DNS

Sujet

Sphère supraconductrice parfaite dans un champ B

Les lettres en gras représentent des grandeurs vectorielles

I. Préliminaires: sphère avec répartition surfacique de courant en $\sin\theta\,\mathbf{u}_\varphi$

On considère une sphère de centre O et de rayon R. La répartition des courants est surfacique et de densité (en A.m^{-1}) $\mathbf{j}_S$ (P) $= j_S(\theta)\,\mathbf{u}_\varphi$ avec $j_S(\theta) = j_o \sin\theta$. On désigne par θ l'angle ($\mathbf{u}_z$, **OP**) et par $\mathbf{u}_\varphi$ le vecteur unitaire associé au repère des coordonnées sphériques.

On considère une spire élémentaire d'axe Oz. Cette spire élémentaire est donc parcourue par un courant élémentaire selon $\mathbf{u}_\varphi$: $dI = j_S(\theta)\,R\,d\theta$. Elle crée en O un champ magnétique élémentaire d**B** (O) et possède un moment magnétique élémentaire d$\boldsymbol{M}$.

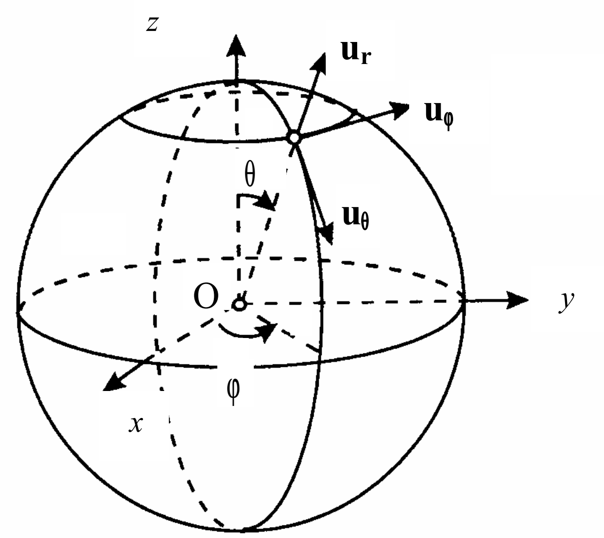
1. Justifier que $dI = j_S(\theta)\,R\,d\theta$. *(Si, on ne sait pas répondre à cette question, on admettra le résultat)*
2. Exprimer le champ magnétique élémentaire d**B** (O)
3. En déduire **B** (O) crée par une telle distribution de courant, au centre de la sphère ; on considère cette distribution comme une assemblée de spires élémentaires coaxiales.
4. Exprimer le moment magnétique élémentaire d$\boldsymbol{M}$
5. En assimilant cette distribution à une assemblée de spires élémentaires coaxiales, calculer le moment dipolaire $\boldsymbol{M}$ associé à la sphère.

On admet que le champ à l'intérieur de la sphère est uniforme et que le champ à l'extérieur de la sphère est celui qui est créé par le dipôle $\boldsymbol{M}$ placé au centre O.

6. Expliciter $\mathbf{B}_{int}$ à l'intérieur de la sphère et $\mathbf{B}_{ext}$ à l'extérieur dans la base sphérique ($\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{u}_\varphi$).

7. Déterminer $\mathbf{B}_{ext}(r=R+)$ et $\mathbf{B}_{int}(r=R-)$. La discontinuité à la traversée de la couche surfacique de courant est-elle normale ou tangentielle?

8. Vérifier que l' hypothèse précédente est compatible avec les conditions aux limites en $r = R$ pour le champ magnétique: $\mathbf{B}_{ext}(r=R+) - \mathbf{B}_{int}(r=R-)=\mu_0\ \mathbf{j}_S \wedge \mathbf{n}_{int->ext}$



II. Sphère supraconductrice dans un champ uniforme

Un échantillon sphérique, de rayon R, d'un matériau supraconducteur, plongé dans le vide, est soumis à l'action d'un champ magnétique uniforme $\mathbf{B_o} = B_o\ \mathbf{u}_z$. Ce supraconducteur est parfait : il apparaît alors des « courants supraconducteurs » surfaciques de telle sorte que à l'intérieur du supraconducteur, le champ magnétique total **B** soit nul. On se propose de vérifier qu'une répartition de courant supraconducteur surfacique de la forme $\mathbf{j}_S\ (P) = j_S\ (\theta)\ \hat{\mathbf{e}}_\varphi$ avec $j_S\ (\theta) = j_o \sin\theta$ convient.

9. Justifier cette solution en commentant la valeur de **B** à grande distance, de **B** en r = R+, de **B** intérieur à la sphère et déduire de l'étude précédente l'expression de j_o en fonction de B_o . *(Dans la suite, j_o ne doit plus intervenir dans l'expression des résultats).*

10. Donner l'expression de ***M***.

11. Donner l'allure des lignes de **B** à l'extérieur de la sphère supraconductrice. On partira de la connaissance des lignes à grande distance et au voisinage de la sphère.

12. Donner l'expression de **B** total à l'extérieur de la sphère.

13. Quelle est l'expression de **B** pour des points Q situés à l'extérieur mais au voisinage immédiat de la sphère. Commenter. Pour ces points Q, tracer le graphe de $B=\|\mathbf{B}\|$ en fonction de la colatitude θ.

III. Transition de l'état supraconducteur à l'état normal

On augmente progressivement le champ appliqué $\mathbf{B}_o$. Quand la supraconductivité cesse, la sphère se retrouve dans l'état normal et se comporte comme un conducteur usuel non magnétique.

14.Sachant que la transition de l'état supraconducteur vers l'état normal apparaît quand la norme du champ magnétique à la surface du matériau atteint une valeur critique B_c préciser dans quelle zone de l'échantillon sphérique débute la transition de l'état supraconducteur vers l'état conducteur et pour quelle valeur de champ appliqué.

15.Pour quelle valeur de champ appliqué, la sphère est elle entièrement à l'état normal?

IV. Lévitation magnétique

Une sphère à l'état supraconducteur parfait est placée dans un champ magnétique $\mathbf{B}_o$.

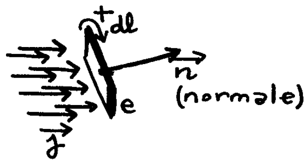
16.Montrer que si le champ est uniforme, la force résultante exercée par le champ appliqué sur les courants surfaciques est nulle.

17.On augmente le champ appliqué de $d\mathbf{B}_o$. On admet que la variation de l'énergie potentielle d'interaction du dipôle $\boldsymbol{M} = -k\,\mathbf{B}_o$ avec le champ s'écrit $dE_P = -\,d\boldsymbol{M}.\,\mathbf{B}_o$. En déduire E_P en fonction de $\mathbf{B}_o$.

18.Le champ $\mathbf{B}_o$ n'est plus uniforme mais varie faiblement sur une distance de l'ordre de grandeur du rayon R de la sphère. Montrer par un raisonnement énergétique que cette dernière est repoussée vers les régions de plus faible champ (lévitation magnétique).

Réponses

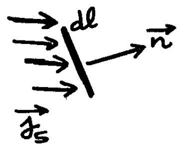
1)



Pour du courant volumique $\vec{j}$

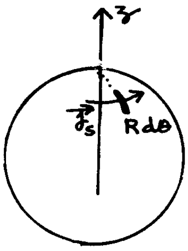
$$dI = \vec{j}\ \overrightarrow{dS}$$
$$= \vec{j}\ dS\ \vec{n}$$
$$= \underbrace{\vec{j}\,e}\ dl\ \vec{n}$$

(e épaisseur selon z de cette petite couche de courant)



Pour du courant surfacique $\vec{j_S}$

$$dI = \vec{j_S}\ dl\ \vec{n}$$



Ici $\vec{j_S} = j_S(\theta)\,\vec{u_\varphi}$

$dl = R\,d\theta$

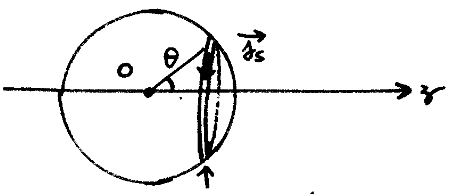
$\vec{n} = \vec{u_\varphi}$

$$dI = j_S(\theta)\ R\,d\theta$$

$$\boxed{dI = j_0 \sin\theta\ R\ d\theta}$$

---

2)



spire : $\vec{B} = \dfrac{\mu_0\ I\ \sin^3\alpha}{2R}\ \vec{u_z}$

ici, spire élémentaire :

$$d\vec{B}_{(O)} = \frac{\mu_0\ dI\ \sin^3\theta}{2(R\sin\theta)}\ \vec{u_z}$$

$$\boxed{d\vec{B}_{(0)} = \frac{\mu_0 j_0}{2} \sin^3\theta \, d\theta \, \vec{u_z}}$$

---

3) On intègre avec $\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{4}{3}$

$$\boxed{\vec{B}(0) = \frac{2}{3} \mu_0 j_0 \vec{u_z}}$$

---

4) moment magnétique pour une spire de rayon R

$$\vec{M} = I \, \pi R^2 \vec{u_z}$$

ici spire élémentaire :

$$d\vec{M} = dI \, \pi \, (R \sin\theta)^2 \vec{u_z}$$

$$\boxed{d\vec{M} = \pi R^3 j_0 \sin^3\theta \, d\theta \, \vec{u_z}}$$

---

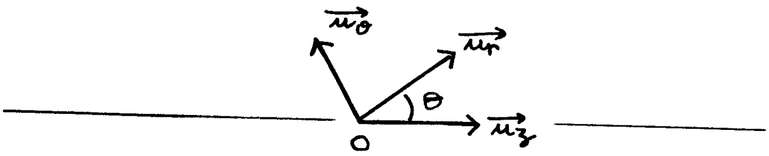
5) on intègre : $\boxed{\vec{M} = \frac{4}{3} \pi R^3 j_0 \vec{u_z}}$

---

6)

$$\vec{B}_{int} = \frac{2}{3} \mu_0 j_0 \vec{u_z}$$

$$\boxed{\vec{B}_{int} = \frac{2}{3} \mu_0 j_0 \left(\cos\theta \, \vec{u_r} - \sin\theta \, \vec{u_\theta}\right)}$$



$\vec{B}_{ext}$ est le champ créé par un dipôle magnétique

$$\vec{B}_{ext} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \left(2\cos\theta \, \vec{u_r} + \sin\theta \, \vec{u_\theta}\right)$$

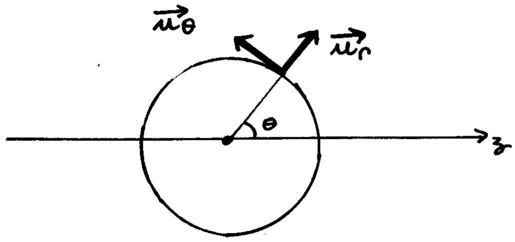
$$\boxed{\vec{B}_{ext} = \frac{\mu_0 j_0}{3} \frac{R^3}{r^3} \left(2\cos\theta \, \vec{u_r} + \sin\theta \, \vec{u_\theta}\right)}$$

---

7)

$$\vec{B}_{int}(r=R^-) = \frac{2}{3} \mu_0 j_0 \left(\cos\theta \, \vec{u_r} - \sin\theta \, \vec{u_\theta}\right)$$

$$\vec{B}_{ext}(r=R^+) = \frac{2}{3} \mu_0 j_0 \left(\cos\theta \, \vec{u_r} + \frac{\sin\theta}{2} \vec{u_\theta}\right)$$



selon $\vec{u_r}$ (direction radiale, ici normale)
B_r est continu en R

selon $\vec{u_\theta}$ (direction orthoradiale, ici tangentielle)
B_θ est discontinu.

Il y a discontinuité tangentielle de $\vec{B}$ à la traversée de la nappe de courant.

---

8) On vérifie :

$$\vec{B}_{ext}(R) - \vec{B}_{int}(R) \overset{?}{=} \mu_0 \vec{J_S} \wedge \vec{n}_{int \to ext}$$

$$\mu_0 J_0 \sin\theta \, \vec{u_\theta} \overset{?}{=} \mu_0 J_0 \sin\theta \underbrace{\vec{u_\varphi} \wedge \vec{u_r}}_{\vec{u_\theta}}$$

La relation générale est vérifiée

---

9) - à grande distance, la sphère supraconductrice crée un champ en $\frac{1}{r^3}$ (cf dipôle à l'extérieur de la sphère). Donc le champ tend vers le champ uniforme imposé.

- la discontinuité de $\vec{B}$ doit être tangentielle. Ce sera le cas (cf champ uniforme continu et champ de la sphère à discontinuité tangentielle - vu aux deux questions précédentes -)

- à l'intérieur le champ doit être nul. C'est possible puisque le champ extérieur est uniforme et le champ créé par la sphère l'est aussi.

---

10) A l'intérieur :

$$\overrightarrow{B}_{total} = B_o \overrightarrow{u_z} + \frac{2}{3}\mu_o J_o \overrightarrow{u_z}$$

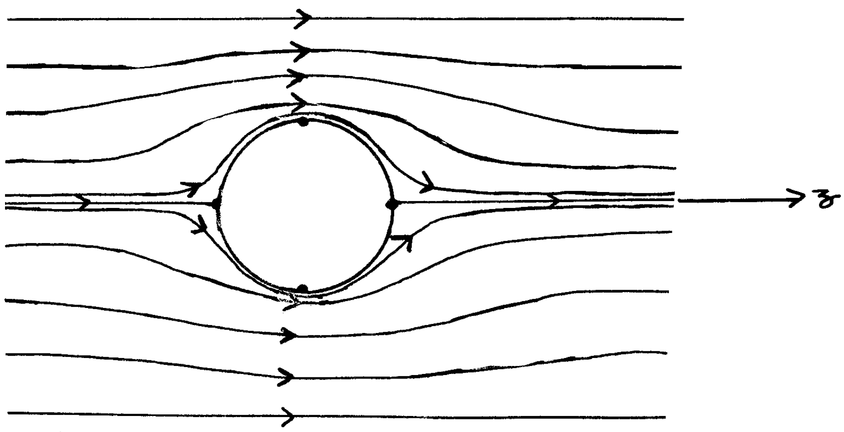
donc
$$\boxed{J_o = -\frac{3}{2}\frac{B_o}{\mu_o}}$$

$$\overrightarrow{M} = \frac{4}{3}\pi R^3 J_o \overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M} = -\frac{2\pi R^3}{\mu_o}\overrightarrow{B_o}}$$

---

11) Le champ en surface est purement tangentiel
Le champ au loin tend vers le champ uniforme imposé



---

12) $\overrightarrow{B}_{int} = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{B}_{ext} = B_o \overrightarrow{u_z} + \overrightarrow{B}_{\text{dipôle magnétique}}$$

(avec $J_o = -\frac{3B_o}{2\mu_o}$)

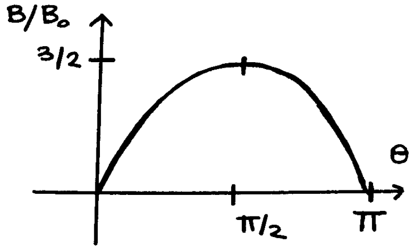
$$\boxed{\overrightarrow{B}_{ext} = B_o \cos\theta \left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)\overrightarrow{u_r} - B_o \sin\theta \left(1+\frac{R^3}{2r^3}\right)\overrightarrow{u_\theta}}$$

---

13) En $r = R^+$

$$\boxed{\overrightarrow{B}_{ext(R)} = -\frac{3}{2} B_o \sin\theta \, \overrightarrow{u_\theta}}$$

$$\|\vec{B}\| = \frac{3}{2} B_o \sin\theta$$



14) La transition vers l'état normal apparaît donc d'abord en $\theta = \frac{\pi}{2}$ sur le cercle équatorial où B est le plus grand.

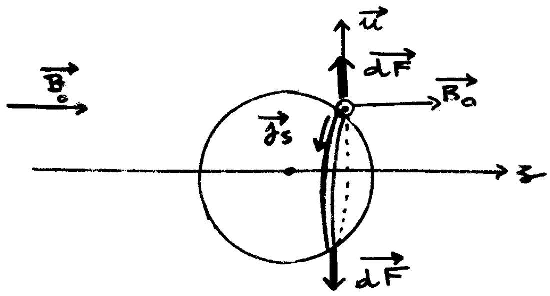
Le champ appliqué est tel que $\frac{3}{2} B_o = B_c$

$$\boxed{B_o = \frac{2}{3} B_c}$$

15) Si la sphère est entièrement à l'état normal, le champ à l'intérieur est égal au champ appliqué.
Il faut donc atteindre

$$\boxed{B_o = B_c}$$

16)



Pour une surface $dS = R\,d\theta\, R\sin\theta\, d\varphi$,
$\overrightarrow{dF}_{Laplace} = \vec{j_s}\, dS \wedge \vec{B_o}$ donc selon $\vec{u}$.
Vu la symétrie, les $\overrightarrow{dF}$ s'annulent deux à deux et

$$\boxed{\vec{F} = \vec{0}}$$

17) $dE_P = -\,d\overrightarrow{M}\;\overrightarrow{B_o}$

$= K\overrightarrow{B_o}\;d\overrightarrow{B_o}$ $\left(K = \dfrac{2\pi R^3}{\mu_o} \text{ vu en 10)}\right)$

$\boxed{E_P = \frac{1}{2} K B_o^2} + \cancel{cste}$

en choisissant E_P nulle en l'absence de champ.

---

18) Si la formule reste valable dans un champ variant faiblement dans l'espace, on sait que la sphère "cherche" à avoir une E_P minimale. Elle se dirige vers les champs plus faibles donc loin des sources de champ B_o = phénomène de lévitation.
