DS Sciences Physiques MathSpé

Concours blanc

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Modulateur optique

Pour transporter de l'information à distance à l'air libre ou dans des fibres optiques, il est nécessaire de moduler l'amplitude des faisceaux de lumière visible ou infrarouge qui sont utilisés pour cela. Les ondes sont monochromatiques. On note ω leur pulsation et on désigne par λ leur longueur d'onde dans le vide.

On utilisera les notations complexes et la dépendance temporelle des ondes est en $\exp(j\omega t)$.

On prend $n=1$ pour l'indice de réfraction de l'air.

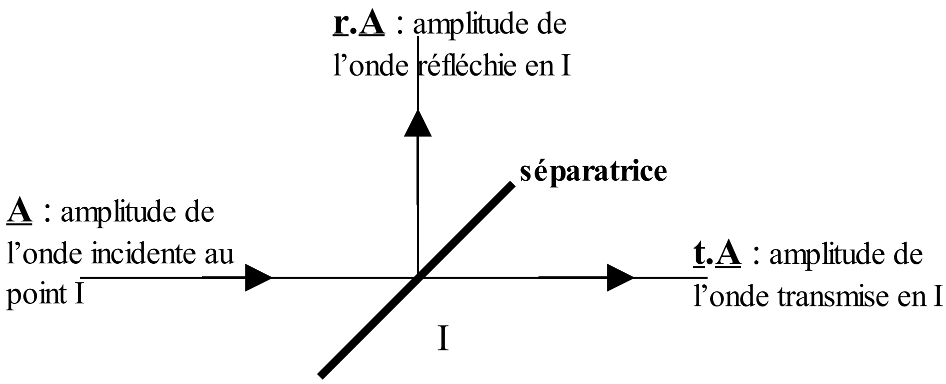
I. Interférence à deux ondes

On fait interférer deux ondes monochromatiques et cohérentes, de même intensité I_0 présentant une différence de phase φ .

1. Établir l'expression de l'intensité I d'interférence.

II. Étude d'une séparatrice

Les propriétés optiques d'une lame semi-transparente (séparatrice) sont décrites par un coefficient de réflexion en amplitude $\underline{r}$ et un coefficient de transmission en amplitude $\underline{t}$ (*voir figure*).



On donne pour la lame étudiée: $\underline{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{2}}=\frac{j}{\sqrt{2}}$ et $\underline{t}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Rappeler l'expression de l'intensité incidente I_0 en fonction de l'amplitude incidente $\underline{A}$ et écrire l'intensité réfléchie puis l'intensité transmise en fonction de $I_0, \underline{r}, \underline{t}$.
3. Montrer que la conservation de l'énergie implique une relation entre $\underline{r}, \underline{r}*, \underline{t}, \underline{t}*$. Quelle autre relation doit-on avoir pour que la lame soit effectivement semi-transparente.
4. Vérifier ces deux relations pour les valeurs numériques proposées.

III. Interféromètre de Mach-Zehnder

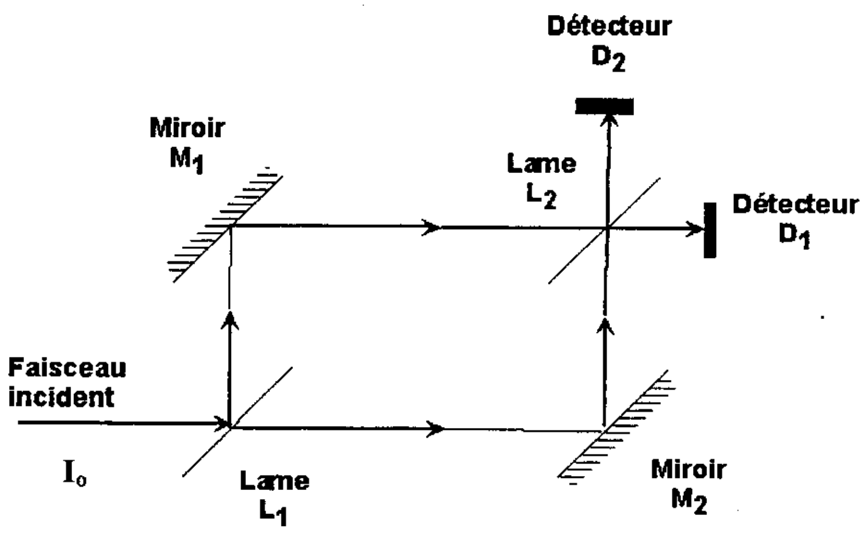


Figure 1 : Principe de l'interféromètre de Mach-Zehnder

L'interféromètre de Mach-Zehnder (*figure.1*) comporte deux miroirs identiques M_1 et M_2 et deux lames semi-transparentes identiques L_1 et L_2 . Miroirs et lames sont disposés à 45° de la direction des rayons lumineux.

Un faisceau laser incident de rayons parallèles, monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ et d'intensité I_0 est divisé en deux faisceaux "1" et "2" par la première lame L_1 . Après réflexion sur M_1 et M_2 , les faisceaux sont recombinés à la sortie de la deuxième lame L_2 . Deux détecteurs identiques, D_1 et D_2 , sont disponibles selon la sortie utilisée. Ces détecteurs sont quadratiques : ils fournissent une intensité proportionnelle au carré du module de l'onde arrivant sur le détecteur.

Les miroirs sont parfaitement réfléchissants, leur coefficient de réflexion en amplitude est égal à moins un: $\underline{r}_{M1}=\underline{r}_{M2}=-1$. Les propriétés optiques des lames sont décrites par le coefficient de réflexion en amplitude $\underline{r}$ et le coefficient de transmission en amplitude $\underline{t}$ donnés précédemment.

Les trajets $L_1M_1L_2$ et $L_1M_2L_2$ sont identiques et on note (L_0) le chemin optique correspondant qui ne tient compte ni des coefficients de réflexion des miroirs ni des coefficients de réflexion ou de transmission des lames L_1 et L_2 : $(L_0)=(L_1M_1L_2)=(L_1M_2L_2)$.

5. L'onde incidente sur la première lame L_1 est notée $\underline{A}=a_0\exp(j\omega t)$. Donner l'expression de l'onde après un parcours correspondant à un chemin optique supplémentaire de valeur L_0 en l'absence de toute réflexion et de toute transmission. La longueur d'onde dans le vide est notée λ .

6. Préciser les parcours des deux ondes qui arrivent sur le détecteur D_1 . Idem pour les deux ondes qui arrivent sur D_2 . Indiquer pour chacun les réflexions et les transmissions subies.

7. Exprimer:

   - $\underline{A_1}$ l'onde à la sortie de L_2 arrivant finalement sur le détecteur D_1 en fonction éventuellement de $\underline{A}, \underline{r}_{M1}, \underline{r}_{M2}, \underline{r}, \underline{t}, L_0, \lambda$.

- $\underline{A}_2$ l'onde à la sortie de L_2 arrivant finalement sur le détecteur D_2 .
- A.N. : Exprimer A_1 et A_2 en remplaçant $\underline{r}_{M1}, \underline{r}_{M2}, \underline{r}, \underline{t}$ par leur valeur.

8. Déterminer les intensités détectées I_1 et I_2 sur les détecteurs D_1 et D_2 .
9. Commenter les résultats des deux questions précédentes.

IV. Mesure d'un indice de réfraction à l'aide de l'interféromètre

On introduit, entre L_1 et M_2 , une lame à faces parallèles, perpendiculairement à la direction des rayons lumineux. La lame L a un indice de réfraction n et une longueur e dans la direction de propagation de la lumière (*figure* 2); elle est parfaitement transparente.

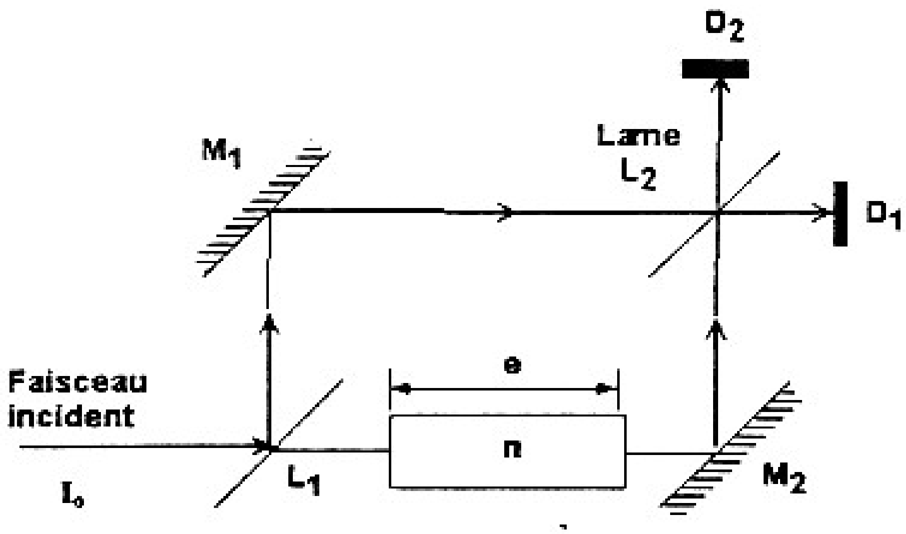


Figure 2 : mesure d'un indice de réfraction

10. Déterminer le retard de phase Φ supplémentaire introduite par la lame L pour l'onde passant par le chemin $L_1 M_2 L_2$ par rapport au même chemin dans l'air (c'est-à-dire en l'absence de lame).
11. Exprimer en fonction de I_0 et de ϕ
    - l'intensité I_1 , détectée par le détecteur D_1 en présence de la lame L
    - l'intensité I_2 détectée par le détecteur D_2 en présence de la lame L
12. Commenter le résultat de la dernière question.
13. Un dispositif électronique permet de mesurer le rapport $C = \frac{(I_1 - I_2)}{(I_1 + I_2)}$. Exprimer C en fonction de ϕ .

14.Application numérique: la lame est taillée dans un cristal possédant un indice de réfraction n tel que: $2<n<2,5$. Avec une lumière de longueur d'onde $\lambda=633\,nm$, une lame d'épaisseur $e=1,46\,\mu m$ introduite dans l'interféromètre provoque une annulation de I_2 . Déterminer l'indice de réfraction de cette lame.

V. Modulateur électro-optique par interférences

Afin de fabriquer un modulateur de lumière, on introduit un cristal de Niobate de Lithium entre L_1 et M_2 (*figure* 3). Ce cristal est une lame à faces parallèles, de longueur e .
Les faces perpendiculaires à la direction du rayon lumineux sont métallisées. De cette façon, on peut appliquer une tension V , de basse fréquence, entre les deux électrodes.

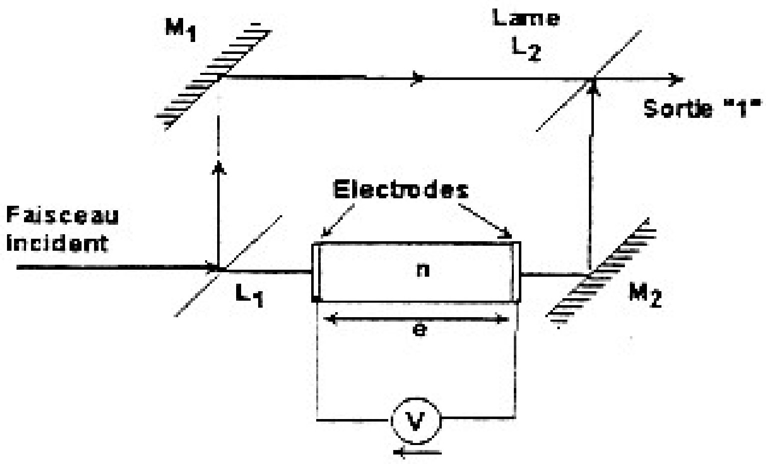


Figure 3 : Modulateur Electro-Optique avec un Mach-Zender

Le cristal de Niobate de Lithium présente un effet électro-optique linéaire, (effet Pockels), c'est-à-dire que son indice de réfraction est une fonction affine de la tension appliquée : $n=n_0-\frac{1}{2}r(n_0)^3\frac{V}{e}$

Dans cette formule n_0 est l'indice de réfraction du cristal pour $V=0$ et r est un coefficient électro-optique. Les deux électrodes métalliques sont très fines et ne jouent aucun rôle sur la propagation de la lumière (chacune a un facteur de transmission égal à 1).

15.Montrer que l'intensité I_1 du faisceau sortant par la sortie "1" de l'interféromètre peut se mettre sous la forme: $I_1=\frac{I_0}{2}\left\{1+\cos\left(\Phi_0-\pi\frac{V}{V_0}\right)\right\}$. Déterminer les expressions littérales de Φ_0 et de la tension V_0 .

16.La longueur de la lame est choisie de façon à avoir la relation : $\frac{2\pi}{\lambda}(n_0-1)e=\frac{\pi}{2}$. Que devient dans ce cas l'intensité I_1 du faisceau?

17.Modulation linéaire d'intensité : la lame est choisie de façon à avoir $\frac{2\pi}{\lambda}(n_0-1)e=\frac{\pi}{2}$. La tension appliquée varie sinusoïdalement en fonction du temps: $V=V_m\cos(\omega_m t)$. De plus, l'effet électro-optique est un effet très faible, la tension appliquée est telle que $V_m \ll V_0$ Montrer que dans ces conditions, on obtient un faisceau dont l'intensité est modulée: $I_1(t)=\frac{I_0}{2}\{1+\mu\cos(\omega_m t)\}$. Déterminer l'expression littérale du coefficient de modulation μ .

18.Expliquer en quoi l'intensité est modulée et dire quel est l'intérêt de la modulation.

19.Pour $\lambda=633\,nm$ on a $n_0=2{,}286$ et $r=9{,}6\,10^{-12}\,m/V$. Déterminer la valeur numérique de V_0 . A partir de cette valeur numérique, donner votre avis sur l'utilisation pratique de ce dispositif avec ce matériau en vous basant sur l'ordre de grandeur des tensions usuelles en électronique. En réalité, on réalise la modulation d'intensité en utilisant un interféromètre de polarisation.

Étude d'une cellule de filtrage

De nombreux circuits électroniques sont alimentés avec une tension continue de $5V$. Une «alimentation à découpage» transforme, en plusieurs étapes, la tension alternative sinusoïdale du réseau électrique en une tension continue. La dernière étape consiste à filtrer une tension rectangulaire représentée $figure\,2$ par le filtre passif « L, C » (voir $figure\,1$) dans lequel la résistance R symbolise l'ensemble des circuits que l'on souhaite alimenter sous une tension presque parfaitement continue. On se propose dans ce problème d'évaluer les performances du filtre.

I. Étude du filtre

On établit à l'entrée du filtre de la $figure\,1$ une tension sinusoïdale $v_1(t)$ de pulsation ω . On adopte la notation complexe. On note: $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q=\frac{R}{L\omega_0}$.

1. Par une étude qualitative, prévoir la nature du filtre proposé.

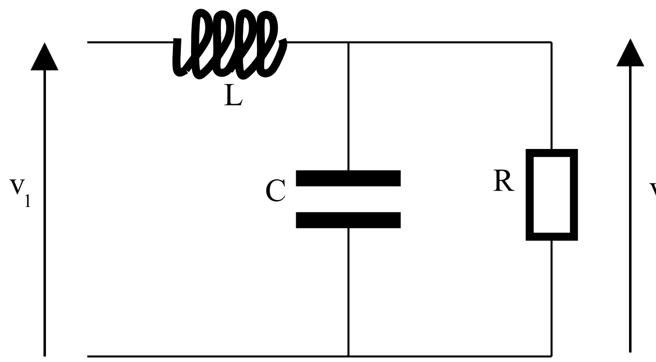


Figure 1

2. Déterminer la fonction de transfert complexe de ce montage: $\underline{H}=\frac{\underline{v_2}}{\underline{v_1}}$ en fonction de Q et $x=\frac{\omega}{\omega_0}$.
3. Que vaut le gain $G=|H|$? En dérivant le gain G , indiquer quelle inégalité doit vérifier Q pour que la courbe représentative de G en fonction de x présente un extremum ?
4. Quelle est alors la pulsation ω_r de l'extremum et la valeur de G_{max} ?
5. Représenter les deux allures possibles de la courbe représentative de G en fonction de x en faisant clairement apparaître les points particuliers.

II. Analyse harmonique du signal d'entrée

On applique au filtre le signal rectangulaire périodique $v_1(t)$ de hauteur V_0 , de période T , représenté à la $figure\,2$. On appelle $\alpha=\frac{T_H}{T}$ le rapport cyclique variable ($0<\alpha<1$) de la tension $v_1(t)$. On pose $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

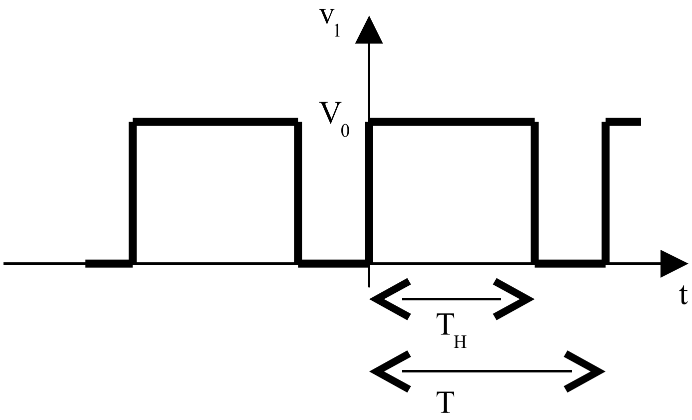


Figure 2

6. Quelle est la valeur moyenne $V_{1,moy}$ de $v_1(t)$ (en fonction de V_0, α).

7. On décompose $v_1(t)$ en série de Fourier et l'on obtient:

$$v_1(t)=V_{1,moy}+\frac{V_0}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi n\alpha)}{n}\cos(n\omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{\sin^2(\pi n\alpha)}{n}\sin(n\omega t)\right)$$

Déterminer:

- la pulsation ω_{fond} du fondamental (harmonique 1) en fonction de ω
- l' amplitude V_{fond} du fondamental de $v_1(t)$
- la pulsation ω_{harm} de l'harmonique suivant (harmonique 2) (on suppose $\alpha\neq 1/2$)
- l'amplitude V_{harm} de l' harmonique 2

III. Signal de sortie

On admet que le signal rectangulaire $v_1(t)$ est correctement représenté par la superposition de sa composante continue $V_{1,moy}$, de son terme fondamental d'amplitude V_{fond} et de l'harmonique suivant d'amplitude V_{harm} .

8. Calculer la valeur moyenne $V_{2,moy}$ du signal $v_2(t)$ à la sortie du filtre.

9. Application numérique : Le signal rectangulaire a une fréquence f de $5\,kHz$, une amplitude $V_0=15\,V$, un rapport cyclique $\alpha=1/3$. On a $R=100\,\Omega$, $C=10{,}0\,\mu F$, $L=200\,mH$. Calculer f_0 (fréquence correspondant à la pulsation ω_0), Q , $V_{2,moy}$.

10. Exprimer les amplitudes des deux harmoniques considérés, en sortie de filtre. Justifier l'utilisation d'une formule approchée pour le gain. Application numérique.

11. Pour obtenir un ordre de grandeur convenable de l'amplitude $V_{2,alt}$ de la composante alternative de $v_2(t)$ en sortie du filtre, on décide de ne considérer que le fondamental.

- Comparer les amplitudes des deux harmoniques en sortie et commenter.
- Donner la valeur de $V_{2,alt}$.
- On désigne par ΔV_2 l'amplitude crête à crête de l'ondulation résiduelle en sortie. Déterminer littéralement en fonction de α, f_0, f , puis numériquement, le taux d'ondulation $\frac{(\Delta V_2/2)}{V_{2,moy}}$.

ANNEXE

La décomposition d'une fonction périodique $v(t)$ (période T avec $\omega=2\pi/T$) en série de Fourier peut s'écrire aussi:

$$v(t)=V_{moy}+\sum_{n=1}^{n} C_n \cos(n\omega t-\varphi_n)$$

où C_n est l'amplitude de l'harmonique n .

Machine ditherme de réfrigération

On se propose d'étudier une installation fonctionnant par air pulsé permettant de refroidir un local et de le maintenir à basse température.

I. Généralités

A. Capacité thermique massique

L'air sera considéré comme parfait de masse molaire équivalente M. On note γ le rapport des chaleurs massiques à pression et à volume constants $\gamma=\frac{c_P}{c_V}$, γ sera supposé constant. La constante des gaz parfaits est $R=8{,}314\,J\,K^{-1}\,mol^{-1}$. On pose $r=R/M$.

1. Retrouver l' expression de c_P en fonction de r et de γ.
2. A.N. On donne $c_P=1\,kJ\,K^{-1}\,kg^{-1}$ et $\gamma=1{,}40$. Quelles valeurs numériques attribuer à r et M ?

B. Transformation isentropique

3. Montrer que pour une masse m de gaz parfait l'entropie peut se mettre sous la forme $S=m(c_P\ \ln T-r\ \ln P)$ à une constante près
4. En déduire que pour une transformation isentropique, la grandeur $T^{\gamma}P^{\alpha}$ se conserve. Préciser α en fonction de γ.

C. Transformation polytropique réversible

Une masse unité de gaz parfait subit une transformation réversible au cours de laquelle le transfert thermique élémentaire est proportionnel à la variation d'enthalpie massique élémentaire $\delta q=a\ dh$. Dans cette expression a désigne un facteur qui sera supposé constant dans tout le domaine étudié.

5. On pose $dh=\delta q+\delta w'$. Exprimer $\delta w'$ en fonction de P et v (volume massique). Écrire dh en fonction de a et $\delta w'$. En déduire une relation entre dv et dP faisant intervenir P, v, γ, a.
6. Montrer qu'au cours de cette évolution polytropique, les variables pression P et volume massique v vérifient la relation $Pv^k=constante$ dans laquelle k désigne une constante appelée facteur polytropique. Exprimer k en fonction de a et de γ.

II. Étude du compresseur

Le compresseur est adiabatique. Il travaille en régime permanent, le débit massique de l'air entrant dans le compresseur est égal au débit de l'air sortant. L'air passe de l'état (P_1, T_1) à l'état final de pression $P_2>P_1$.

7. Rappeler l'expression du premier principe pendant dt pour un système en écoulement permanent. On note δm la masse de fluide qui entre dans la machine (et sort) pendant dt,

δQ la quantité élémentaire d'énergie thermique reçue par le fluide pendant dt , $\delta W'$ la quantité élémentaire d'énergie mécanique reçue par le fluide de la part des parties mobiles de la machine (travail utile ou technique), h_1 l'enthalpie massique du fluide à l'entrée, h_2 l'enthalpie massique du fluide à la sortie. On négligera dans le problème les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle du fluide.

8. On suppose le compresseur idéal: la compression $1 \rightarrow 2$ est réversible. L'air passe de l'état $(P_{1,} T_1)$ à l'état $(P_{2,} T_2)$.
   - Exprimer la température finale notée T_2 en fonction de $T_{1,} P_{1,} P_2$ et γ .
   - A.N.: $P_1 = 1\,\text{bar}$, $P_2 = 3\,\text{bar}$, $T_1 = T_F = 265\,K$. Calculer T_2 .
   - Déterminer le travail massique, c'est à dire par unité de masse, de compression (travail technique) noté w_C (formule littérale puis application numérique).
9. On suppose la compression $1 \rightarrow 2$ adiabatique mais non réversible. De ce fait la température en fin de compression est supérieure à celle calculée dans l'hypothèse précédente. L'air passe de l'état $(P_{1,} T_1)$ à l'état $(P_{2,} T'_2)$. On donne: $T'_2 = 384\,K$. On imagine une transformation polytropique $1 \rightarrow 2$ réversible $PV^k = constante$ qui permettrait au fluide d'évoluer de l'état 1 à l'état 2 (de température T'_2).
   - Quelle est la valeur du facteur polytropique k (formule littérale puis application numérique).
   - Quelle est l'entropie créée pour une masse unité de fluide au cours de la compression réelle (formule littérale puis application numérique).
   - Calculer le travail massique de compression pour la transformation polytropique imaginée $w_{C,tr}$ et le travail massique de compression pour la transformation réelle irréversible $w_{C,irrev}$. Comparer les deux résultats. Définir un rendement polytropique pour ce compresseur et calculer la valeur de ce rendement.

III. Étude de l' échangeur

Dans l'échangeur, au contact de « l'air ambiant » dont la température T_a et la pression sont constantes, « l'air parcourant le cycle » se refroidit à pression constante. Il passe de l'état $(P_{2,} T_2)$ à l'état $(P_3 = P_{2,} T_3)$. On donne $T_a = 313\,K$ et $T_3 = 333\,K$ (T_2 a été calculé ci-dessus en sortie du compresseur supposé idéal).

10. Déterminer le transfert massique thermique noté q_{ch} reçu par l'air parcourant le cycle de la part de l'air ambiant (formule littérale puis application numérique).
11. Déterminer, par unité de masse, la variation d'entropie de l'air parcourant le cycle, l'entropie échangée et l'entropie créé au cours du refroidissement $2 \rightarrow 3$ (formule littérale puis application numérique).

IV. Étude de l'installation

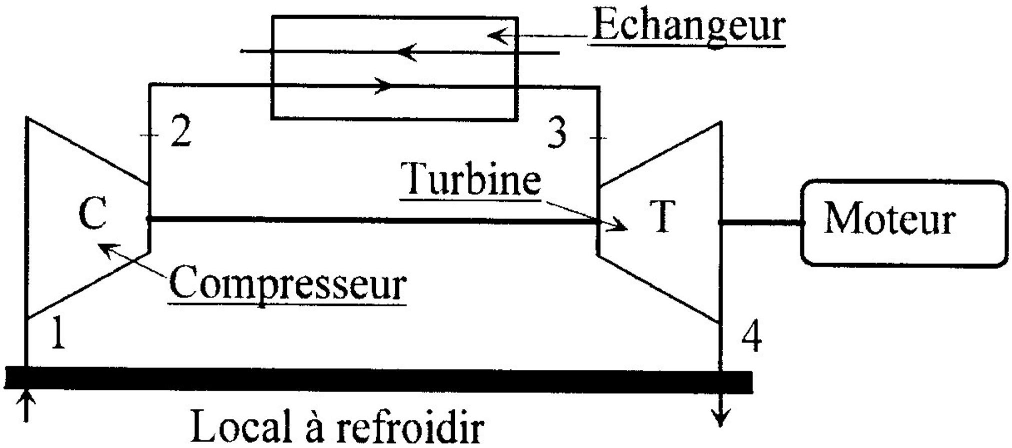
L'air parcourant le cycle subit les transformations suivantes :

- aspiration d'air « tiède » du local à refroidir vers le compresseur dans l'état (P_1, T_1) .
  - $1 \rightarrow 2$: l'air aspiré est comprimé dans le compresseur jusqu'à l'état (P_2, T_2) . La compression est supposée adiabatique et réversible.
  - $2 \rightarrow 3$: l'air comprimé est refroidi dans l'échangeur au contact de l'air extérieur jusqu'à l'état $(P_3 = P_2, T_3)$.
  - $3 \rightarrow 4$: l'air se détend dans la turbine jusqu'à l'état $(P_4 = P_1, T_4)$. La détente est supposée adiabatique et réversible.
- l'air froid en sortie de turbine est envoyé dans le local à refroidir ou à maintenir à basse température.

On peut considérer que l'air parcourant le cycle décrit la transformation $4 \rightarrow 1$ à pression constante de l'état (P_1, T_4) à l'état (P_1, T_1) .

On étudie le régime permanent: les sources froide Σ_F (local à réfrigérer) et chaude Σ_C (milieu extérieur ambiant) sont assimilées à des thermostats de températures, respectives $T_F = T_1$ et $T_C = T_a$ constantes.

Le compresseur, la turbine, le moteur extérieur sont solidaires du même arbre moteur. Le moteur et la turbine entraînent le compresseur.



12. Représenter l'allure des évolutions du gaz dans un diagramme de Clapeyron.

13. Déterminer le travail massique de détente noté w_T reçu par l'air parcourant le cycle (formule littérale puis application numérique) au cours de $3 \rightarrow 4$.

14. Déterminer le transfert massique thermique noté q_{fr} reçu par l'air pulsé de la part de l'air du local (formule littérale puis application numérique) au cours de $4 \rightarrow 1$.

15. Déterminer le travail massique <u>fourni</u> par le moteur w_M .

16. Déterminer l'efficacité η de cette machine frigorifique. L'exprimer en fonction de q_{fr} et

q_{ch} . Application numérique.

17.Retrouver l'expression de l'efficacité maximale d'une machine frigorifique fonctionnant entre les deux mêmes sources. Application numérique.

Réponses

Modulateur optique

1) On envisage deux ondes qui interfèrent :

$$\underline{A_1} = a_0 \exp j\omega t$$

$$\underline{A_2} = a_0 \exp j(\omega t - \varphi)$$

$$\underline{A} = \underline{A_1} + \underline{A_2}$$

$$= a_0 \exp j\omega t \ (1 + \exp -j\varphi)$$

On cherche l'intensité :

$$I = \underline{A}\ \underline{A}^*$$

$$= a_0^2 \ (1 + \exp - j\varphi)\ (1 + \exp j\varphi)$$

$$= I_0 \ (2 + 2\cos\varphi)$$

$$\boxed{I = 2 I_0 \ (1 + \cos\varphi)}$$

---

2) Pour la lame étudiée :

$$I_0 = \underline{A}\ \underline{A}^*$$

$$I_r = (\underline{r}\,\underline{A})\ (\underline{r}^*\underline{A}^*)$$

$$I_t = (\underline{t}\,\underline{A})\ (\underline{t}^*\underline{A}^*)$$

finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} I_r &= \underline{r}\,\underline{r}^*\ I_0 \\ I_t &= \underline{t}\,\underline{t}^*\ I_0 \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &\text{ou } |\underline{r}|^2 I_0 \\ &\text{ou } |\underline{t}|^2 I_0 \end{aligned}$$

---

3) Il doit y avoir conservation de l'énergie soit :

$$I_0 = I_r + I_t$$

$$\boxed{1 = \underline{r}\,\underline{r}^* + \underline{t}\,\underline{t}^*}$$

Il doit y avoir égalité entre l'intensité réfléchie et l'intensité transmise soit :

$$I_r = I_t$$

$$\boxed{\underline{r}\,\underline{r}^* = \underline{t}\,\underline{t}^*}$$

Ces deux égalités sont résumées par :

$$I_r = I_t = \frac{I_0}{2}$$

$$\boxed{\underline{r}\,\underline{r}^* = \underline{t}\,\underline{t}^* = \frac{1}{2}}$$

---

4) vérification :

$$\underline{r}\,\underline{r}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp j\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \exp -j\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{(O.K.)}$$

$$\underline{t}\,\underline{t}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \text{(o.K.)}$$

---

5) Au départ $\underline{A} = a_0 \exp j\omega t$

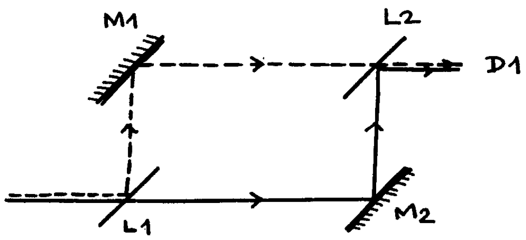
Après le parcours de chemin optique L_0

$$\underline{A}' = a_0 \exp j(\omega t - \frac{2\pi L_0}{\lambda})$$

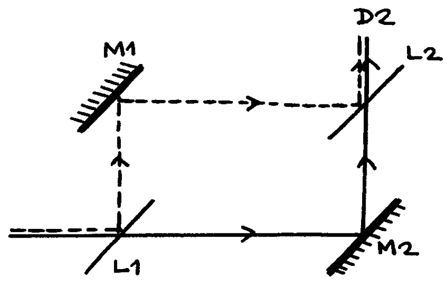
$$\boxed{\underline{A}' = \underline{A} \exp(-j\frac{2\pi L_0}{\lambda})}$$

---

6) Ondes qui arrivent sur D1



Ondes qui arrivent sur D2



---

7) Onde arrivant sur D1

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{A}_1 &= (\underline{t}\ \underline{r}_{M1}\ \underline{r} + \underline{r}\ \underline{r}_{M2}\ \underline{t})\ \underline{A} \exp(-j\frac{2\pi L_0}{\lambda}) \\ \underline{A}_2 &= (\underline{r}\ \underline{r}_{M1}\ \underline{r} + \underline{t}\ \underline{r}_{M2}\ \underline{t})\ \underline{A} \exp(-j\frac{2\pi L_0}{\lambda}) \end{aligned}}$$

A.N.
$$\underline{r_M}\,\underline{t}\,\underline{r} = -1\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$
$$\underline{r_M}\,\underline{r}^2 = -1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = +\frac{1}{2}$$
$$\underline{r_M}\,\underline{t}^2 = -1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{A_1} &= -j\ \underline{A}\ \exp\left(-j\frac{2\pi L_o}{\lambda}\right)\\ \underline{A_2} &= 0\end{aligned}}$$

---

8) $I_1 = \underline{A_1}\,\underline{A_1}^* = \underline{A}\,\underline{A}^*$

$$\boxed{\begin{aligned}I_1 &= I_o\\ I_2 &= 0\end{aligned}}$$

---

9) → D'une part, la conservation de l'énergie est vérifiée puisque $I_o = I_1 + I_2$

→ D'autre part, pour D_2, l'une des ondes a subi deux reflexions (déphasage supplémentaire : $2\times\frac{\pi}{2} = \pi$) l'autre a subi deux transmissions (déphasage : $2\times 0 = 0$) les deux ondes sont en opposition de phase d'où $I_2 = 0$.

---

10) Chemin optique pour $L_1 M_1 L_2$: L_o

Chemin optique pour $L_1 M_2 L_2$: $\underbrace{L_o - e}_{\text{dans le vide}} + \underbrace{n\,e}_{\text{lame}}$

soit $L_o + (n-1)\,e$

donc $\delta_{2/1} = (n-1)\,e$

soit $\boxed{\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\,e}$

---

11) $\underline{A_1} = -\frac{1}{2}\,\underline{A}\,\exp\left(-j\frac{2\pi L_o}{\lambda}\right)\,(1 + \exp -j\phi)$

$I_1 = \frac{1}{4}\,I_o\,(1 + \exp -j\phi)\,(1 + \exp j\phi)$

$$\boxed{I_1 = \frac{I_o}{2}(1 + \cos\phi)}$$

$\underline{A_2} = -\,\underline{A}\,\exp\left(-j\frac{2\pi L_o}{\lambda}\right)\,\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\exp -j\phi\right)$

$I_2 = \frac{1}{4}\,I_o\,(1 - \exp -j\phi)\,(1 - \exp j\phi)$

$$\boxed{I_2 = \frac{I_0}{2}(1-\cos\phi)}$$

---

12) On vérifie à nouveau la conservation de l'énergie

$$\boxed{I_0 = I_1 + I_2}$$

---

13) $C = \dfrac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}$

$$\boxed{C = \cos\phi}$$

---

14) I_2 est nul si $\cos\phi = 1$

donc

$\phi = m\,2\pi$ (m : entier)

$\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)e = m\,2\pi$

$$\boxed{n = m\frac{\lambda}{e} + 1}$$

avec

$2 < m\frac{\lambda}{e} + 1 < 2{,}5$

$\frac{e}{\lambda} < m < 1{,}5\,\frac{e}{\lambda}$

$2{,}31 < m < 3{,}46$

Donc

$$\boxed{m = 3}$$

$$\boxed{n = 2{,}301}$$

---

15) $I_1 = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(n_0-1)e - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{2}r\,n_0^3 V\right)\right)$

donc

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{2\pi}{\lambda}(n_0-1)e \\ V_0 &= \frac{\lambda}{r\,n_0^3} \end{aligned}}$$

---

16) $I_1 = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\left(\underset{\downarrow \frac{\pi}{2}}{\Phi_0} - \pi\frac{V}{V_0}\right)\right)$

$$\boxed{I_1 = \frac{I_0}{2}\left(1 + \sin\frac{\pi V}{V_0}\right)}$$

17) avec $V = V_m \cos(\omega_m t) \ll V_0$

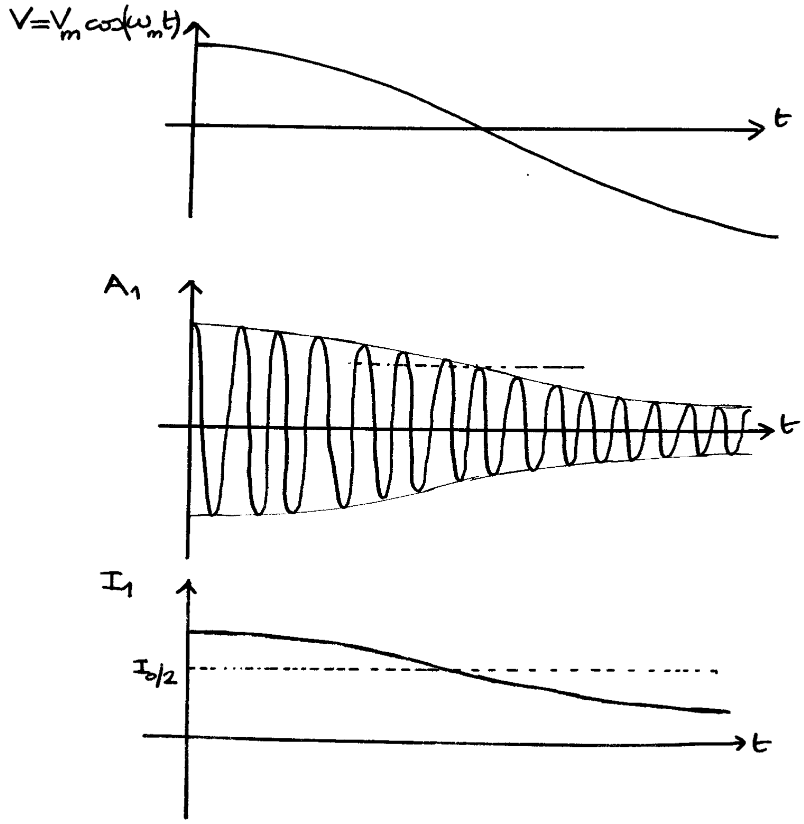
donc

$$I_1 = \frac{I_0}{2}\left(1 + \frac{\pi V}{V_0}\right)$$

$$I_1 = \frac{I_0}{2}\left(1 + \underbrace{\frac{\pi V_m}{V_0}}_{\mu} \cos(\omega_m t)\right)$$

$$\boxed{\mu = \frac{\pi V_m}{V_0}}$$

18) signal à transporter



L'amplitude de $\underline{A_1}$ est modulée.

L'intensité suit les variations de V et permet de retrouver le signal

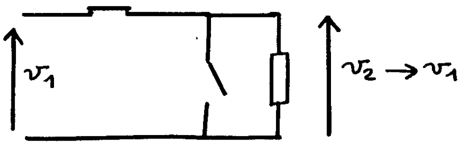
19) $\boxed{V_0 = 5520\ V}$

Pour que le coefficient de modulation μ soit suffisant V_m doit être très élevé par rapport aux tensions usuelles en électronique (quelques volts).
Ce dispositif n'est donc pas le dispositif utilisé dans la réalité.

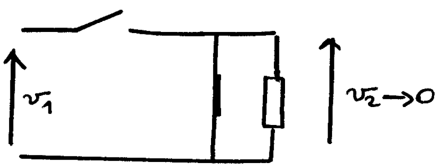
Etude d'une cellule de filtrage

1) Etude qualitative :

– en basse fréquence $L\omega \to 0$, $\frac{1}{C\omega} \to \infty$



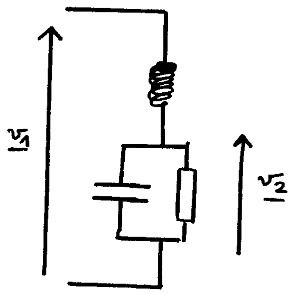
– en haute fréquence $L\omega \to \infty$, $\frac{1}{C\omega} \to 0$



Le filtre est donc un $\boxed{\text{passe-bas}}$

---

2) Fonction de transfert



Par les diviseurs de tension :

$$\begin{aligned}\underline{H} &= \frac{\underline{v_2}}{\underline{v_1}}\\ &= \frac{\underline{Z}_{R//C}}{\underline{Z}_{R//C} + \underline{Z}_L}\\ &= \frac{1}{1 + \underline{Z}_L \underline{Y}_{R//C}}\\ &= \frac{1}{1 + jL\omega\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1 + j\frac{L\omega}{R} - LC\omega^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{(1 - x^2) + j\frac{x}{Q}}}$$

(remarque : par Millman, on obtient

$$\underline{v_2} = \frac{\underline{v_1}\frac{1}{jL\omega}}{\frac{1}{jL\omega} + jC\omega + \frac{1}{R}}$$)

---

3)
$$G = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

L'extremum de G, c'est aussi l'extremum de

$$D_{(u)} = (1-u)^2 + \frac{u}{Q^2} \qquad (\text{avec } u = x^2)$$

$$\frac{dD}{du} = -2(1-u) + \frac{1}{Q^2}$$

Il y a extremum pour :

$$2(1-u) = \frac{1}{Q^2}$$

$$\underset{x^2}{u} = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Il faut donc que $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$

soit
$$\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

---

4) A l'extremum, on a donc :

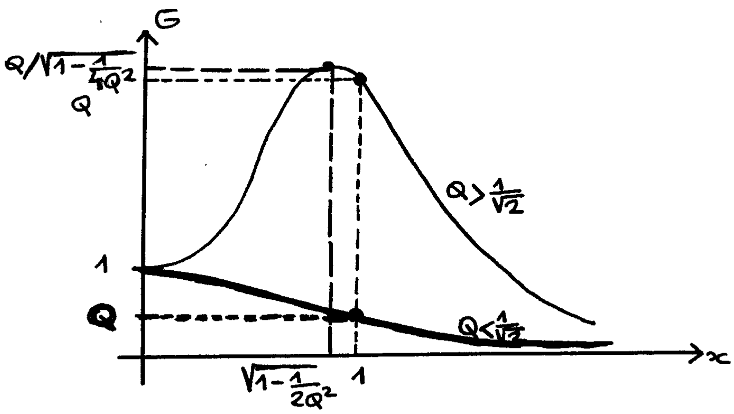
$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$$

et :
$$G_{max} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1}{2Q^2}\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)}}$$

$$\boxed{G_{max} = \frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$$

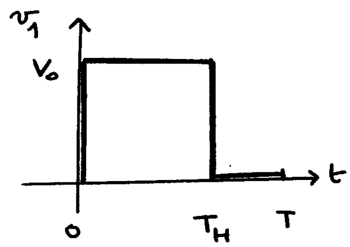
---

5)



---

6)



$$V_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T v_1(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^{T_H} V_0\,dt + \int_{T_H}^{T} 0\,dt\right)$$

$$= V_0\,\frac{T_H}{T}$$

$$\boxed{V_{moy} = V_0\,\alpha}$$

---

7) $\boxed{\omega_{fond} = \omega}$

$$V_{fond} = \frac{V_0}{\pi}\Big(\underbrace{\sin^2(2\pi\alpha)}_{4\sin^2(\pi\alpha)\cos^2(\pi\alpha)} + 4\sin^4(\pi\alpha)\Big)^{1/2}$$

$$\boxed{V_{fond} = \frac{2V_0}{\pi}\sin(\pi\alpha)}$$

$$\boxed{\omega_{harm} = 2\omega}$$

$$V_{harm} = \frac{V_0}{2\pi}\left(\sin^2(4\pi\alpha) + 4\sin^4(2\pi\alpha)\right)^{1/2}$$

$$\boxed{V_{harm} = \frac{V_0}{\pi}\left|\sin(2\pi\alpha)\right|}$$

---

8) Pour le continu, on utilise la fonction de transfert en continu

$$V_{2,m} = \underbrace{G(\omega=0)}_{=1} V_{1,m}$$

$$\boxed{V_{2,m} = V_{1,m} = V_0\alpha}$$

---

9) A.N.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\boxed{f_0 = 112,5 \text{ Hz}}$$

$$Q = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707}$$

$$V_{2,m} = V_0\,\alpha$$

$$\boxed{V_{2,m} = 5 \text{ V}}$$

---

10) On a f (5kHz) $\gg$ f_0 (0,113 kHz)

Donc pour les deux harmoniques (f et $2f$) on pourra faire $G_{(f)} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \simeq \dfrac{1}{x^2}$ ou $\left(\dfrac{f_0}{f}\right)^2$

$\longrightarrow$ harmonique 1 (f)

$$V_{fond,\,sortie} = \left(\frac{f_0}{f}\right)^2 V_{fond} = \left(\frac{f_0}{f}\right)^2 \frac{2V_0}{\pi}\sin(\pi\alpha)$$

$$\boxed{V_{fond,\,sortie} = 4,19\ 10^{-3} \text{ V}}$$

$\longrightarrow$ harmonique 2 $(2f)$

$$V_{harm,sortie} = \frac{f_0^2}{4f^2} V_{harm}$$

$$= \frac{f_0^2}{4f^2} \frac{V_0}{\pi} |\sin(2\pi\alpha)|$$

$$\boxed{V_{harm,sortie} = 0{,}52 \; 10^{-3} \, V}$$

---

11) • Pour $V_{2,alt}$ on prendra $\underline{4{,}19 \; 10^{-3} \, V}$

• (cf on néglige les autres harmoniques : $0{,}52 \ll 4{,}19$)

• taux d'ondulation

$$\frac{\Delta V_2/2}{V_{2,moy}} = \frac{\left(\frac{f_0}{f}\right)^2 2 \frac{V_0}{\pi} \sin(\pi\alpha)}{\alpha V_0}$$

$$\boxed{\tau_{ond} = \left(\frac{f_0}{f}\right)^2 2 \,\mathrm{sinc}\, (\pi\alpha)}$$

$$= 0{,}08\,\%$$

Machine ditherme de réfrigération

1) Pour les chaleurs massiques :

$$c_p - c_v = r$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \gamma$$

d'où

$$c_v = \frac{r}{\gamma - 1}$$

$$\boxed{c_p = \frac{r\gamma}{\gamma - 1}}$$

---

2) A.N.

$$r = c_p \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$$

$$= 10^3 \left(1 - \frac{1}{1{,}4}\right)$$

$$\boxed{r = 286 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}}$$

$$r = \frac{R}{M}$$

$$M = \frac{R}{r}$$

$$= \frac{8{,}314}{286}$$

$$\boxed{M = 29\ 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}$$

---

3)

$$dH = T\,dS + V\,dP$$

$$dS = \frac{dH}{T} - \frac{V}{T}\,dP$$

$$= n C_{P,m} \frac{dT}{T} - nR\frac{dP}{P}$$

ou

$$= m\,c_p \frac{dT}{T} - m\,r\frac{dP}{P}$$

$$\boxed{S = m\left(c_p \ln T - r \ln P\right)} = m\,s$$

à une constante près d'intégration.

---

4)

$$S = \frac{m\,r}{\gamma - 1}\left(\gamma \ln T - (\gamma - 1)\ln P\right)$$

$$= \frac{m\,r}{\gamma - 1}\left(\ln T^{\gamma} + \ln P^{1-\gamma}\right)$$

Pour une transformation isentropique :

$$\boxed{T^{\gamma} \; P^{1-\gamma} = \text{constante} .}$$

$(\alpha = 1-\gamma)$

---

5) Pour une transformation réversible :

$$dH = \delta Q_{rev} + V\,dP$$
$$= m\,\delta q + m\,v\,dP$$
$$dh = \delta q + v\,dP$$

donc on pose :

$$\boxed{\delta w' = v\,dP}$$

Ici pour la polytropique :

$$dh = \delta q + \delta w'$$
$$= a\,dh + \delta w'$$

$$\boxed{\delta w' = (1-a)\,dh}$$

Relation entre P et v

$$v\,dP = (1-a)\;c_p\,dT$$
$$= (1-a)\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,r\,dT$$

$$\boxed{v\,dP = (1-a)\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,(P\,dv + v\,dP)}$$

---

6) $$\frac{(1-a)\,\gamma}{\gamma-1}\,P\,dv + \frac{(1-a\gamma)}{\gamma-1}\,v\,dP = 0$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{(1-a)}{(1-a\gamma)}\,\gamma\,\frac{dv}{v} = 0$$

$$\boxed{P\,V^{k} = \text{constante}}$$

$$\boxed{k = \left(\frac{a-1}{a\gamma-1}\right)\gamma}$$

---

7) premier principe :

pendant dt : $\boxed{\delta m \;(h_2 - h_1) = \delta W' + \delta Q}$

$= \delta m \; w' + \delta m \; q$

par kg : $\boxed{h_2 - h_1 = w' + q}$

---

8) compresseur isentropique.

$T^{\gamma} \; P^{1-\gamma} = \text{constante}$

$T \quad P^{-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} = \text{constante}$

$$\boxed{T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

A.N. $= 265 \quad 3^{\frac{0,4}{1,4}}$

$$\boxed{T_2 = 362,7 \text{ K}}$$

travail technique par kg : $(q = 0)$

$w_c = h_2 - h_1$

$$\boxed{w_c = c_p \,(T_2 - T_1)}$$

A.N.

$$\boxed{w_c = 97,7 \text{ kJ kg}^{-1}}$$

---

9) compresseur réel (adiabatique, irréversible)

$\longrightarrow$ facteur polytropique :

$P \; V^k = \text{cste}$

$P \; \frac{T^k}{P^k} = \text{cste}$

$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{k}-1} \left(\frac{T_2'}{T_1}\right) = 1$

$$\boxed{k = \frac{1}{1 - \dfrac{\ln T_2'/T_1}{\ln P_2/P_1}}}$$

A.N.

$$\boxed{k = 1{,}510}$$

→ La variation d'entropie par kg de 1 à 2' est donnée par :

$$\Delta s = c_p \ln \frac{T'_2}{T_1} - r \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$\boxed{\Delta s = c_p \left(\ln \frac{T'_2}{T_1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln \frac{P_2}{P_1} \right)}$$

A.N. $\quad = 1 \left(\ln \frac{384}{265} - \frac{0{,}4}{1{,}4} \ln 3 \right)$

$$\boxed{\Delta s = 0{,}057 \ \text{kJ kg}^{-1}\ \text{K}^{-1}}$$

Pour la transformation réelle (adiabatique), il s'agit de l'entropie créée.
Pour la transformation polytropique (réversible mais avec échange de chaleur) il s'agit du terme d'échange d'entropie.

→ travail technique de compression

1)

$$w_{c,\,irrev} = h_{2'} - h_1$$

$$\boxed{w_{c,\,irrev} = c_p \left(T'_2 - T_1 \right)}$$

A.N.

$$\boxed{w_{c,\,irrev} = 119 \ \text{kJ kg}^{-1}}$$

$$(> w_{c,\,isentropique} = 97{,}7 \ \text{kJ kg}^{-1})$$

2) pour la transformation polytropique

• soit on fait

$$\delta w' = (1 - a)\, dh \qquad (\text{cf } 5)$$

avec $(1 - a) = \frac{k}{k-1} \, \frac{\gamma - 1}{\gamma} \qquad (\text{cf } 6)$

$$\boxed{w_{c,\,ptr} = \frac{k}{k-1} \, \frac{\gamma - 1}{\gamma} \, w_{c,\,irrev}}$$

A.N.

$$\boxed{w_{c,ptr} = 100{,}7 \text{ kJ kg}^{-1}}$$

$$(< w_{c,irrev})$$

- soit on fait le calcul direct

$$w' = \int_1^{2'} v \, dP \qquad (\text{cf } 5 \text{ et } 7)$$

sachant que $P v^k = C$

$$= C^{1/k} \int_1^{2'} dP \, P^{-1/k}$$

$$= C^{1/k} \frac{k}{k-1} \left(P_2^{1-1/k} - P_1^{1-1/k} \right)$$

$$= \frac{k}{k-1} \left(P_2 v_2 - P_1 v_1 \right)$$

$$= \frac{k}{k-1} r \left(T_2' - T_1 \right)$$

$$= \frac{k}{k-1} \frac{\gamma-1}{\gamma} c_p \left(T_2' - T_1 \right)$$

⟶ rendement polytropique du compresseur

$$\boxed{\eta = \frac{w_{c,ptr}}{w_{c,irrev}}}$$

A.N.

$$\boxed{\eta = 84{,}6\ \%}$$

---

10) En utilisant 7, ou en utilisant $q_P = \Delta h$

$$q_{ch} = h_3 - h_2$$

$$\boxed{q_{ch} = c_p \left(T_3 - T_2 \right)}$$

A.N.

$$\boxed{q_{ch} = -29{,}7 \text{ kJ kg}^{-1}}$$

---

11)

$$\boxed{\Delta s = c_p \left(\ln \frac{T_3}{T_2} - \cancel{\frac{\gamma-1}{\gamma} \ln \frac{P_2}{P_2}} \right)}$$

A.N.

$$\boxed{\Delta s = -0{,}0855 \text{ kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}}$$

$$\boxed{s_{ech} = \frac{q_{ch}}{T_2}}$$

A.N.

$$\boxed{s_{ech} = -0{,}0949 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}}$$

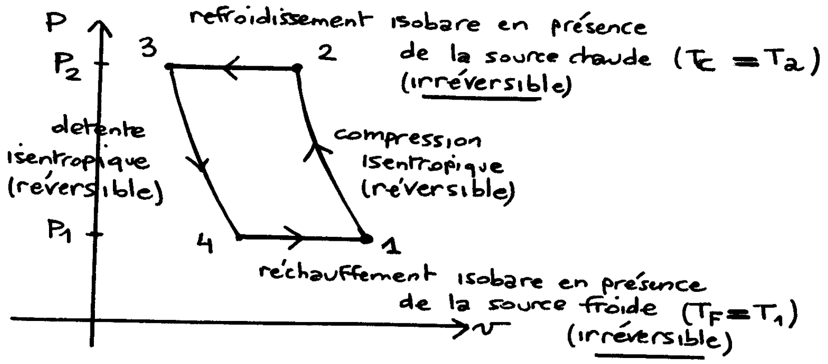
$$s_{créé} = \Delta s - s_{ech}$$

A.N.

$$\boxed{s_{créé} = -0{,}0095 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}}$$

---

12)



---

13)

$$w_T = h_4 - h_3$$
$$= c_p (T_4 - T_3)$$
$$= c_p T_3 \left(\left(\frac{P_4}{P_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

$$\boxed{w_T = c_p T_3 \left(\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)}$$

A.N. $T_4 = 243{,}3 \text{ K}$

$$\boxed{w_T = -89{,}7 \text{ kJ kg}^{-1}}$$

---

14)

$$q_{fr} = h_1 - h_4$$

$$\boxed{q_{fr} = c_p (T_1 - T_4)}$$

A.N.

$$\boxed{q_{fr} = 21{,}7 \text{ kJ kg}^{-1}}$$

---

15)

$w_{\text{fourni par le moteur}} = w'_{\text{reçu par le gaz dans le compresseur}} + w'_{\text{reçu par le gaz dans la turbine}}$

$$\boxed{w_M = w_C + w_T}$$

A.N. $= 97{,}7 - 89{,}7$

$$\boxed{w_M = 8{,}0 \text{ kJ kg}^{-1}}$$

---

16)

$$\boxed{\eta = \frac{q_{fr}}{w_M}}$$

A.N.

$$\boxed{\eta = 2{,}71}$$

remarque : pour un cycle :

$$q_{fr} + q_{ch} + w_C + w_T = 0$$

$$q_{fr} + q_{ch} = -w_M$$

donc

$$\eta = \frac{q_{fr}}{-(q_{fr} + q_{ch})}$$

$$\boxed{\eta = \frac{1}{\frac{(-q_{ch})}{q_{fr}} - 1}}$$

(même résultat numérique)

---

17) Efficacité maximale : on aurait (cas réversible)

premier principe $\quad q_{ch} + q_{fr} + w_M = 0$

deuxieme principe $\quad \dfrac{q_{ch}}{T_2} + \dfrac{q_{fr}}{T_1} = 0$

$$\eta_{MAX} = \frac{1}{\frac{-q_{ch}}{q_{fr}} - 1}$$

$$\boxed{\eta_{MAX} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}}$$

A.N. $= 5{,}52$
