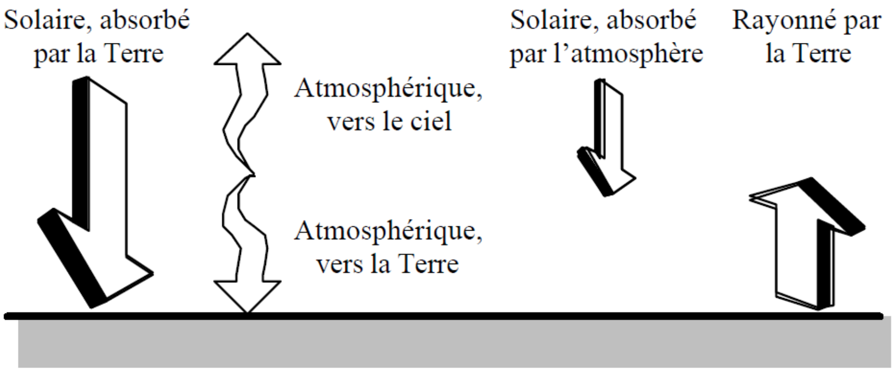
En réalité, la puissance absorbée par la surface de la Terre n'est qu'une fraction de la puissance du rayonnement solaire incident: la surface terrestre réfléchit la fraction $A_T$ , nommée albédo, de ce rayonnement. L'albédo moyen de la Terre est égal à 0,35, ce qui signifie que 65 % du rayonnement solaire incident est absorbé.

4. Établir l'expression de la température de surface de la Terre $T_T$ en fonction de $R_S$ , $D_{ST}$ , $A_T$ et $T_S$ .
5. Calculer alors la valeur numérique de $T_T$ ; ne pas s'offusquer de la valeur trouvée à partir de ce premier modèle.

### B. Influence de l'atmosphère terrestre

L'atmosphère joue un rôle essentiel dans le bilan thermique terrestre. Désormais, on entendra par «Terre» la planète proprement dite, de rayon $R_T$ , entourée d'une pellicule sphérique de gaz, qui constitue l'atmosphère.

L'atmosphère est modélisée par une couche d'épaisseur $e \ll RT$ et de température uniforme $T_a$ ; elle absorbe la fraction $\alpha$ du rayonnement solaire non réfléchi; elle absorbe aussi la totalité du rayonnement du corps noir émis par la surface de la Terre. La Terre absorbe la totalité du rayonnement émis par l'atmosphère vers celle -ci (Figure).




6. (*) À quoi pourrait être due la différence d'absorption de l'atmosphère pour les rayonnements solaire et terrestre ?

Soit $T'_T$ la température superficielle moyenne de la Terre calculée en tenant compte de l'influence de l'atmosphère.

7. Exprimer $P_1$ , puissance solaire absorbée par la surface terrestre ; exprimer $P_2$ , puissance rayonnée par l'atmosphère vers la Terre.

8. Effectuer des bilans thermiques. En déduire $T'_T$ en fonction de $T_T$ et $\alpha$ Application numérique : calculer $T'_T$ pour $\alpha=0{,}35$ (l'égalité $\alpha=A_T$ est fortuite).

9. Montrer que la température de l'atmosphère, $Ta$ , est égale à $T_T$ .

## II. Température lunaire

### A. Température de la surface ensoleillée

L'albédo moyen de la Lune, $A_L$ , est égal à $0{,}073$ :92,7% du flux solaire est absorbé par le sol. On suppose l'albédo uniforme sur toute la surface éclairée.

10. Exprimer et calculer la valeur numérique de la température de surface de la Lune, $T_{L,Soleil}$ , en ne tenant compte que de la présence du soleil.

11. L'hypothèse d'une température uniforme pour la Lune n'est pas conforme à la réalité : la surface lunaire présente de gros écarts de température. C'est l'absence d'atmosphère et la longueur du jour et de la nuit lunaire, qui durent 14 jours terrestres, qui expliquent ces écarts importants de température. On continue ici à ne prendre en compte que la présence du soleil. Les températures sont toujours supposées stationnaires.

   - (*) Représenter sur un schéma la position, par rapport au Soleil, de la zone de températures les plus élevées.

- Effectuer un bilan thermique pour une surface élémentaire de cette zone et en déduire $T_{L,max}$ , la température maximale à la surface de la Lune. La valeur expérimentale est de l'ordre de $120\,°C$ .

**B. Le « clair de Terre ».**

Lorsque l'axe Soleil-Lune est perpendiculaire à l'axe Lune-Terre, on cherche à déterminer la température superficielle de la Lune en un point M éclairé uniquement par la Terre. Ce point reçoit le rayonnement de deux corps noirs de nature différente, celui de l'atmosphère terrestre et celui du Soleil, réfléchi par la Terre. On suppose en première approximation que la réflexion s'effectue de manière isotrope.

12.Évaluer la puissance surfacique sur la surface de la lune, normale à l'axe terre-lune, de chacun de ces rayonnements. Application numérique.

13.Déterminer la température maximale à la surface de la Lune uniquement éclairée par la Terre: $T'_{L,Terre}$ .

14. (*) Comment serait modifiée la température d'un point $M'$ situé dans la zone éclairée par le Soleil si l'on tenait compte également du rayonnement terrestre ?

15. (*) Un instrument situé à la surface de la Lune détecte un rayonnement visible et un rayonnement infrarouge. Indiquer le domaine de longueurs d'onde caractéristique de chacun de ces rayonnements. Le résultat sera donné en micromètres.

16. (*) À quel domaine de longueurs d'onde appartient le rayonnement thermique émis par la Lune ? Quelle est l'origine du rayonnement visible provenant de la Lune ?

**C. Influence de la radioactivité**

La Lune contient des roches radioactives, essentiellement $^{238}U$ et $^{40}K$ . La puissance volumique moyenne libérée par les roches lunaires, $p_L$ , a été évaluée à $10^{-8}\,W.m^{-3}$ .

17.Exprimer la température superficielle de la Lune, $T_{L,Roches}$ , pour les zones à l'ombre du Soleil et de la Terre et en ne tenant compte que de l'apport énergétique radioactif.

18. (*) La radioactivité modifie-t-elle de façon significative la température dans les zones très éclairées ?

## Réponses

### Décomposition thermique de $PCl_5$

1) à pression constante :

| | $PCl_5(g)$ | = | $PCl_3(g)$ | + | $Cl_2(g)$ | moles total gaz |
|---|---|---|---|---|---|---|
| moles initial | $1$ | | $0$ | | $0$ | $1$ |
| moles équilibre | $1-\xi$ | | $\xi$ | | $\xi$ | $1+\xi$ |
| activité | $\frac{1-\xi}{1+\xi}\frac{P}{P^o}$ | | $\frac{\xi}{1+\xi}\frac{P}{P^o}$ | | $\frac{\xi}{1+\xi}\frac{P}{P^o}$ | |

donc

$$K^o = \frac{\frac{\xi}{1+\xi}\frac{P}{P^o}\ \frac{\xi}{1+\xi}\frac{P}{P^o}}{\frac{1-\xi}{1+\xi}\frac{P}{P^o}}$$

$$\boxed{K^o = \frac{\xi^2}{1-\xi^2}\ \frac{P_{tot}}{P^o}}$$

---

2) A.N.

$$1{,}85 = \frac{\xi^2}{1-\xi^2}\ \frac{2}{1}$$

$$\boxed{\xi = 0{,}693 \text{ mol}}$$

---

3) à volume constant :

| | $PCl_5(g)$ | = | $PCl_3(g)$ | + | $Cl_2(g)$ | moles total gaz |
|---|---|---|---|---|---|---|
| moles initial | $1$ | | $0$ | | $0$ | $1$ |
| moles équilibre | $1-\xi$ | | $\xi$ | | $\xi$ | $1+\xi$ |
| activité | $(1-\xi)\frac{RT}{P^oV}$ | | $\xi\frac{RT}{P^oV}$ | | $\xi\frac{RT}{P^oV}$ | |

donc

$$K^o = \frac{\xi\frac{RT}{P^oV}\ \xi\frac{RT}{P^oV}}{(1-\xi)\frac{RT}{P^oV}}$$

$$= \frac{\xi^2}{1-\xi}\ \frac{RT}{P^oV}$$

avec $P_{tot}(0) = 1\ \frac{RT}{V}$

$$\boxed{K^o = \frac{\xi^2}{1-\xi}\ \frac{P_{tot}(0)}{P^o}}$$

---

4) La pression à l'équilibre est

$$P_{tot}(\xi) = (1+\xi)\,\frac{RT}{V}$$

$$\boxed{P_{tot}(\xi) = (1+\xi)\,P_{tot}(0)}$$

---

5) A.N.

$$1{,}85 = \frac{\xi^2}{1-\xi}\,\frac{2}{1}$$

$$\boxed{\xi = 0{,}605 \text{ mol}}$$

$$P_{tot}(\xi) = (1+0{,}605)\,2$$

$$\boxed{P_{tot}(\xi) = 3{,}21 \text{ bar}}$$

---

6) à pression constante, en présence de gaz inerte :

| | $PCl_{5\,(g)}$ = | $PCl_{3\,(g)}$ + | $Cl_{2\,(g)}$ | $Ar_{(g)}$ | moles total gaz |
|---|---|---|---|---|---|
| moles initial | $1$ | $0$ | $0$ | $1$ | $2$ |
| moles équilibre | $1-\xi$ | $\xi$ | $\xi$ | $1$ | $2+\xi$ |
| activité | $\frac{1-\xi}{2+\xi}\frac{P}{P^o}$ | $\frac{\xi}{2+\xi}\frac{P}{P^o}$ | $\frac{\xi}{2+\xi}\frac{P}{P^o}$ | | |

donc

$$K^o = \frac{\left(\frac{\xi}{2+\xi}\frac{P}{P^o}\right)^2}{\left(\frac{1-\xi}{2+\xi}\frac{P}{P^o}\right)}$$

$$\boxed{K^o = \frac{\xi^2}{(1-\xi)(2+\xi)}\,\frac{P_{tot}}{P^o}}$$

---

7) A.N.

$$1{,}85 = \frac{\xi^2}{(1-\xi)(2+\xi)}\,\frac{2}{1}$$

$$\boxed{\xi = 0{,}769 \text{ mol}}$$

---

8) tableau récapitulatif :

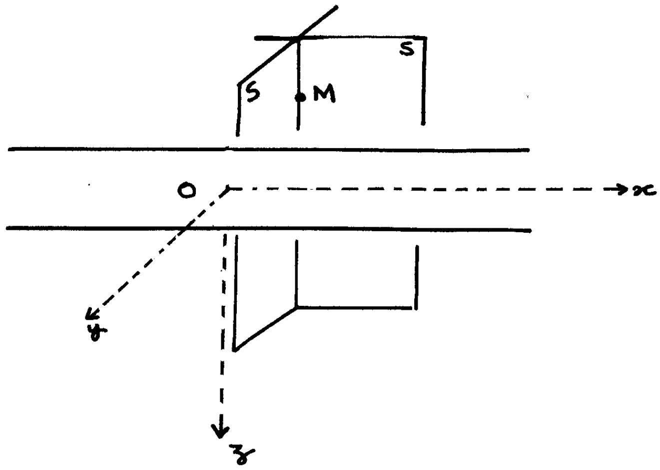
| | $\xi_{équilibre}$ | $P_{équilibre}$ | |
|---|---|---|---|
| à pression cste | 0,693 mol | 2 bar | (1) |
| à volume cst | 0,605 mol | 3,21 bar | (2) |
| à pression cste + gaz inerte | 0,769 mol | 2 bar | (3) |

→ La loi de modération de Le Chatelier prévoit si P augmente une diminution du nombre de moles de gaz.
D'où ici, entre (1) et (2), P augmente et évolution vers la gauche (passage de 2 moles de gaz à 1 seule) soit $\xi$ diminue de 0,693 à 0,605 mol.

→ La loi de modération prévoit que, à P constante, l'ajout d'un gaz inerte déplace l'équilibre vers une augmentation du nombre de moles de gaz (modération face à un effet de "dilution"). Ici, évolution vers la droite entre (1) et (3) (passage d'1 mole de gaz à 2 moles) soit $\xi$ augmente de 0,693 à 0,769 mol.

Accéléromètre

1)




→ • Les plans $Mxz$ et $Myz$ sont des plans de symétrie contenant M donc $\vec{E}(M)$ appartient à l'intersection

donc $\vec{E}(M)$ selon $\vec{u_z}$

• A priori $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$

mais il y a invariance en translation selon $x$ et selon $y$

donc $\vec{E} = \vec{E}(z)$

Finalement $$\boxed{\vec{E} = E(z)\,\vec{u_z}}$$

remarque.

On peut aussi, en vertu des invariances, écrire

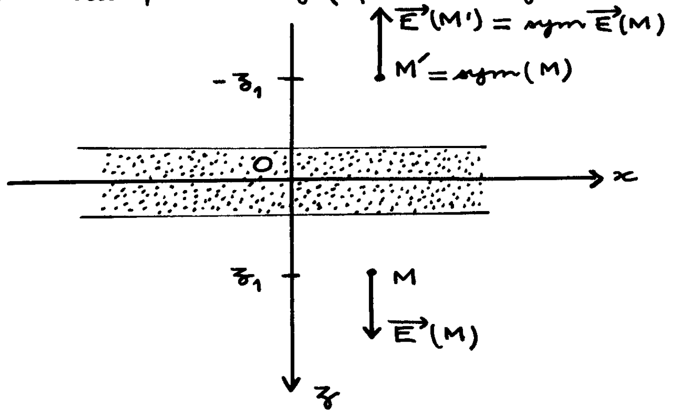
$$V = V(\cancel{x}, \cancel{y}, z)$$

puis
$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$$
$$= -\frac{dV}{dz}\,\vec{u_z}$$
$$= E(z)\,\vec{u_z}$$

→ Si on considère un point M en $z=0$, on doit ajouter un troisième plan de symétrie : le plan Mxy (plan $z=0$)
Le champ doit aussi appartenir à ce plan donc :

$$\boxed{E(z=0) = 0}$$

→ Si on considère $M(z=z_1)$ et $M'(z=-z_1)$ symétriques par rapport au plan Oxy (plan de symétrie de la distribution)




on a donc $\qquad \vec{E}(M') = \text{sym}\,\vec{E}(M)$

$$E(-z_1) = -E(z_1)$$

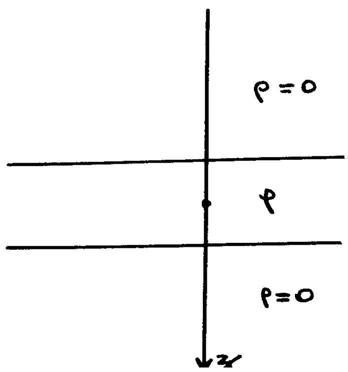
$$\boxed{E(z) \text{ est une fonction impaire de } z}$$

remarque

$E(z)$ étant impaire.
On doit donc avoir $E(z=0)=0$
(démontré directement à la question précédente)

---

2) Maxwell-Gauss :




$$\boxed{z<-\frac{a}{2} \qquad \text{div}\,\vec{E} = 0 \qquad \frac{dE}{dz} = 0}$$

$$\boxed{-\frac{a}{2}<z<\frac{a}{2} \qquad \text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \frac{dE}{dz} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{z>a/2 \qquad \text{div}\,\vec{E} = 0 \qquad \frac{dE}{dz} = 0}$$

3) $\longrightarrow$ <u>En l'absence de charges surfaciques, le champ est continu</u>

$\longrightarrow$ $-\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}$

$$\frac{dE}{dz} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} z + \text{constante}$$

↑ nulle car fonction impaire.

$$\boxed{E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} z}$$

$z > \frac{a}{2}$

$$\frac{dE}{dz} = 0$$

$$E = K$$

Par continuité en $z = \frac{a}{2}$

$$\boxed{E = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}}$$

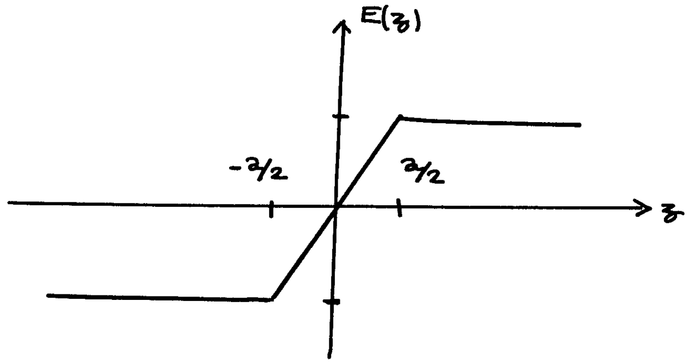
$z < -\frac{a}{2}$

$$\frac{dE}{dz} = 0$$

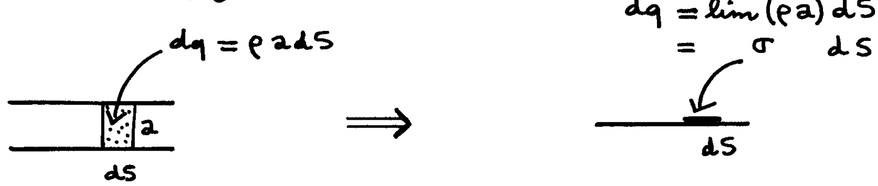
$$\boxed{E = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}}$$

(continuité en $z = -\frac{a}{2}$ ou fonction impaire)

$\longrightarrow$ graphe :




4) Passage à la limite



$a \to 0$ donc la charge se trouve alors en surface.

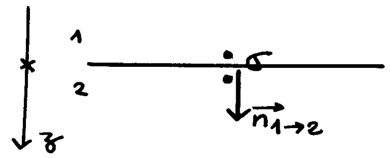
On aura $\boxed{\sigma = \lim (\rho a)}$

Expression de $\vec{E}$ en remplaçant $\rho a$ par $\sigma$

$$\boxed{\begin{array}{l} z > 0 \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} \\ z < 0 \quad \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} \\ z = 0 \quad \vec{E} \text{ non défini} \end{array}}$$

---

5) Discontinuité




$$\vec{E_2} - \vec{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$$

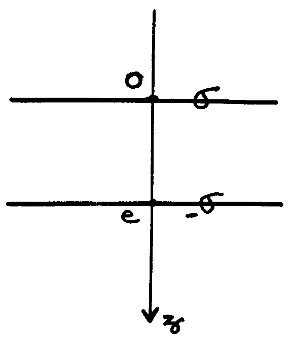
Ici

$$\boxed{\underbrace{\vec{E}_{(z=0+)}}_{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}} - \underbrace{\vec{E}_{(z=0^-)}}_{-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z}}$$

L'expression donnant la discontinuité est effectivement vérifiée.

---

6)




| champ dû à la plaque σ | champ dû à la plaque -σ | champ total |
|---|---|---|
| $-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$ | $-\frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$ | $\boxed{z<0 \quad \vec{E} = \vec{0}}$ |
| $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$ | $-\frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$ | $\boxed{0<z<e \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z}}$ |
| $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$ | $\frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$ | $\boxed{z>e \quad \vec{E} = \vec{0}}$ |

---

7)
$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$$
$$E_{(z)} = -\frac{dV}{dz}$$
$$\int dV = \int -E_{(z)}\, dz$$

Pour $0 < z < e$

$$V = \int -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\, dz$$
$$\boxed{V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z + K'}$$

$$V_{(z=e)} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} e + K'$$
$$V_{(z=0)} = K'$$

donc

$$\boxed{V_{(z=e)} - V_{(z=0)} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} e}$$

---

8) $z < 0$

$$\vec{E} = \vec{0}$$
$$V = \text{constante}$$ et par continuité avec la région $0 < z < e$
$$\boxed{V = K'}$$

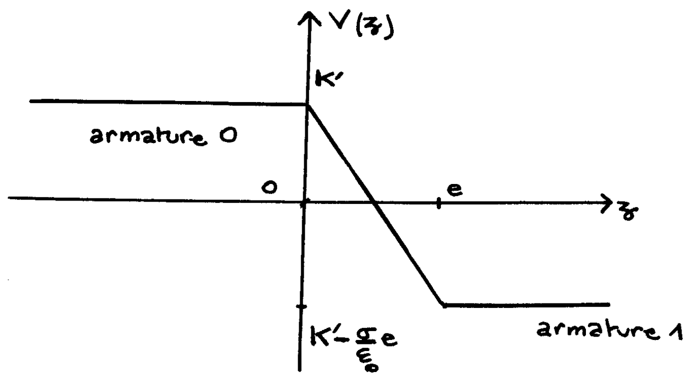
$z > e$

Idem

$$\boxed{V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} e + K'}$$

---

9)




---

10) Pour l'armature zéro :

$$Q_{(\text{armature } 0)} = \sigma S$$

$$\boxed{Q(\text{armature } 0) = \frac{\varepsilon_0 S}{e}\left(V_{(z=0)} - V_{(z=e)}\right)}$$

Pour l'armature un :

$$Q(\text{armature } 1) = -Q(\text{armature } 0)$$

$$\boxed{Q(\text{armature } 1) = \frac{\varepsilon_0 S}{e}\left(V_{(z=e)} - V_{(z=0)}\right)}$$

---

11) Donc

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$$

---

12)

$$dq = \sigma \, dS$$

Le champ créé par l'armature 1 au niveau de la charge de l'armature zéro est (cf question 6)

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$$

donc

$$\overrightarrow{dF} = dq \, \overrightarrow{E_1}$$

$$= \sigma \, dS \, \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{dF} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS \, \overrightarrow{u_z}}$$

---

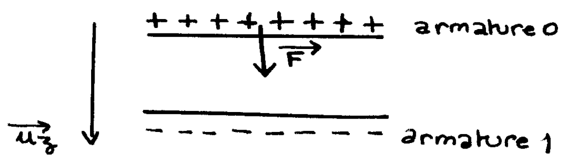
13)

$$\overrightarrow{F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} S \, \overrightarrow{u_z}$$

avec $\sigma = -\varepsilon_0 \dfrac{U}{e}$

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2} \frac{1}{e^2}\overrightarrow{u_z}}$$

Les armatures chargées par des charges de signe contraire devraient s'attirer.



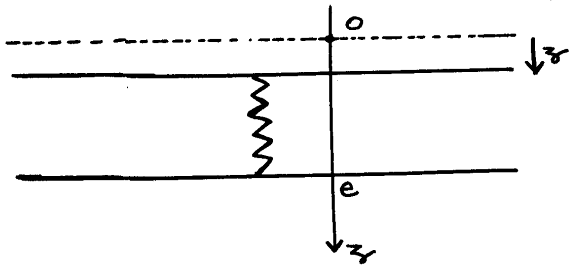

(dessin avec $\sigma > 0$)

donc $\overrightarrow{F}$ doit être selon $\underline{+\overrightarrow{u_z}}$

ce qui est bien le cas.

---

14)



$$\overrightarrow{F}_{ressort} = k\ (\ell - \ell_0)\ \overrightarrow{u_z}$$

(cf si $\ell > \ell_0$ force selon $\overrightarrow{u_z}$

si $\ell < \ell_0$ force selon $-\overrightarrow{u_z}$ )

avec $\ell = e - z$

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{ressort} = k\ (e - z - \ell_0)\ \overrightarrow{u_z}}$$

---

15) Théorème de la résultante cinétique pour cette plaque.

$$\overrightarrow{F}_{ressort} + m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F}_{él} = m\overrightarrow{a}$$

$$\boxed{k(e-z-\ell_0) + mg + K\frac{U^2}{(e-z)^2} = m\ddot{z}}$$

(avec, cf question 13

$K = \frac{\varepsilon_0 S}{2}$ )

---

16) Equilibre pour $U = 0$

$$\boxed{k(e-\ell_0) + mg = 0}$$

on fait la différence entre ces deux équations

$$\boxed{-kz \quad + \quad \frac{KU^2}{(e-z)^2} \quad = \quad m\ddot{z}}$$

$$- F_r \quad + \quad F_{el} \quad = \quad m\ddot{z}$$

avec $-F_r$ : force supplémentaire due au ressort par rapport à la situation d'équilibre quand $U = 0$

---

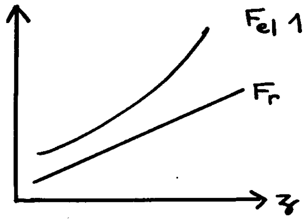
17) La position d'équilibre est donnée par :

$$\boxed{-F_r \quad + \quad F_{el} \quad = 0}$$

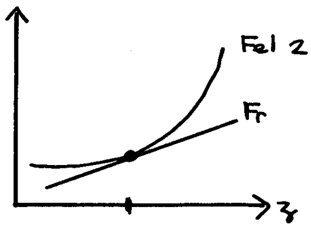
$$F_{el} \quad = \quad F_r$$

---

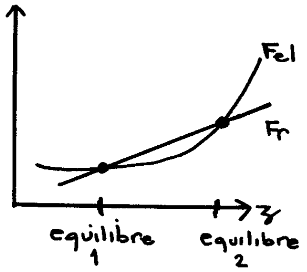
18) → existence de positions d'équilibre




pas d'équilibre



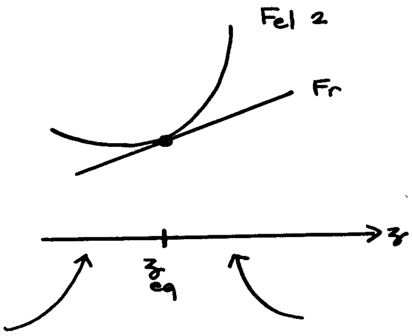

une position d'équilibre




deux positions d'équilibre

→ stabilité de l'équilibre

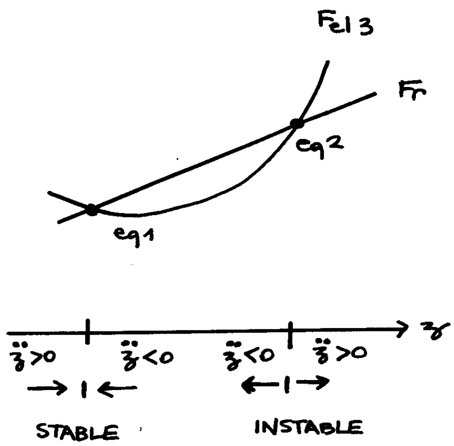
on se base sur l'équation $F_{el} - F_r = m\ddot{z}$




si $z < z_{eq}$
$F_{el} > F_r$
donc $\ddot{z} > 0$
retour vers l'équilibre

si $z > z_{eq}$
$F_{el} > F_r$
donc $\ddot{z} > 0$
pas de retour vers l'équilibre
EQUILIBRE INSTABLE

$\rightarrow \;|\; \rightarrow$




Pour $F_{el\,3}$, la position d'équilibre correspondant à $z_{min}$ est stable.

---

19)

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{(e - z)}$$

$$\boxed{C_1 = C_0 \frac{e}{e - z} \qquad C_2 = C_0 \frac{e}{e + z}}$$

---

20)

$\longrightarrow$

$$Q = Q_1 + Q_2$$
$$= C_1(0-V_1) + C_2(0-V_2)$$
$$Q = -C_0 e \left( \frac{1}{e-z} V_1 + \frac{1}{e+z} V_2 \right)$$
$$\boxed{Q = -C_0 \left( \frac{1}{1-\frac{z}{e}} V_1 + \frac{1}{1+\frac{z}{e}} V_2 \right)}$$

$\longrightarrow$ Dans l'hypothèse des petits déplacements $\frac{z}{e} \ll 1$

$$Q = -C_0 \left( \left(1+\frac{z}{e}\right) V_1 + \left(1-\frac{z}{e}\right) V_2 \right)$$
$$\boxed{Q_{(z)} = -C_0 (V_1 + V_2) - C_0 \frac{z}{e} (V_1 - V_2)}$$

$Q(z)$ est une fonction affine de $z$

$\longrightarrow$ Cas particulier $V_2 = -V_1$

$$\boxed{Q(z) = -\frac{2\,C_0 V_1}{e}\, z}$$ ou

$$+\frac{2\,C_0 V_2}{e}\, z$$

$\longrightarrow$ Finalement

$$V_s = K_c\, Q$$
$$\boxed{V_s = \left(-\frac{2\,K C_0 V_1}{e}\right) z}$$

( $V_s$ est proportionnel à $z$ )

---

21)

$\longrightarrow$

$$\vec{F}_{el} = \frac{k\,V_1^2}{(e-z)^2}\,\vec{u_z} + \frac{k\,V_2^2}{(e+z)^2}\,(-\vec{u_z})$$
$$\boxed{\vec{F}_{el} = \frac{k}{e^2} \left( \frac{V_1^2}{\left(1-\frac{z}{e}\right)^2} - \frac{V_2^2}{\left(1+\frac{z}{e}\right)^2} \right) \vec{u_z}}$$

$\longrightarrow \frac{z}{e} \ll 1$

$$F_{el} = \frac{k}{e^2} \left( \left(1+\frac{2z}{e}\right) V_1^2 - \left(1-\frac{2z}{e}\right) V_2^2 \right)$$
$$\boxed{F_{el} = \frac{k}{e^2} \left( (V_1^2 - V_2^2) + \frac{2z}{e} (V_1^2 + V_2^2) \right)}$$

$\longrightarrow V_2 = -V_1$

$$\boxed{\overrightarrow{F_{el}} = \frac{4KV_1^2}{e^3}\, z\, \overrightarrow{u_z}}$$

$\longrightarrow$ $W_{el} = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2$ soit dans le cas considéré :

$= \frac{1}{2} C_0 (1+\frac{z}{e}) V_1^2 + \frac{1}{2} C_0 (1-\frac{z}{e}) V_1^2$

$= C_0 V_1^2$ indépendant de $z$

Il faut donc travailler au deuxième ordre en $\frac{z}{e}$

(ce qui est logique pour que la dérivée soit au premier ordre)

$$W_{el} = \frac{1}{2} C_0 (1+\frac{z}{e}+\frac{z^2}{e^2}) V_1^2 + \frac{1}{2} C_0 (1-\frac{z}{e}+\frac{z^2}{e^2}) V_1^2$$

$$\boxed{W_{el} = C_0 V_1^2 (1+\frac{z^2}{e^2})}$$

$$F_{el} = \frac{dW_{el}}{dz}$$

$$F_{el} = \frac{2 C_0 V_1^2}{e^2}\, z$$

$$= \frac{2 \varepsilon_0 S V_1^2}{e^3}\, z$$

$$\boxed{F_{el} = \frac{4K V_1^2}{e^3}\, z}$$

On retrouve bien le même résultat

$\longrightarrow$ $F_{el} = k_{el}\, z$

avec

$$\boxed{k_{el} = \frac{4KV_1^2}{e^3} = \frac{2\varepsilon_0 S V_1^2}{e^3}}$$

---

22) $\overrightarrow{f_{i,e}} = -m\,\overrightarrow{a_c}$

$= -m\, a_c\, \overrightarrow{u_{z_T}}$

$$\boxed{\overrightarrow{f_{i,e}} = m\, a_c\, \overrightarrow{u_z}}$$

---

23)
$$\overrightarrow{F}_{ressort} + m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F}_{frottement} + \overrightarrow{F_{i,e}} = m\overrightarrow{a}$$

(th de la résultante cinétique à m dans $\mathcal{R}_{cage}$)

$$k(\ell - \ell_0) + mg - \eta\dot{z} + m a_c = m\ddot{z}$$

$$\ell \to \ell_{eq} - z$$

En tenant compte de la relation à l'équilibre

$$k(\ell_{eq} - \ell_0) + mg = 0$$

Finalement :

$$-kz - \eta\dot{z} + m a_c = m\ddot{z}$$

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{\eta}{m}\dot{z} + \frac{k}{m} z = a_c}$$

---

24)
$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = a_c$$

avec $\boxed{\omega_0 = +\sqrt{\frac{k}{m}}}$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\eta}{m}$$

$$\boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\eta}}$$

En complexes :

$$\ddot{\underline{z}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\underline{z}} + \omega_0^2 \underline{z} = \underline{a_c}$$

$$-\omega^2 \underline{z} + \frac{j\omega\omega_0}{Q}\underline{z} + \omega_0^2 \underline{z} = \underline{a_c}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{z}}{\underline{a_c}} = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{j\omega\omega_0}{Q}}$$

$$= \frac{1/\omega_0^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

$$H_0 = \frac{1}{\omega_0^2}$$

$$\boxed{H_0 = \frac{m}{k}}$$

(gain statique)

$$\boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}$$

( on remarque que $H$ est ici dimensionné

$$[H] = [H_0]$$
$$= T^2 \quad )$$

si $\omega \to 0$ $\quad \underline{H} \sim H_0$

si $\omega \to \infty$ $\quad \underline{H} \sim 0$

Ce filtre est un filtre passe-bas du deuxième ordre.

---

25) Il faut tenir compte dans les équations de la force

$$\overrightarrow{F_{el}} = k_{el}\, z\, \overrightarrow{u_z}$$

ce qui revient à remplacer $k$

$$\boxed{k \longrightarrow k - k_{el}}$$

---

26) Dans la bande passante :

$$\underline{H} = \frac{\underline{z}}{\underline{a_c}} = H_0$$

$$\boxed{\underline{z} = H_0\, \underline{a_c} \quad \text{avec } H_0 = \frac{m}{k - k_{el}}}$$

remarque : dans la bande passante

$$\underline{z} = \frac{m}{k - k_{el}}\, \underline{a_c}$$

$$\underline{V_S} = \left(-\frac{2 k C_0 V_1}{e}\right) \underline{z}$$

donc $\boxed{\underline{V_S} \text{ proportionnel à } \underline{a_c}}$

---

Température de surface de la lune

1)
$$\boxed{P_S = \sigma T_S^4 \, 4\pi R_S^2}$$

---

2)
$$P_o = P_S \frac{\pi R_T^2}{4\pi D_{ST}^2}$$

$$\boxed{P_o = P_S \left(\frac{R_T}{2D_{ST}}\right)^2}$$

---

3)
$$\sigma T_T^4 \, 4\pi R_T^2 = P_o$$

$$\boxed{T_T = T_S \left(\frac{R_S}{2D_{ST}}\right)^{1/2}}$$

---

4) On doit remplacer $P_o$ par $P_o(1-A_T)$ dans l'équation écrite en 3) d'où, en réalité :

$$\boxed{T_T = T_S \left(\frac{R_S}{2D_{ST}}\right)^{1/2} (1-A_T)^{1/4}}$$

---

5) A.N.
$$T_T = 5800 \left(\frac{7.10^5}{3.10^8}\right)^{1/2} 0{,}65^{1/4}$$

$$\boxed{T_T = 251{,}6 \text{ K}}$$

---

6) Le rayonnement solaire est important dans le visible

Le rayonnement terrestre est de nature infrarouge.

L'absorption de l'atmosphère dépend de la longueur d'onde.

C'est un corps noir pour l'infrarouge.

---

7) Puissance solaire absorbée par la surface terrestre :

$$\boxed{P_1 = P_o (1-A_T)(1-\alpha)}$$

Puissance rayonnée par l'atmosphère vers la terre :

$$\boxed{P_2 = \sigma T_a^4 \, 4\pi R_T^2}$$

---

8) En désignant par $P_T$ la puissance émise par la terre avec $P_T = \sigma T_T'^4 \, 4\pi R_T^2$

bilan thermique

$$P \text{ reçu} = P \text{ émis}$$

⟶ pour la terre

$$\boxed{(1) \quad P_1 + P_2 = P_T}$$

⟶ pour l'atmosphère

$$\boxed{(2) \quad P_1 \frac{\alpha}{1-\alpha} + P_T = 2P_2}$$

on élimine $P_2$ entre (1) et (2)

$$P_T = \frac{P_1}{1-\alpha}(2-\alpha)$$

$$\sigma T_T'^4 \, 4\pi R_T^2 = P_0 (1-A_T)(2-\alpha)$$

$$= \sigma T_T^4 \, 4\pi R_T^2 \, (2-\alpha)$$

$$\boxed{T_T' = T_T \, (2-\alpha)^{1/4}}$$

A.N. $T_T' = 251{,}6 \, (2-0{,}35)^{1/4}$

$$\boxed{T_T' = 285{,}1 \text{ K}}$$

---

9) En éliminant $P_T$ entre (1) et (2), on obtient le bilan pour l'ensemble terre + atmosphère.

$$P_2 = \frac{P_1}{1-\alpha} \text{ ou } P_0(1-A_T)$$

$$\sigma T_a^4 \, 4\pi R_T^2 = \sigma T_T^4 \, 4\pi R_T^2$$

$$\boxed{T_a = T_T}$$

$(= 251{,}6 \text{ K})$

---

10) On utilise la formule vue en 4)

$$T_{L,soleil} = T_S \left(\frac{R_S}{2D_{SL}}\right)^{1/2} (1-A_L)^{1/4}$$

avec $\boxed{D_{SL} \simeq D_{ST}}$

$$\boxed{T_{L,soleil} = T_S \left(\frac{R_S}{2D_{ST}}\right)^{1/2} (1-A_L)^{1/4}}$$

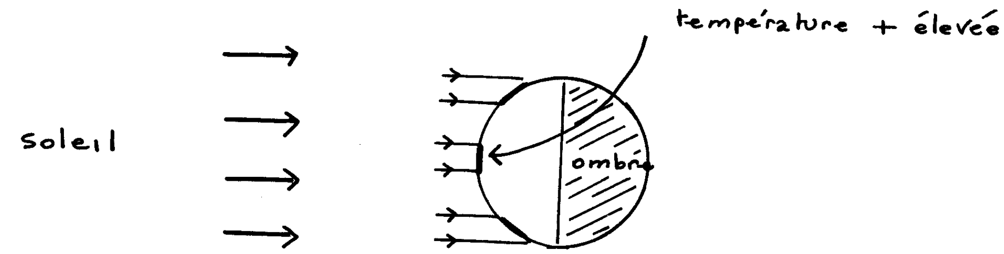
A.N. $= 5800 \left(\frac{7\ 10^5}{3\ 10^8}\right)^{1/2} 0{,}927^{1/4}$

$$\boxed{T_{L,soleil} = 274{,}9\ K}$$

---

11)

$\longrightarrow$




La zone de température plus élevée correspond au centre de la partie ensoleillée (incidence normale des rayons)

$\longrightarrow$ Bilan pour une surface $dS_L$ de cette zone :

$$(1-A_L)\,\sigma T_S^4\ 4\pi R_S^2 \ \frac{dS_L}{4\pi D_{ST}^2} = \sigma T_{L,max}^4 \ dS_L$$

$$T_{L,max} = T_S \left(\frac{R_S}{D_{ST}}\right)^{1/2} (1-A_L)^{1/4}$$

$$\boxed{T_{L,max} = \sqrt{2}\ T_{L,soleil}}$$

A.N. $= \sqrt{2}\ 274{,}9$

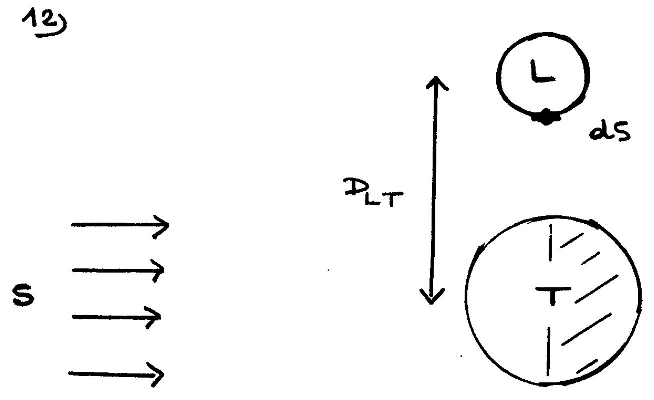
$$\boxed{T_{L,max} = 388{,}8\ K}$$

$\simeq 115{,}6\ °C$

(proche de $120\ °C$)

---

12)




→ Puissance surfacique sur la lune due à l'atmosphère terrestre

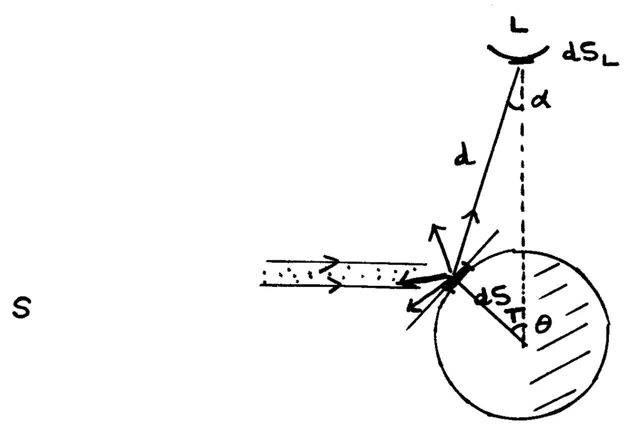
$$\varphi_{T\to L} = \frac{dP_{T\to L}}{dS_L} = \sigma T_2^4 \, 4\pi R_T^2 \, \frac{1}{4\pi (D_{LT} - \cancel{R_L})^2}$$

$$\boxed{\varphi_{T\to L} = \sigma \, T_2^4 \left(\frac{R_T}{D_{LT}}\right)^2}$$

A.N. $= 5{,}7 \; 10^{-8} \; (251{,}6)^4 \left(\frac{6{,}38 \; 10^3}{3{,}84 \; 10^5}\right)^2$

$$\boxed{\varphi_{T\to L} = 63{,}1 \; 10^{-3} \, W m^{-2}}$$

→ Puissance surfacique solaire, réfléchie par la terre sur la lune




Puissance solaire incidente sur $dS_T$ :

$$\underbrace{\sigma T_S^4 \; 4\pi R_S^2}_{P_S} \; \frac{dS_T \sin\theta}{4\pi D_{ST}^2}$$

Puissance réfléchie - diffusée par $dS_T$ dans un demi espace

$$= P_S \frac{dS_T \sin\theta}{4\pi D_{ST}^2} A_T$$

Puissance incidente sur $dS_L$

$$= P_S \frac{dS_T \sin\theta}{4\pi D_{ST}^2} A_T \frac{dS_L \cos\alpha}{2\pi d^2}$$ ← cf demi-espace

avec $d \simeq D_{LT}$, $\cos\alpha \simeq 1$

$$= P_S \frac{dS_T \sin\theta}{4\pi D_{ST}^2} A_T \frac{dS_L}{2\pi D_{LT}^2}$$

On somme sur les valeurs de $\theta$ en remarquant qu'il ne faut considérer que la moitié (environ) de la surface ensoleillée de la terre (l'autre moitié réfléchit dans la direction opposée à celle de la lune) soit $\theta$ entre 0 et $\pi/2$

$$dP_{\text{Soleil, réfléchi} \rightarrow L} = \underbrace{\underbrace{P_S \frac{\pi R_T^2/2}{4\pi D_{ST}^2}}_{P_0/2} A_T}_{\frac{A_T P_0}{2}} \frac{dS_L}{2\pi D_{LT}^2}$$

$$\boxed{\varphi_{S,\text{réfléchi} \rightarrow L} = \sigma T_S^4 A_T \left(\frac{R_S R_T}{2 D_{ST} D_{LT}}\right)^2}$$

A.N. $$= 5{,}7\,10^{-8}\ 5800^4\ 0{,}35 \left(\frac{7.10^5\ 6{,}38\ 10^3}{2\ 1{,}5\,10^8\ 3{,}84\ 10^5}\right)^2$$

$$\boxed{\varphi_{S,\text{réfléchi} \rightarrow L} = 33{,}9\ 10^{-3}\ \text{W m}^{-2}}$$

13) On écrit la relation traduisant l'équilibre thermique, en tenant compte de l'albedo de la lune.

$$\boxed{(1-A_L)\,(\varphi_{T\to L}+\varphi_{S,\text{réfléchi}\to L}) = \sigma\, T'^{\,4}_{L,\text{Terre}}}$$

A.N. $T'_{L,\text{Terre}} = \left(\frac{1}{5{,}7\;10^{-8}}\;(1-0{,}073)\;(63{,}1+33{,}9)\,10^{-3}\right)^{1/4}$

$$\boxed{T'_{L,\text{Terre}} = 35{,}4\ \text{K}}$$

---

14) La température max due au seul soleil est 388,8 K
La température max due à la terre seule est 35,4 K
Dans une zone éclairée par le soleil, le rayonnement terrestre n'augmente donc pas significativement la température.
(cf $T^4_{\text{dû au soleil seul}} \gg T^4_{\text{dû à la terre seule}}$ )

---

15)

$$\boxed{\begin{array}{c} 0{,}4\ \mu m < \lambda_{\text{visible}} < 0{,}8\ \mu m \\ 0{,}8\ \mu m < \lambda_{\text{infrarouge}} < 1000\ \mu m \end{array}}$$

---

16) → rayonnement thermique émis par la lune
La température moyenne de la lune due au seul soleil est 274,9 K (calculée en 10) d'où en utilisant la loi de Wien

$$\lambda_m T = 2898\ \mu m.K$$

$$\lambda_m = \frac{2898}{274{,}9}$$

$$\boxed{\lambda_m = 10{,}5\ \mu m}$$

(infrarouge)

→ le rayonnement visible provenant de la lune provient de la réflexion du rayonnement solaire par la lune en lien avec l'albedo $A_L$

---

17) En régime stationnaire, la puissance produite par radioactivité est évacuée par rayonnement.

$$P_L \frac{4}{3}\pi R_L^3 = \sigma T_{L,Roches}^4 \, 4\pi R_L^2$$

$$\boxed{T_{L,Roches} = \left(\frac{P_L R_L}{3\sigma}\right)^{1/4}}$$

A.N.

$$= \left(\frac{10^{-8}\ 1{,}74\ 10^{6}}{3 \times 5{,}7\ 10^{-8}}\right)^{1/4}$$

$$\boxed{T_{L,Roches} = 17{,}9\ \text{K}}$$

---

18)

$$T_{L,Roches} \ll T_{L,max}$$

La radioactivité n'augmente pas significativement la température dans les zones très éclairées.

---