DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

CONCOURS BLANC

calculatrice: autorisée

durée: 2 heures (10h-12h)

Sujet

Vaisseau spatial

I. Vaisseau spatial dans un champ newtonien

On considère un vaisseau supposé ponctuel de masse m, mobile par rapport à un astre de masse M, de centre O et de rayon R. Le champ de gravitation de cet astre est à symétrie sphérique. La constante de gravitation est notée G. La distance entre le vaisseau et le centre de l'astre est r, $r>R$. On se placera dans le référentiel (supposé galiléen) lié à l'astre. Sauf mention contraire, le moteur fusée est éteint, c'est-à-dire que le vaisseau est en vol balistique.

1. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ (calculé en O) du vaisseau est une constante du mouvement. On énoncera le théorème utilisé.

2. Cette constance de $\vec{L}_O$ a deux conséquences sur la trajectoire du vaisseau : lesquelles ? (Les démonstrations ne sont pas demandées).

3. Déterminer le champ gravitationnel $\vec{g}(P)$ créé par l'astre en un point P extérieur à l'astre à la distance r de O en fonction de G, M, r et du vecteur $\overrightarrow{OP}$.

4. Retrouver l'expression de l'énergie potentielle E_P du vaisseau en fonction de G, M, m et r en la choisissant nulle à l'infini.

5. Dans le cas d'une orbite circulaire de rayon r_0, retrouver les expressions de l'énergie mécanique E_m du vaisseau et de sa période de révolution T_{rev} en fonction de G, M, r_0 et, si nécessaire, m. Commenter le signe de E_m.

6. Dans le cas où l'astre est notre Terre (dont on néglige ici la rotation autour de son axe), on considère une masse de $1\,kg$, initialement au repos à la surface de la Terre (rayon $R_T=6400\text{km}$), puis placée sur une orbite circulaire de rayon $r_0=7000\text{km}$. En appelant g_0 l'intensité du champ gravitationnel terrestre, au niveau du sol, dont la valeur numérique est égale à $10\,ms^{-2}$, exprimer la différence d'énergie mécanique ΔE_m entre ces deux états en fonction de m, g_0, r_0, R_T. Calculer ΔE_m.

7. Un « kilowatt-heure » électrique revient environ à $0{,}15$ € ; en déduire numériquement le coût théorique de la satellisation d'un kg de charge utile. Le coût réel est de l'ordre de 1000 € par kg. Commenter ces valeurs.

8. On peut montrer que la trajectoire d'un vaisseau (moteur coupé) dans le champ gravitationnel de l'astre est une conique dont l'équation en polaire peut s'écrire: $\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos\theta}{p}$, où e est l'excentricité de la conique et p le paramètre. On se limitera ici au cas où la trajectoire est fermée, donc elliptique. Dessiner l'allure de la trajectoire du satellite en plaçant l'astre attracteur, l'apogée et le périgée. Exprimer le rayon au périgée: r_P, le rayon à l'apogée: r_A, le demi-grand axe de l'ellipse a en fonction de e et p.

9. Donner la relation entre la période orbitale T_{orb}, le demi-grand axe a, G et M. Commenter.

10. Supposons qu'à la distance r_0 du centre de l'astre, la norme V de la vitesse d'un vaisseau

soit la même que pour une orbite circulaire mais que l'angle α entre le support du vecteur vitesse et la tangente au cercle de centre O et de rayon r_0 appartienne à $]0..\pi/2[$. Déterminer en fonction de r_0 et α les caractéristiques de la trajectoire de ce vaisseau:

- sa nature (justifier)
- les distances r_A du centre O à l'apogée et r_P du centre O au périgée
- le demi-grand axe a
- l'excentricité e
- le paramètre p .

II. Vitesse de libération

Le vaisseau est initialement sur une orbite circulaire de rayon r_0 décrite à la vitesse V_0 . On allume le moteur pendant un temps court, de sorte que la vitesse varie mais pas la distance au centre de l'astre.

11.Évaluer la vitesse V_1 qu'il faut communiquer au vaisseau pour qu'il échappe au champ gravitationnel de l'astre en fonction de G, M, r_0 .

Le commandant de bord dispose en fait d'un « budget de vitesse » ΔV égal à $4V_0$; cela signifie que la quantité de carburant disponible lui permet de faire varier la vitesse du vaisseau, en une ou plusieurs fois, pourvu que la somme des valeurs absolues des variations de vitesses n'excède pas $4V_0$.

A. Option 1

Le commandant utilise tout son budget d'un seul coup en amenant sa vitesse initiale à $5V_0$.

12.Évaluer sa vitesse finale (« à l'infini »), en fonction de V_0 .

B. Option 2 :

On utilise un huitième du budget pour ralentir le vaisseau de V_0 à $\frac{V_0}{2}$ en un temps très court devant la période, le vecteur vitesse gardant la même direction.

13.Décrire la nouvelle trajectoire:

- le demi-grand axe a en fonction de r_0
- les distances r_A du centre O à l'apogée et r_P du centre O au périgée en fonction de r_0
- les normes des vitesses V_A et V_P à l'apogée et au périgée en fonction de V_0
- quelle condition doit vérifier r_P ?

14.On utilise ensuite le reste du « budget vitesse » au passage au périgée pour augmenter au maximum la vitesse du vaisseau. Justifier la nature de la nouvelle trajectoire et déterminer la nouvelle vitesse finale (« à l'infini »), en fonction de V_0 .

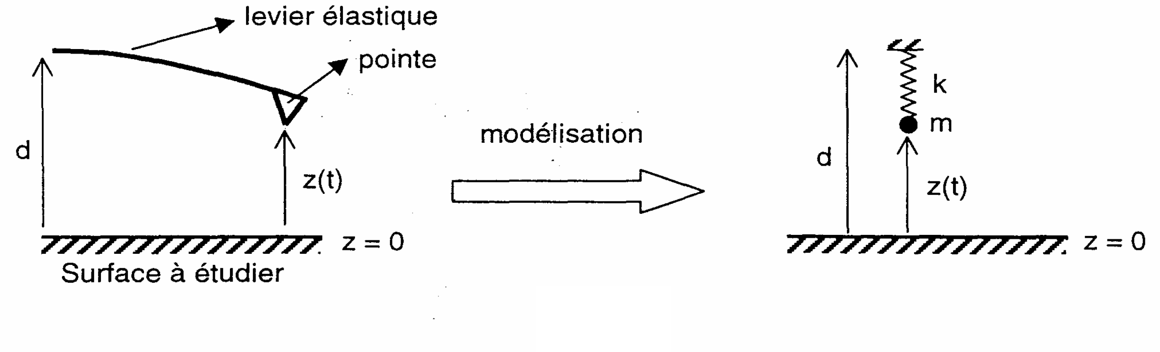
15.Comparer les deux options, et commenter.

Microscope à force atomique

Ces dernières années, de nouvelles techniques dites de "microscopies à champ proche" se sont développées pour étudier les surfaces. Parmi ces techniques, le microscope à force atomique permet de déterminer les caractéristiques de la surface étudiée en mesurant la force exercée sur une fine pointe fixée à l'extrémité d'un levier élastique et placée à une distance de la surface de l'ordre du nanomètre. Ce problème étudie le comportement mécanique de l'ensemble levier pointe dans deux modes de fonctionnement classiques. Les deux parties sont largement indépendantes.

Dans tout le problème, en modélise le système levier-pointe par une masse ponctuelle m rappelée vers un point par une force élastique (comme si elle était fixée à un ressort sans masse, de longueur à vide nulle et de raideur k). On note d la distance entre la surface et l'extrémité du ressort.

La position instantanée de la pointe est notée $z(t)$, l'origine des ordonnées étant prise sur la surface à étudier et l'axe est vers le haut.



La pointe est soumise à une force atomique d'interaction de la part de la surface étudiée ou force d'interaction pointe-surface notée $\vec{F}=F(z)\vec{u}_z$ ($\vec{u}_z$: vecteur unitaire) qui induit une déflexion du levier. Cette déflexion est mesurable avec une grande sensibilité par une méthode optique.

1. Préciser le signe de $F(z)$ pour une force d'attraction entre la pointe et la surface. Idem pour une force de répulsion.

De plus, lors de l'étude en mode résonnant, le levier est excité mécaniquement par une force oscillante. Dans le cadre de la modélisation adoptée, on ajoute une force $\vec{F}_{exc}=F_0\cos(\omega t)\vec{u}_z$ appliquée à la masse m ainsi qu'une force de frottement $\vec{F}_{frott}=-\gamma\frac{dz}{dt}\vec{u}_z$.

<u>La force de pesanteur est négligeable</u>.

2. Exprimer la force vectorielle de rappel exercée par le ressort sur la masse m en fonction de k, d, z .

3. Écrire l'équation différentielle donnant le mouvement de la pointe dans le cas général en fonction de $F(z)$ et des autres données du problème.

I. Mode contact

Il n'y a pas excitation du levier: $\vec{F}_{exc}=\vec{0}$. La pointe est approchée de la surface.

On s'intéresse ici à la stabilité des positions d'équilibre de la pointe. Dans cette étude de stabilité, on ne fait pas intervenir de frottement: $\vec{F}_{frott}=\vec{0}$.

A. Position d'équilibre et stabilité: généralités

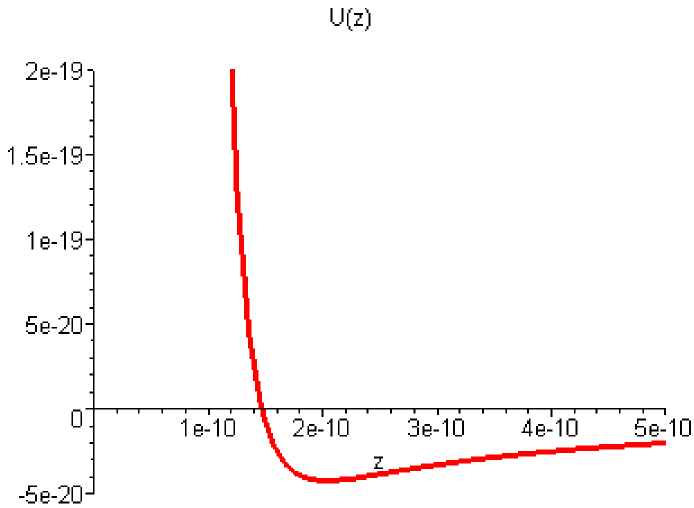
4. On désigne par z_0 une position d'équilibre. Écrire l'équation vérifiée par z_0 .

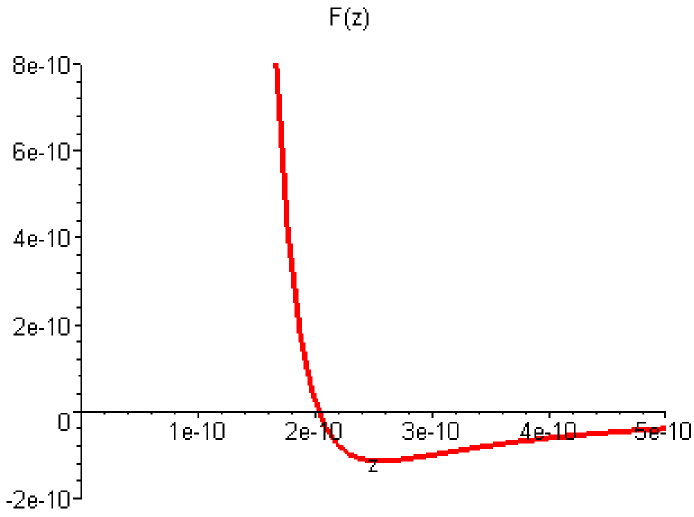
5. On se place au voisinage de z_0 (d est fixé). En linéarisant $F(z)$ par un développement au voisinage de z_0 , écrire l'équation différentielle du mouvement. On pourra poser: $z-z_0=\varepsilon$. Dans quel cas le mouvement est-il oscillatoire. En déduire la condition suffisante de stabilité sous la forme $k-\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z=z_0}>0$

B. Position d'équilibre et stabilité: détermination connaissant l'énergie potentielle

On suppose que l'énergie potentielle $U(z)$ dont dérive F(z) a pour expression: $U=\frac{A}{z^7}-\frac{B}{z}$ avec $A\approx 10^{-88}\,J\,m^7$ et $B\approx 10^{-29}\,J\,m$

On donne les graphes de $U(z)$ et $F(z)$.





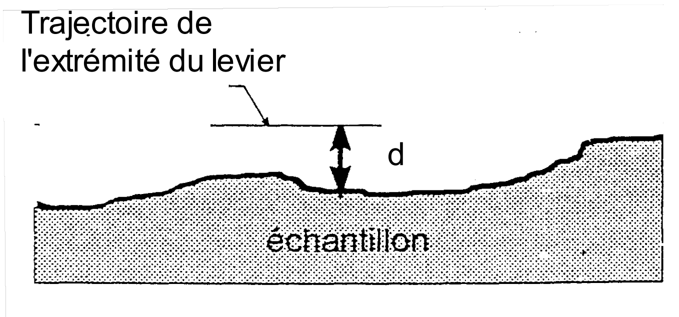
6. Commenter:

    - quel est dans l'expression de $U(z)$ le terme traduisant l'attraction et celui traduisant la répulsion
    - dans quel domaine de valeurs de z y a-t-il globalement attraction et dans quel domaine y a-t-il globalement répulsion de la pointe par la surface? Donner la valeur limite de z littéralement et numériquement.

7. En partant de l'équation donnant une position d'équilibre, proposer une méthode graphique (on trace une droite sur le graphe de $F(z)$) pour déterminer les positions d'équilibre de la pointe lorsque d est fixé. Vérifier que le nombre n de positions d'équilibre varie, selon les cas, entre 1 et 3.

8. Montrer que lorsque k est supérieur à une valeur critique k_c que l'on calculera, la position d'équilibre est toujours stable.

C. Balayage de la surface



<u>En mode contact, la pointe est très proche (cf: « contact ») de la surface</u>. La pointe, à l'équilibre, se trouve donc à une distance z_0 de la surface telle que $F(z_0)>0$.

9. Vérifier que l'équilibre est stable.

10. Montrer qu'une variation δd de la distance d entraîne une variation δz de la distance pointe surface à l'équilibre donnée par $\delta z=\delta d\left[1-\frac{1}{k}\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0}\right]^{-1}$

11. A.N. $z_0=0{,}1\,nm$ $k=100\,N.m^{-1}$ Calculer δz en fonction de δd et montrer que l'allongement du ressort donne directement la topographie de la surface lorsqu'on déplace la pointe.

II. Mode Résonnant

En mode résonnant, la pointe est à quelques dizaines de nanomètres de la surface. Le levier est excité mécaniquement. On tient compte ici de $\vec{F}_{exc}$ et de $\vec{F}_{frott}=-\gamma\frac{dz}{dt}\vec{u}_z$

A. Pointe à grande distance de la surface

On suppose dans cette question que la pointe est à une distance de la surface suffisamment grande pour qu'elle ne soit soumise à aucune force d'interaction avec la surface.

12.Écrire l'équation du mouvement de la pointe. Introduire les notations habituelles: Q (coefficient de qualité) et ω_0 (pulsation propre). Donner l'expression de ces deux grandeurs.

13.Montrer que, en régime sinusoïdal forcé, l'amplitude des oscillations peut de mettre sous la forme: $A(x)=\dfrac{A_0}{\sqrt{(1-x^2)^2+\dfrac{x^2}{Q^2}}}$ avec $x=\dfrac{\omega}{\omega_0}$. On précisera l'expression de A_0 .

14.L'amplitude des oscillations de la pointe présente ici une résonance. Donner l'expression de la pulsation de résonance. Préciser l'amplitude au maximum .

15.On suppose que la force de frottement subie par la pointe est faible de sorte que $Q \gg 1$. En travaillant au premier ordre en $\dfrac{1}{Q}$:

- exprimer la pulsation de résonance
- exprimer l'amplitude à la résonance
- déterminer l'amplitude $A(x)$ aux deux pulsations $\omega_B \approx \omega_0 (1-\dfrac{1}{2\mathrm{Q}})$ et $\omega_H \approx \omega_0 (1+\dfrac{1}{2\mathrm{Q}})$. Définir et déterminer la largeur de résonance à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

B. Pointe proche de la surface

La pointe est soumise en plus à l'interaction avec la surface décrite par la force $F(z)$. L'équation différentielle du mouvement de la pointe a été écrite au début du problème.

16.La position d'équilibre de la point est notée z_0 . Écrire l'équation différentielle en faisant intervenir $F(z)-F(z_0)$ et $z-z_0$.

17.En linéarisant $F(z)$ par un développement limité au premier ordre en $z-z_0$ au voisinage de la position d'équilibre z_0 de la pointe, montrer que la présence d'une interaction est équivalente par rapport à la question précédente (pas d'interaction avec la surface) à une modification de la raideur du ressort. On note k^* cette raideur effective qui s’exprime en fonction de la raideur k du ressort et d’une dérivée de F .

18.Déterminer le nouvelle pulsation de résonance ω_0^* et montrer que la variation de pulsation de résonance $\Delta\omega_0=\omega_0^*-\omega_0$ (noté $\delta\omega_0$ par la suite) est donnée (en supposant $k \gg \left(\dfrac{dF}{dz}\right)_{z=z_0}$) par: $\dfrac{\Delta\omega_0}{\omega_0}=-\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dF}{dz}\right)_{z=z_0}}{k}$.

19.<u>En mode résonnant, la pointe reste assez loin de la surface </u>(quelques dizaines de nanomètres). En se basant sur les graphes de $U(z)$ et $F(z)$, indiquer le signe de $F(z_0)$ et celui de $\left(\dfrac{dF}{dz}\right)_{z=z_0}$.

20.On suppose que la pointe est suffisamment loin de la surface pour que le changement de pulsation $\delta\omega_0$ soit très faible devant la largeur à mi-hauteur de la courbe de résonance $\omega_H-\omega_B$. Le pic de résonance se déplace t-il vers les basses ou vers les hautes fréquences? Préciser aussi dans quel sens varient A_0 et Q en présence de l'interaction. On montre que le phénomène fondamental est ici le déplacement du pic de résonance en fréquence: on supposera que la courbe, au niveau de la fréquence de résonance et des fréquences de coupure, subit une simple translation. Tracer sur un même graphe, les courbes de résonance obtenues en l'absence puis en présence d'interaction.

21.Application numérique : La pointe est située à $1\,nm$ de la surface. On donne également $k=100\,N.m^{-1}$, $N_0=200\text{KHz}$ (fréquence propre) et $Q=100$. Calculer δN_0 et $\frac{\delta N_0}{N_0}$. Commenter.

22.On mesure l'amplitude de vibration pour la pulsation $\omega_H=\omega_0(1+1/2\text{Q})$ correspondant à la courbe de résonance sans interaction. On désigne par δA la variation d'amplitude à cette pulsation due à la présence de l'interaction pointe-surface.

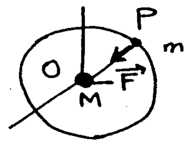
- Représenter δA sur le schéma précédent et indiquer son signe.
- Pourquoi se placer à cette pulsation plutôt par exemple qu'en $\omega=\omega_0$.
- En utilisant l'approximation précédente (A_0 et Q peuvent être considérés comme constants malgré la modification de k) montrer que $\delta A=\frac{1}{\sqrt{2}}Q^2\frac{\delta\omega_0}{\omega_0}A_0$ (on effectuera une différentielle logarithmique ou une dérivée de A).
- Application numérique: $A_0=0{,}5\,nm$. Calculer δA .

23.Comment choisir k pour que $\frac{\delta A}{A_0}$ soit maximum? En utilisant les résultats de la première partie, montrer qu'il est nécessaire de trouver un compromis entre des variations d'amplitude aisément mesurables et une bonne stabilité du microscope.

Réponses

Vaisseau spatial

1)



Dans le référentiel lié à l'astre, O est fixe.
On applique le théorème du moment cinétique en un point fixe O au vaisseau P

$$\frac{d\vec{L}_{(O)}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{(O)}\vec{F}$$
$$= \vec{OP} \wedge \vec{F}$$

La force est <u>centrale</u> donc $\vec{OP} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

$$\boxed{\vec{L}_{(O)} = \text{constante}}$$

---

2) Deux conséquences :

→ **Le mouvement est plan**

cf $\vec{L}_{(O)} = \vec{OP} \wedge m\vec{v}$

donc $\vec{OP} \perp \vec{L}_{(O)}$

$P \in$ plan perpendiculaire à $\vec{L}_{(O)}$ passant par O

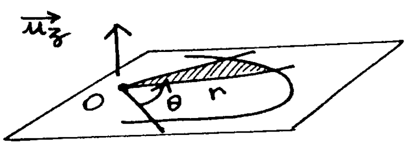
→ **La vitesse aréolaire est constante**

cf $A = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$

or puisque $\vec{L}_{(O)} = m r^2 \dot{\theta} \, \vec{u_z}$, on a

$C = r^2 \dot{\theta}$ (constante des aires)

$A = \frac{C}{2}$



---

3) La force subie par le satellite à cause de la gravitation est

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\vec{u}_{OP} \qquad (\text{en } \tfrac{1}{r^2})$$

$$= -\frac{GMm}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} \qquad (\text{avec } \vec{r} = \overrightarrow{OP})$$

Cette force s'écrit aussi, en désignant par $\vec{g}$ le champ de gravitation

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

donc

$$\boxed{\vec{g} = -\frac{GM}{r^3}\,\overrightarrow{OP}}$$

On remarquera que pour la terre, $\vec{g}$ désigne plutôt le champ de pesanteur (= champ de gravitation + champ dû à la force centrifuge)

---

4)

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ E_p$$

$$dE_p = -\vec{F}\,\vec{dl}$$

$$= +\frac{GMm}{r^2}\,dr$$

$$\boxed{E_p = -\frac{GMm}{r}} + \cancel{\text{cste}}$$

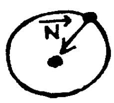
cf E_p nulle si $r \to \infty$

---

5) On applique le principe fondamental pour une orbite circulaire de rayon r_o

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

en projetant sur la normale $\vec{N}$



$$\frac{GMm}{r_o^2} = \frac{mv^2}{r_o}$$

soit

$$\frac{GMm}{r_o} = mv^2$$

$$\boxed{-E_p = 2E_c}$$

→ énergie mécanique totale

donc
$$E_m = E_p + E_c$$
$$= E_p - \frac{E_p}{2}$$
$$= \frac{E_p}{2}$$
$$\boxed{E_m = -\frac{GMm}{2r_0}}$$

Cette énergie est <u>négative</u> cf il s'agit d'un <u>état lié</u>

→ période de révolution
$$T_{rev} = \frac{2\pi r_0}{v}$$
$$T_{rev}^2 = \frac{4\pi^2 r_0^2}{v^2} \quad v^2 = \frac{GM}{r_0}$$
$$\boxed{T_{rev}^2 = \frac{4\pi^2 r_0^3}{GM}}$$

---

6)

au sol :
$E_c = 0$ (on néglige la rotation de la terre sur elle-même)
$E_p = -\frac{GMm}{R_T}$ avec $g_0 = \frac{GM}{R_T^2}$ (cf 3))
$= -m g_0 R_T$

en orbite circulaire
$E_m = E_c + E_p$
$E_m = -\frac{GMm}{2r_0}$
$E_m = -m g_0 \frac{R_T^2}{2r_0}$

donc $\boxed{\Delta E_m = m g_0 R_T \left(1 - \frac{R_T}{2r_0}\right)}$

A.N. $\boxed{\Delta E_m = 34{,}7 \text{ MJ}}$

---

7) 1 kWh correspond à $P \times t$

$$= 1000_{W} \times 3600_{s}$$
$$= 3{,}6\ 10^{6}\ J$$
$$\boxed{1\ kWh = 3{,}6\ MJ}$$

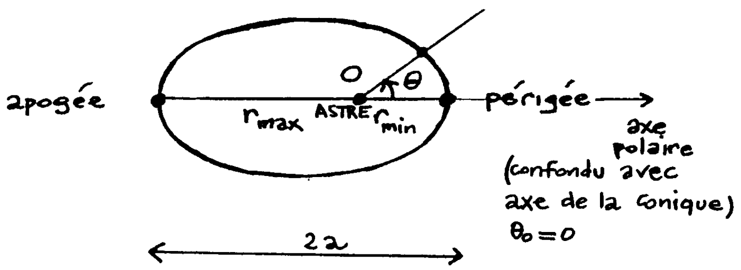
coût théorique de la satellisation d'un kg de charge utile :

$$= \frac{34{,}7}{3{,}6} \times 0{,}15$$
$$\simeq \boxed{1{,}5\ €/kg} \ll \frac{\text{coût réel}}{1000\ €/kg}$$

cf – il faut tenir compte de la masse totale à lancer et satelliser
– il faut payer la recherche, la construction de la fusée ...etc

---

8)



$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \cancel{\theta_0})}$$

au périgée : $\theta = 0$

$$\boxed{r_{min} = \frac{p}{1+e}}$$

à l'apogée : $\theta = \pi$

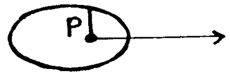
$$\boxed{r_{max} = \frac{p}{1-e}}$$

grand-axe :

$$2a = r_{min} + r_{max}$$
$$2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}$$
$$\boxed{a = \frac{p}{1-e^2}}$$

remarque : pour $\theta = \pi/2$

$r = p$



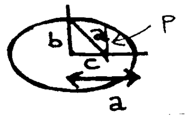
9) Pour un mouvement circulaire :

$$T_{rev} = \frac{2\pi \, r_0^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

Pour une trajectoire elliptique on aura aussi :

$$\boxed{T_{orb} = \frac{2\pi \, a^{3/2}}{\sqrt{GM}}}$$

remarque : démonstration



$T = \dfrac{S}{\mathcal{A}}$ (aire de l'ellipse) avec $S = \pi a b$
(vitesse aréolaire) avec $\mathcal{A} = \mathcal{C}/2$

$= \dfrac{2\pi a b}{\mathcal{C}}$ avec $\mathcal{C} = r^2 \dot{\theta}$

$a = \dfrac{p}{1-e^2}$ (déjà vu)

$c = \dfrac{r_{max} - r_{min}}{2}$ ou $e \times a$

$= \dfrac{pe}{1-e^2}$

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$= a\sqrt{1-e^2}$

$E = -\dfrac{GMm}{r} + \dfrac{1}{2} m \left(r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \right)$

A l'apogée et au périgée $\dot{r} = 0$

$r^2 + \dfrac{GMm}{E} r - \dfrac{m\mathcal{C}^2}{2E} = 0$

$S_{racines} = r_{max} + r_{min} = -\dfrac{GMm}{E}$

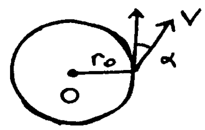
$P_{racines} = r_{max}\, r_{min} = -\dfrac{m\,\mathcal{C}^2}{2E}$

d'où $\mathcal{C}^2 = GM \dfrac{2 r_{max} r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$

$\mathcal{C}^2 = GM\,p$

$$T = \frac{2\pi a \; a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{GM}\;\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

1°)



Les deux constantes du mouvement :

$$E = E_{\text{trajectoire circulaire}}$$

$$\boxed{E = -\frac{GMm}{2r_0}}$$

$$\overrightarrow{L_{(O)}} = \overrightarrow{r_0} \wedge m\overrightarrow{V}$$

$$L_{(O)} = r_0 \, m\sqrt{\frac{GM}{r_0}} \, \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$\boxed{L_{(O)} = m\sqrt{GMr_0}\,\cos(\alpha)}$$

→ nature de la trajectoire :

On sait que (cf force en $\frac{\vec{e_r}}{r^2}$) la trajectoire est une <u>conique</u>.
De plus $\boxed{E<0}$ c'est donc un <u>état lié</u> (pas de points à l'infini)

$\boxed{\text{La trajectoire est une ellipse.}}$

→ r_A et r_P

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + \cancel{\dot{r}^2})$$

nul en A et en P

$$= -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}m\,r^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2$$

donc

$$r^2 + \frac{GMm}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0$$

La somme des racines $r_A + r_P = 2a$
et vaut donc $2a = -\frac{GMm}{E}$
soit $E = -\frac{GMm}{2a}$ (l'énergie ne dépend que du grand axe)

On reporte les valeurs de E et L pour obtenir l'équation du second degré vérifiée par r_A et r_P

$$\boxed{r^2 - 2r_0\, r + r_0^2 \cos^2\alpha = 0}$$

$$r_{\substack{max\\min}} = r_0 \pm \sqrt{r_0^2 - r_0^2\cos^2\alpha}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} r_A = r_{max} = r_0\,(1+\sin\alpha) \\ r_P = r_{min} = r_0\,(1-\sin\alpha) \end{array}}$$

→ le demi-grand axe

$$2a = r_{max} + r_{min}$$

$$\boxed{a = r_0}$$

Prévisible : l'énergie est la même que pour le cercle de diamètre $2r_0$.
Or l'énergie ne dépend que du grand axe
donc $2a = 2r_0$

→ l'excentricité et le paramètre

on a vu que $r_A = \dfrac{P}{1-e}$ et $r_P = \dfrac{P}{1+e}$

d'où

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$$

$$\boxed{e = \sin\alpha}$$

puis

$$r_A = r_0\,(1+\sin\alpha) = \frac{P}{1-\sin\alpha}$$

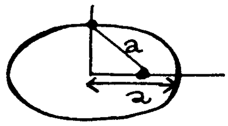
$$\boxed{P = r_0\cos^2\alpha}$$

remarque

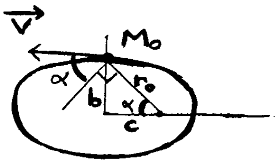
Si on a quelque idée des propriétés de l'ellipse, ces résultats sont facilement compréhensibles

cf on a vu (cf énergie) $2a = 2r_0$

or :



d'où puisque le rayon en $t=0$ vaut $r_0 = a$ la position de lancement est en M_0 (voir la figure)



On retrouve α sur la figure d'où

en plus de : $a = r_0$

on a donc : $b = r_0 \sin\alpha$

$c = r_0 \cos\alpha$

et : $e = \frac{c}{a} = \cos\alpha$

$r_{max} = a + c = r_0(1+\cos\alpha)$

$r_{min} = a - c = r_0(1-\cos\alpha)$

---

11) On cherche la vitesse de libération en $r = r_0$

Donc $E = 0$

$$= -\frac{GMm}{r_0} + \frac{1}{2} m V_1^2$$

on trouve $\boxed{V_1 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = \sqrt{2}\ V_0}$

V_1 : vitesse de libération en $r = r_0$

V_0 : vitesse en orbite circulaire de rayon r_0

---

12) $\Delta V = 4 V_0$

On écrit la conservation de l'énergie

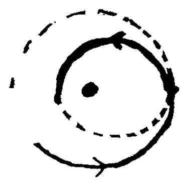
$$E_{P\,\text{depart}} + E_{c\,\text{depart}} = E_{P\,\text{infini}} + E_{c\,\text{infini}}$$

$$\underbrace{-\frac{GMm}{r_0}}_{-mV_0^2} + \frac{1}{2} m (5V_0)^2 = 0 + \frac{1}{2} m V_\infty^2$$

donc $\boxed{V_\infty = \sqrt{23}\ V_0}$

---

13)



La vitesse passe de V_0 à $\frac{V_0}{2}$

Ce point devient alors l'apogée de la nouvelle ellipse

(cf. $\vec{v} \perp \vec{r}$

cf. $v < v_{circulaire}$)

→ énergie mécanique de la nouvelle trajectoire

$$E = E_P + E_c$$

$$= -\frac{GMm}{r_0} + \frac{1}{2} m \left(\frac{V_0}{2}\right)^2$$

$$E = -\frac{GMm}{\left(\frac{8}{7} r_0\right)}$$

donc $\boxed{2a = \frac{8}{7} r_0}$

→ r_A et r_P

donc
$$\boxed{\begin{array}{l} r_A = r_0 \\ r_P = \frac{r_0}{7} \end{array}}$$

→ V_A et V_P

A l'apogée et au périgée, $\vec{v}$ et $\vec{r}$ sont perpendiculaires donc $L = mrv\ \cancel{\sin(\vec{r},\vec{v})}$ en ces deux points.

avec $L(0) = r_0 \, m \, \frac{V_0}{2}$

$$L^2 = \frac{1}{4} m^2 G M r_0$$
$$= m^2 r_A^2 V_A^2$$
$$= m^2 r_P^2 V_P^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} V_A = \frac{V_0}{2} \\ V_P = 7 \frac{V_0}{2} \end{array}}$$

$\longrightarrow$ il faut que $r_P > R_T$ (sinon l'astre s'écrase au sol...)

---

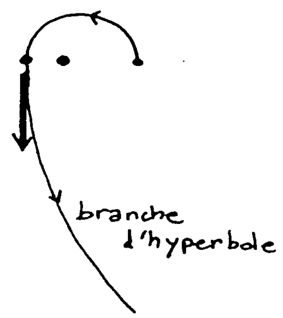
14) Au périgée $(r_P = \frac{r_0}{7})$ on augmente la vitesse de $\frac{7V_0}{2}$ (reste du budget) donc $V = \frac{7V_0}{2} + \frac{7V_0}{2} = 7V_0$

Pour cette nouvelle trajectoire :

$$E = E_P + E_C$$
$$= -\frac{GMm}{r_0/7} + \frac{1}{2} m (7V_0)^2$$

$$\boxed{E = \frac{35}{2} \frac{GMm}{r_0} \quad \text{ou} \quad \frac{35}{2} m V_0^2}$$

$E > 0$ donc la conique est une branche d'hyperbole.



A l'infini, E_P est nul donc

$$E = \frac{1}{2} m V_\infty^2 = \frac{35}{2} m V_0^2$$

$$\boxed{V_\infty = \sqrt{35} \; V_0}$$

---

15) La seconde méthode est supérieure.
Ce n'est pas tant le "budget vitesse" qui est important mais le budget énergie.

→ dans la première solution, l'apport d'énergie a été de $\Delta E = \frac{1}{2} m \left((5V_0)^2 - (V_0)^2 \right) = \underline{12\, m V_0^2}$

→ dans la seconde solution, l'apport d'énergie a été de

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta E_1 + \Delta E_2 \\ &= \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{V_0}{2}\right)^2 - (V_0)^2 \right) + \frac{1}{2} m \left((7V_0)^2 - \left(\frac{7V_0}{2}\right)^2 \right) \\ &= -\frac{3}{8} m V_0^2 + \frac{3}{8} m\, 49 V_0^2 \\ &= \underline{18\, m V_0^2} \end{aligned}$$

<u>L'apport d'énergie a été plus important pour la deuxième solution.</u> Il est normal que V_∞ soit plus grand alors.

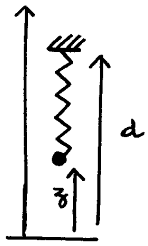
Microscope à force atomique

1)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{force d'attraction :} & F(z) < 0 \\ \text{force de répulsion :} & F(z) > 0 \end{array}}$$

---

2)



longueur du ressort : $\ell = d - z$
(voir figure)

longueur du ressort à vide : ℓ_0

Si $\ell - \ell_0 > 0$, la force de rappel est selon l'axe z donc

$$\overrightarrow{F_{rappel}} = k\,(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{u_z}$$

et puisque l'on néglige ℓ_0

$$\boxed{\overrightarrow{F_{rappel}} = k\,(d - z)\,\overrightarrow{u_z}}$$

> dans ce modèle, pour traduire une force de rappel négative il faut $\ell\ (= d - z) < \ell_0\ (= 0)$
> soit $d < z$

---

3)

$$\overrightarrow{F}_{surface \to pointe} + \overrightarrow{F}_{rappel} + \overrightarrow{F}_{exc} + \overrightarrow{F}_{frottement} = m\,\overrightarrow{a}$$

$$\boxed{F(z) + k(d - z) + F_0 \cos(\omega t) - \gamma \frac{dz}{dt} = m \frac{d^2 z}{dt^2}}$$

---

4) En mode contact, à l'équilibre en z_0 (donc $\ddot{z} = 0$)

$$\boxed{F(z_0) + k(d - z_0) = 0}$$

---

5) Au voisinage de z_0, en z, ce n'est plus l'équilibre donc

$$F(z) + k(d - z) = m \frac{d^2 z}{dt^2}$$

en travaillant au premier ordre en $(z-z_0)$

$$\underbrace{F(z_0) + (z-z_0)\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0}} \quad + k(d-z) \quad = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

On soustrait l'équation 4) traduisant l'équilibre

$$(z-z_0)\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0} \quad - k(z-z_0) \quad = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

avec $(z-z_0) = \varepsilon$

$$\boxed{\left(\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}\right) + \frac{\left[k - \left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0}\right]}{m}\,\varepsilon = 0}$$

Le mouvement, au voisinage de la position d'équilibre, est oscillatoire si $k-\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0}$ est positif. L'équilibre est donc <u>stable</u> (oscillations traduisant l'existence d'une <u>force de rappel vers la position d'équilibre</u>)

---

6) → L'énergie potentielle est $U = A\ z^{-7} - B\ z^{-1}$

La force est $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ soit selon z :

$$\boxed{F = -\frac{dU}{dz} = 7A\ z^{-8} - B\ z^{-2}}$$

Le terme positif	$7A\ z^{-8}$	est une force d'attraction
Le terme négatif	$-B\ z^{-2}$	est une force de répulsion

(cf 1))

→ Il y a globalement <u>attraction si $F > 0$</u> soit

$$7A\ z^{-8} > B\ z^{-2}$$

$$z^{-6} > \frac{B}{7A}$$

attraction si	z	$<$	$\left(\frac{7A}{B}\right)^{1/6}$
repulsion si	z	$>$	idem

A.N. $z_{limite} = \left(\frac{7A}{B}\right)^{1/6}$

$$= \left(\frac{7\ 10^{-88}}{10^{-29}}\right)^{1/6}$$

$\boxed{z_{limite} = 0{,}203\ \text{nm}}$ (correspond à la figure proposée)

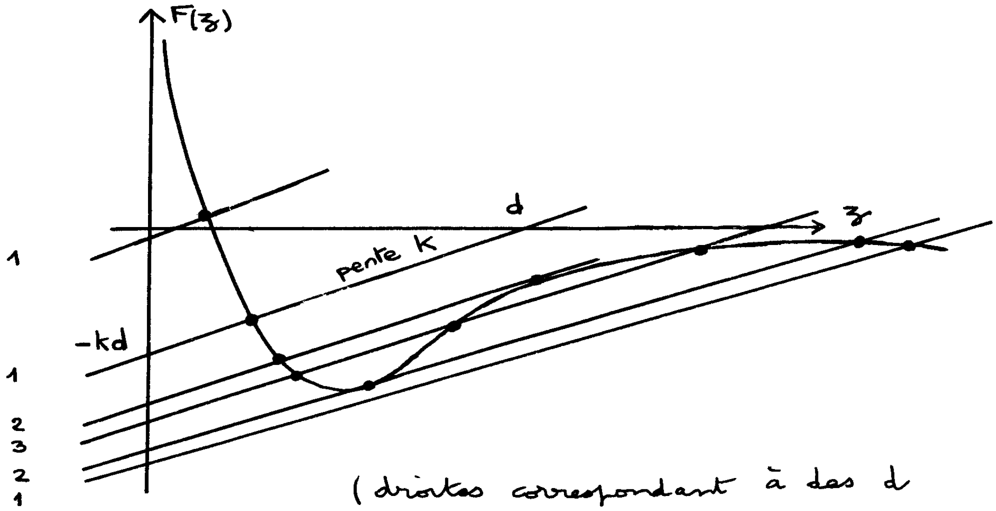
7) La position d'équilibre $z = z_0$ vérifie

$$F(z) + k(d - z) = 0$$

$$\boxed{\underbrace{F(z)}_{F_{surface \to pointe}} = \underbrace{k(z - d)}_{-F_{rappel}}}$$

On l'obtient <u>en traçant sur le graphe $F(z)$ la droite d'équation $k(z-d)$</u>.

<u>Le(s) point(s)</u> d'intersection correspond(ent) à l'équilibre



(droites correspondant à des d différents)

On constate sur la figure 1, 2, 3 positions d'équilibre pour k donné selon la valeur de d.

---

8) Si $k - \left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0}$ est toujours positif la position d'équilibre est toujours stable. Il suffit de choisir $\boxed{k > \left(\frac{dF}{dz}\right)_{MAX}}$

Calculs :

$$F = 7A\, z^{-8} - B\, z^{-2}$$

$$\frac{dF}{dz} = -56\, A\, z^{-9} + 2B\, z^{-3}$$

$$\frac{d^2F}{dz^2} = 504\, A\, z^{-10} - 6B\, z^{-4}$$

nul pour $z = \left(\frac{84\,A}{B}\right)^{1/6}$

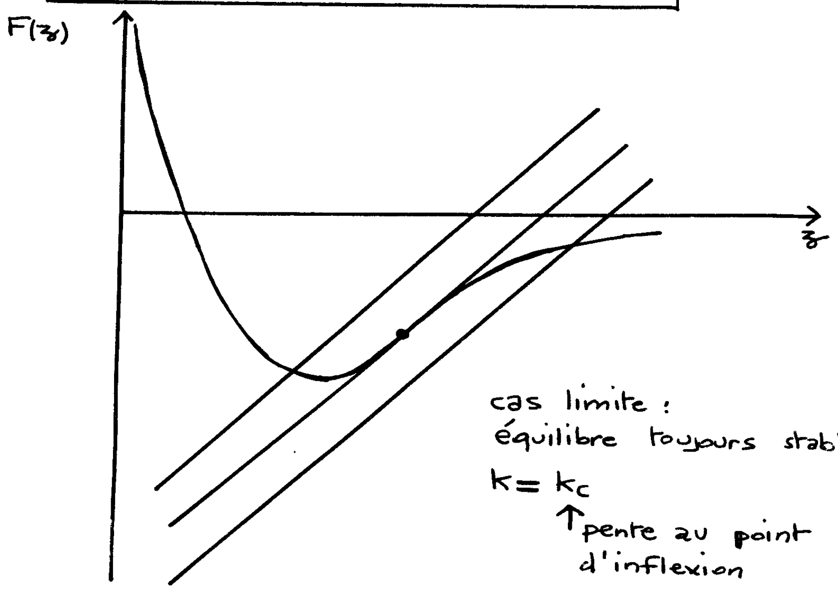
d'où l'extremum de $\frac{dF}{dz}$ (dont on admettra sans calcul que c'est bien un maximum – evident sur la figure –)

$$\left(\frac{dF}{dz}\right)_{MAX} = \left(-56\,A\,\frac{B}{84A} + 2B\right)\left(\frac{B}{84A}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{k_c = \frac{2B\sqrt{B}}{3\sqrt{21A}}}$$

A.N.

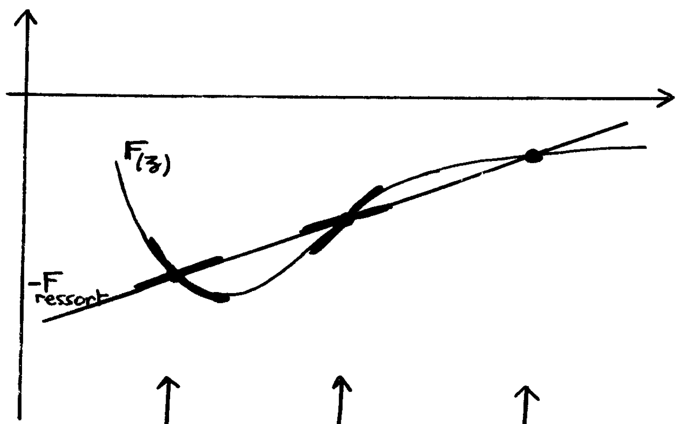
$$\boxed{k_c = 0{,}46 \quad N\,m^{-1}}$$



cas limite :
équilibre toujours stable
$k = k_c$
↑ pente au point d'inflexion

---

remarque

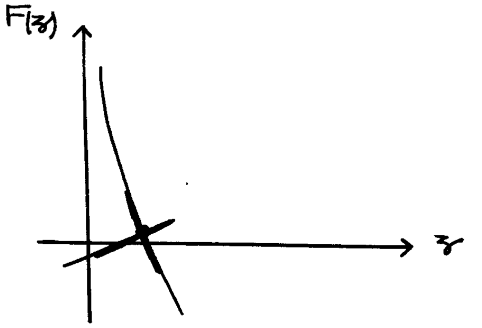


(à droite et à gauche, la force F(z) + Fressort fait revenir le point)

9) L'équilibre est stable si $k - \underbrace{\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0}}_{<0} > 0$

or ici $\left(\frac{dF}{dz}\right) < 0$

Donc $\boxed{\text{équilibre stable de manière evidente.}}$



---

10) On fait varier d de δd (variation "très petite")

La valeur de z_0 varie alors de δz_0

On avait :

$$\underbrace{F(z_0)} + k(d - z_0) = 0$$

$$F(z_0) + \delta z \left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0} + k\left(d + \delta d - (z_0 + \delta z_0)\right) = 0$$

D'où (on pouvait obtenir directement par un calcul différentiel)

$$\delta z_0 \left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0} + k\,(\delta d - \delta z_0) = 0$$

$$\boxed{\delta z_0 = \frac{\delta d}{1 - \frac{1}{k}\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0}}}$$

---

11) A.N. $\boxed{\delta z_0 = \delta d \,\frac{1}{56{,}8}}$

L'allongement (noté ℓ ici) varie donc de :

$$\ell = d - z_0$$

$$\delta \ell = \delta d - \delta z_0$$

$$= \delta d \left(1 - \frac{1}{56{,}8}\right)$$

$$\boxed{\delta \ell \simeq \delta d}$$

L'allongement donne δd donc permet de suivre les variations de d soit la topographie de la surface

---

12)
$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}(z-d) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\gamma}{m}$$

soit

$$\boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\gamma}}$$

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dz}{dt} + \omega_0^2(z-d) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

---

13) On travaille en complexes pour obtenir le régime forcé.

$$\underline{z}-d = \frac{\frac{F_0}{m}\exp(j\omega t)}{(\omega_0^2-\omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

$$= \frac{\frac{F_0}{m\omega_0^2}\exp(j\omega t)}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j\frac{\omega/\omega_0}{Q}}$$ soit pour le module :

$$\boxed{A(x) = \frac{A_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}}$$

avec

$$\boxed{A_0 = \frac{F_0}{k}}$$

(réponse en régime statique)

---

14) Pour trouver le maximum de $A(x)$ on dérive

$$D = (1-u)^2 + \frac{u}{Q^2} \qquad (\text{avec } u = x^2)$$

$$\frac{dD}{du} = -2(1-u) + \frac{1}{Q^2} = 0$$

La pulsation de résonance est donnée par :

$$u = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

$$\boxed{\omega_R = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$$

L'amplitude maximale vaut :

$$A_R = \frac{A_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)}}$$

$$\boxed{A_R = \frac{A_0\, Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$$

---

15) au premier ordre en $1/Q$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_R &= \omega_0 \\ A_R &= A_0\, Q \end{aligned}}$$

Pour une résonance d'amplitude, la bande passante est quasiment identique à la bande passante pour une résonance de vitesse si Q est "grand" $(Q \gg 1)$.

On se propose de le vérifier ici (au premier ordre en $\frac{1}{Q}$)

$$x_{B.P.} = \left(1 \mp \frac{1}{2Q}\right)$$

$$A(x_{B.P.}) = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1-1 \pm \frac{1}{Q} - \frac{1}{4Q^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(1 \mp \frac{1}{Q} + \frac{1}{4Q^2}\right)}}$$

$$\boxed{A\left(\begin{smallmatrix} x_H \\ x_B \end{smallmatrix}\right) = \frac{A_0\, Q}{\sqrt{2}} = \frac{A_R}{\sqrt{2}}}$$

Donc

$$\Delta\omega_{B.P.} = \omega_H - \omega_B$$

$$\boxed{\Delta\omega_{B.P.} = \frac{\omega_0}{Q}}$$

---

16)
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}(z-d) - \frac{F(z)}{m} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$\frac{k}{m}(z_0-d) - \frac{F(z_0)}{m} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}(z-z_0) - \frac{(F(z)-F(z_0))}{m} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t}$$

---

17) avec $F(z) = F(z_0) + (z-z_0)\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0}$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dz}{dt} + \frac{\left(k - \left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0}\right)}{m}(z - z_0) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$\boxed{k^* = k - \left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0}}$$

---

18)
$$\omega_0^* = \sqrt{\frac{k^*}{m}}$$
$$= \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0}}{k}}$$
$$\simeq \omega_0\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0}}{k}\right)$$

$$\boxed{\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = -\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0}}{k}}$$

Les variations étant très "petites", le calcul différentiel était utilisable.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\ln\omega_0 = \frac{1}{2}\ln k - \frac{1}{2}\ln m$$
$$\frac{d\omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2}\frac{dk}{k}$$
$$\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2}\frac{-\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0}}{k}$$

---

19) En se basant sur la courbe $F(z)$

$$\boxed{\begin{array}{l} F(z_0) < 0 \\ \left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0} > 0 \end{array}}$$

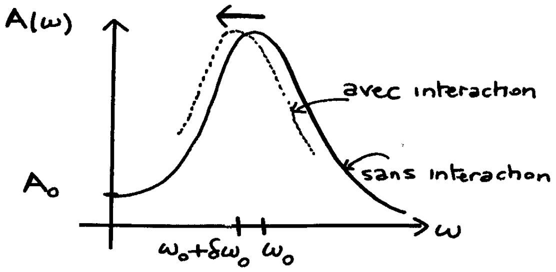
---

20)
$$\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} < 0$$ le pic de résonance se déplace vers les basses fréquences ($\delta k < 0$)

$$A_0 = \frac{F_0}{k}$$ A_0 augmente

$$Q = \frac{\sqrt{km}}{\gamma}$$ Q diminue

vu la supposition où l'on ne tient compte que de $\delta\omega_0 < 0$



---

21) A.N. $\dfrac{\delta N_0}{N_0} = -\dfrac{1/2\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0}}{k}$

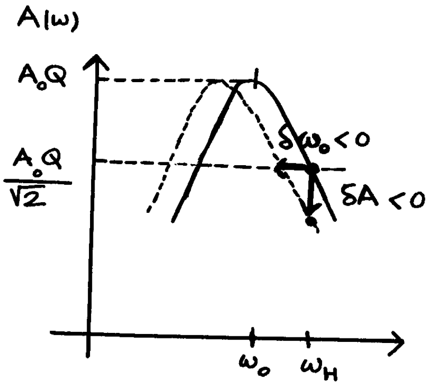
$$\boxed{\frac{\delta N_0}{N_0} = -0{,}1\ 10^{-3}}$$ (effectivement $\ll 1$)

$$\boxed{\delta N_0 = -20\ \text{Hz}}$$

---

22)

→



→ il vaut mieux se placer en ω_H plutôt qu'en ω_0 car la pente est plus intéressante et la variation $|\delta A|$ à cause de $F(z)$ sera plus grande.

→ $$A = \frac{A_0}{\sqrt{(1-u)^2 + \frac{u}{Q^2}}}$$

$$\ln A = \ln A_0 - \frac{1}{2}\ln\left[(1-u)^2 + \frac{u}{Q^2}\right]$$

on différencie (Q et A_0 sont assimilés à des constantes)

$$\frac{dA}{A} = -\frac{1}{2}\ \frac{2(1-u)\times -1 + \frac{1}{Q^2}}{(1-u)^2 + \frac{u}{Q^2}}\ du$$

avec $u = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$

$\ln u = 2\ln\omega - 2\ln\omega_0$

$\frac{du}{u} = \qquad -2\frac{d\omega_0}{\omega_0}$

$$\frac{dA}{A} = \frac{-2 + 2u + \frac{1}{Q^2}}{(1-u)^2 + \frac{u}{Q^2}}\ u\ \frac{d\omega_0}{\omega_0}$$

ici on a $A = \frac{A_0 Q}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{u} = 1 + \frac{1}{2Q}$

finalement

$$\frac{\delta A}{A_0 Q/\sqrt{2}} = \frac{(2/Q + \cancel{3/2Q^2})}{(\sqrt{2}/Q)^2}\left(1 + \cancel{\frac{1}{Q}} + \cancel{\frac{1}{4Q^2}}\right)\ \frac{\delta\omega_0}{\omega_0}$$

↑ voir + haut en 15)

$$\boxed{\frac{\delta A}{A_0 Q/\sqrt{2}} = Q\ \frac{\delta\omega_0}{\omega_0}}$$

→ A.N.

$A_0 = 0{,}5\ \text{nm}$

$A_R = A_0 Q = 50\ \text{nm}$

$A_{B.P.} = \frac{A_R}{\sqrt{2}} = 35\ \text{nm}$

$$\boxed{\delta A = -0{,}35\ \text{nm}}$$

donc $\left|\frac{\delta A}{A_{B.P.}}\right| = 10^{-2}$ (le calcul différentiel est justifié ...)

---

23) $\frac{\delta A}{A_{B.P.}}$ plus grand si $\frac{\delta\omega_0}{\omega_0}$ plus grand.

Il faut donc diminuer k mais si $k < 0{,}46\ \text{N m}^{-1}$, il apparait des positions d'équilibre instables.
