DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 2 heures

Sujet

Il s'agit de la partie physique d'une épreuve E3A MP 2000. On évitera, tout en justifiant les réponses, de consacrer « trop » de temps aux premières questions.

Traitement thermique de cartes électroniques

Les différentes parties du problème sont assez largement indépendantes entre elles.

I. Préliminaires : la conduction thermique

A. Conduction thermique unidimensionnelle

On considère un matériau solide homogène de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ et de chaleur massique à pression constante c_P (λ , c_P , ρ sont supposés constants).

Il règne dans ce milieu un gradient de température, dirigé selon l'axe Ox, de sorte que la température en un point d'abscisse x, à l'instant t est $T(x,t)$. On suppose que le milieu évolue à pression constante.

1. A partir de la loi de Fourier, exprimer la puissance thermique P_{th} qui traverse vers les $x>0$ une surface plane d'aire A, perpendiculaire à Ox, en fonction de λ, A, et $\dfrac{\partial T}{\partial x}$.

2. On s'intéresse à une « tranche » du milieu comprise entre les plans x et $x+dx$, d'aire A. Exprimer la variation d'enthalpie dH de cette tranche pendant un intervalle de temps dt en fonction de ρ, c_P, A, dx, dt et de $\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

3. En déduire que la fonction $T(x,t)$ vérifie l'équation différentielle : $\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \Gamma_P \dfrac{\partial T}{\partial t}$ (1) où l'on a introduit la quantité Γ_P. Quelle est la signification physique de Γ_P ? Quelle est son unité dans le système SI ?

4. L'équation différentielle (1) est-elle invariante lorsque l'on effectue le changement de variable $t \rightarrow -t$? Interpréter physiquement votre réponse.

B. Conduction thermique unidimensionnelle en régime permanent

Une plaque plane de conductivité thermique λ, d'épaisseur e et normale à l'axe Ox, sépare deux milieux dont la température est uniforme et constante. Le milieu 1, occupant la région $x<0$ est à la température T_1, alors que le milieu 2, remplissant la région $x>e$ est à la température T_2. Dans cette question, on se place en régime permanent. Dans la plaque, la température est donc seulement une fonction de x.

5. Déterminer la température $T(x)$ qui règne dans la plaque.

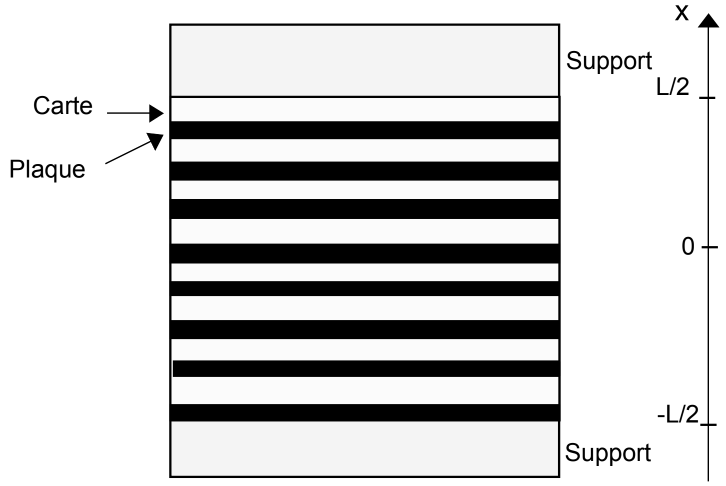
6. Donner l'expression de la puissance thermique $P_{1\rightarrow 2}$ transférée depuis le milieu 1 vers le milieu 2, à travers une surface S de la plaque.

7. En vous appuyant sur une analogie électrocinétique, définir la résistance thermique R_{th} pour une surface S de la plaque entre les deux milieux et l'exprimer en fonction de λ, e et S.

8. Quelles lois d'association de deux résistances thermiques peut-on prévoir sans calcul dans le cas de deux résistances en série ? Même question dans le cas de deux résistances en parallèle.

II. Étude d'un milieu feuilleté. Approximation du milieu continu

Une des étapes de la fabrication des cartes supportant les circuits électroniques intégrés consiste à les enduire d'une résine époxy qui durcit à température élevée et sous forte pression. Pour cela, on rassemble les cartes enduites de résine en piles, chacune étant séparée des autres par une plaque métallique.



Toutes les cartes sont planes, ont la même épaisseur e_1 et une conductivité thermique λ_1. Les plaques métalliques de séparation, planes elles aussi, ont une épaisseur e_2 et une conductivité thermique λ_2. Les cartes et les plaques ont une aire A.

L'ensemble ainsi obtenu, constitué d'un grand nombre de couches, d'épaisseur totale L, est placé entre deux supports qui permettent à la fois de chauffer l'empilement et de soumettre la pile de cartes à la pression élevée nécessaire au durcissement de la résine (voir figure).

On veut étudier les aspects dynamiques du réchauffage de ces empilements. Sauf indication contraire, on néglige tout transfert thermique se produisant par les faces latérales des plaques et des cartes. De plus, on suppose que tous les contacts thermiques sont parfaits: la température est continue dans l'empilement.

Afin d'étudier de façon simplifiée les transferts thermiques, on cherche à représenter le système feuilleté décrit précédemment comme un milieu homogène. Cette partie a pour but de déterminer les caractéristiques de ce milieu équivalent.

9. On considère que les transferts thermiques s'effectuent seulement selon la direction Ox (voir figure).
   - Déterminer la résistance thermique d'une épaisseur e du matériau, de surface S, constituée de N empilements plaque-carte.
   - En déduire que l'empilement est équivalent à une épaisseur e d'un matériau homogène de section S, dont on exprimera la conductivité thermique λ en fonction de λ_1, λ_2, e_1 et e_2.

- Vérifier la pertinence du résultat sur les 2 cas particuliers suivants: $\lambda_1=\lambda_2$ et $e_1 \ll e_2$.

10.On considère ici un transfert thermique *parallèle* au plan des cartes.

- Déterminer la conductivité thermique $\lambda_{//}$ du milieu homogène équivalent au milieu feuilleté.
- Vérifier la pertinence du résultat sur les 2 cas particuliers suivants: $\lambda_1=\lambda_2$ et $e_1 \ll e_2$.

11.Pour les deux milieux, on définit les quantités Γ_{P1} et Γ_{P2} (voir questions précédentes). Déterminer Γ_P pour le milieu homogène équivalent.

12.Application numérique: On donne

- *cartes* : ρ_1 = 1000 kg.m^{-3}, c_{P1} = 1500 J.kg^{-1}.K^{-1}, λ_1 = 0,3 W.m^{-1}.K^{-1}, e_1 = 2,5 mm
- *plaques métalliques :* ρ_2 = 8000 kg.m^{-3}, c_{P2} = 480 J.kg^{-1}.K^{-1}, λ_2 = 12 W.m^{-1}.K^{-1}, e_2 = 2,5 mm

Calculer λ , $\lambda_{//}$ et Γ_P .

Dans toute la suite, on envisage seulement des transferts thermiques parallèles à l'axe Ox .

III. Dynamique du chauffage des empilements

Alors que l' empilement est à la température ambiante T_a = 290K, on porte brusquement, à $t=0$, la température des deux supports à T_0 = 460 K. Cette température est maintenue constante et uniforme dans les supports durant toute la durée de l'expérience. Comme l'a montré la partie précédente, l'empilement des cartes et des plaques de séparation peut être considéré comme un milieu homogène de conductivité thermique λ , et de produit Γ_P uniformes. Ce milieu occupe l'espace compris entre les plans $x=-\frac{L}{2}$ et $x=\frac{L}{2}$ sur une section A (voir figure).

Dans les applications numériques, on prendra *:* L = 5 cm, A = 0,02 m^2, λ et Γ_P calculés ci-dessus

13.En la justifiant de façon qualitative, représenter sur un schéma l'allure des profils de température dans l'empilement en fonction de *x* à différents instants. On fera apparaître clairement les profils de température dans les cas particuliers $t=0$ et $t\to\infty$.

14.En se basant sur des considérations dimensionnelles, construire une constante de temps τ à partir des paramètres physiques du problème: Γ_P , λ et L . Évaluer numériquement τ et donner une interprétation physique à ce paramètre.

15.On pose $\theta(x,t)=T(x,t)-T_0$. Écrire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\theta(x,t)$ et les conditions aux limites de $\theta(x,t)$ en $x=-\frac{L}{2}$ et $x=\frac{L}{2}$.

16.On cherche la solution sous la forme d'un développement en série de la forme $\theta(x,t)=\sum_{n=1,\, n\ impair}^{\infty} f_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ où la somme ne concerne que les entiers n impairs.

Vérifier que les fonctions de ce type sont compatibles avec les conditions aux limites imposées et déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f_n(t)$.

17.Définir le temps τ_n caractéristique de l'évolution temporelle de la fonction $f_n(t)$ (exprimer τ_n en fonction de L , n , Γ_P et λ). Donner la solution générale de l'équation différentielle vérifiée par $f_n(t)$.

18.On admet que les conditions initiales imposent, pour tout n impair $f_n(0)=4\dfrac{(T_0-T_a)}{n\pi}\,(-1)^{\frac{(n+1)}{2}}$. Calculer le temps t_1, pour lequel l'amplitude du premier terme de la série, $f_1(t_1)$ est 100 fois plus grande (en valeur absolue) que celle du deuxième terme non nul : $f_3(t_1)$. Déterminer numériquement t_1 .

Dans toute la suite, on prendra pour $\theta(x,t)$ l'expression approchée suivante, valable pour $t>t_1$:

$$\theta(x,t)\approx f_1(t)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

19.A partir de quel instant t_d la température au centre de l'empilement est-elle supérieure ou égale à la température de durcissement T_d = 440 K ? Justifier a posteriori l'utilisation de l'expression simplifiée de $\theta(x,t)$.

IV. Influence des pertes par les faces latérales

On prend maintenant en compte les transferts thermiques entre les cartes et l'air ambiant par les faces latérales (transfert de type conducto-convectif) . Un élément de surface latérale $d\Sigma$ à la température T émet vers l'extérieur une puissance thermique : $dP_{cc}=h(T-T_a)d\Sigma$ où h est un facteur constant. Le milieu feuilleté est considéré comme un milieu continu homogène (paramètres λ , Γ_P). Les supports sont toujours portés à la température T_0 à partir de $t=0$.

A. Mise en équation

20.En comparant les valeurs des conductivités équivalentes λ et $\lambda_{//}$, justifier que l'on peut considérer que la température dans les cartes ne dépend que de x et t .

21.Les cartes sont en fait des rectangles de cotés a et b . En faisant un bilan énergétique sur une tranche comprise entre les plans x et $x+dx$, montrer que la température $T(x,t)$ vérifie l'équation: $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}-K^2(T-T_a)=\dfrac{\Gamma_P}{\lambda}\dfrac{\partial T}{\partial t}$ (2) où K est une constante que l'on exprimera en fonction de h , λ , a et b . Quelle est la dimension de K ?

B. Étude du régime permanent

22.On cherche une solution stationnaire de l'équation (2) , que l'on note $T^{\infty}(x)$.

- Écrire l'équation différentielle vérifiée par $T^{\infty}(x)$.
- Résoudre cette équation différentielle, compte tenu des conditions aux limites imposées en

$x=-\frac{L}{2}$ et $x=\frac{L}{2}$. On utilisera des fonctions hyperboliques pour exprimer le résultat final.

- Représenter graphiquement $T^{\infty}(x)$.
- Déterminer la température minimale T_{min} qui règne dans l'empilement, en régime permanent.

23.Montrer que, si l'on veut que la température minimale soit supérieure à la température nécessaire au durcissement de la résine , T_d , il faut que le coefficient h soit plus petit qu'une valeur limite h_{max} , que l'on déterminera. Montrer que, pour des cartes d'aire A fixée, le coefficient h_{max} est le plus grand pour une plaque carrée, i.e. si $a=b$. Déterminer numériquement h_{max} dans cette hypothèse (utiliser les valeurs numériques précédemment fournies).

C. Régime transitoire

On revient à une situation dépendant du temps et on pose $\xi(x,t)=T(x,t)-T^{\infty}(x)$

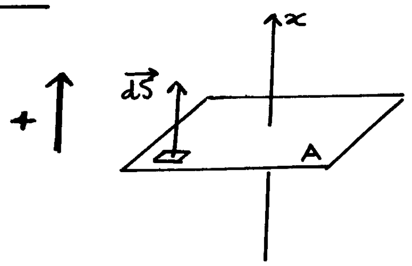
24.Établir l'équation vérifiée par $\xi(x,t)$.

25.On cherche une solution sous la forme d'une série: $\xi(x,t)=\sum_{n=1,\, n\ impair}^{\infty} g_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.
Écrire l'équation différentielle vérifiée par $g_n(t)$. Déterminer la forme générale des fonctions $g_n(t)$, en faisant apparaître une constante de temps τ'_n que l'on exprimera en fonction de τ_n , L , n et K .

26.On donne h = 5 W.m^{-2} K^{-1} et on suppose encore les plaques carrées. Calculer numériquement τ'_1 , le comparer à τ_1 et commenter.

Réponses

1)



$$P_{th} = \iint_A \vec{j}\,\overrightarrow{dS} \qquad \text{avec } \vec{j} = -\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T_{(x,t)}$$

$$= -\lambda\,\frac{\partial T}{\partial x}\,\overrightarrow{u_x}$$

$$\text{et} \quad \overrightarrow{dS} = dS\,\overrightarrow{u_x}$$

$$= \iint_A -\lambda\,\frac{\partial T}{\partial x}\,dS$$

$$\boxed{P_{th} = -\lambda\,\frac{\partial T}{\partial x}\,A}$$

---

2) La variation d'enthalpie – pour une tranche élémentaire dx
– pendant une durée élémentaire dt

(que l'on pourrait noter d^2H) est donc :

$$dH = dm\;c_p\;\left(\frac{\partial T}{\partial t}\,dt\right)$$

$$\boxed{dH = \rho\,A\,dx\;c_p\;\frac{\partial T}{\partial t}\,dt}$$

---

3) Bilan thermique pour la tranche dx pendant dt, à P constant

$$dH = \delta Q_{reçu} + \underbrace{\cancel{\delta Q_{produit}}}_{nul}$$

$$= P_{th}(x,t)\,dt - P_{th}(x+dx,t)\,dt$$

$$dH = -\frac{\partial P_{th}}{\partial x}\,dx\,dt$$

soit

$$\rho\,A\,c_p\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dx\,dt = +\lambda\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,A\,dx\,dt$$

$$\rho\,c_p\,\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\Gamma_p\,\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

avec $\boxed{\Gamma_p = \rho\,c_p}$

c_p en $J\ kg^{-1}\ K^{-1}$ est la chaleur massique à P cst
(ou capacité thermique massique à P cst)

$\boxed{\Gamma_p \quad \text{en} \quad J\ m^{-3}\ K^{-1} \quad \text{est la capacité thermique volumique à P constant.}}$

---

4) Si on renverse le temps en faisant $t \to -t$
donc $T_{renv}(x,t) = T(x,-t)$

alors $\dfrac{\partial T_{renv}}{\partial t} = -\dfrac{\partial T}{\partial t}$

$$\frac{\partial^2 T_{renv}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

et l'équation

$$+\Gamma_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

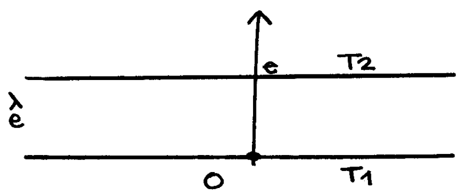
devient

$$-\Gamma_p \frac{\partial T_{renv}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T_{renv}}{\partial x^2}$$

Donc Trenv n'est pas solution de l'équation différentielle de la diffusion thermique.
Ceci traduit l'irréversibilité des échanges thermiques
(cf "la flèche du temps")

---

5)



En régime stationnaire avec $T = T(x)$ on aura (cf équation de la chaleur en 3))

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

$$T = Ax + B$$

C.L. $T_1 = A \times 0 + B$

$T_2 = A \times e + B$

$$\boxed{T = \frac{(T_2 - T_1)}{e}x + T_1}$$

---

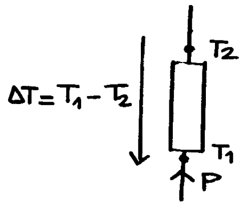
6) $P_{1\to 2} = P_{th}$ (sens positif identique)

$= -\lambda \dfrac{dT}{dx} S$ (cf 1))

$$\boxed{P_{1\to 2} = -\lambda \frac{(T_2 - T_1)}{e} S}$$

---

7)



Par analogie avec

$\Delta V = R \; I$ (en convention récepteur)

Ici

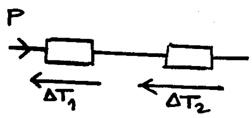
$$\boxed{(T_1 - T_2) = \frac{e}{\lambda S} P_{1\to 2}}$$

$$\boxed{R_{thermique} = \frac{e}{\lambda S}}$$

---

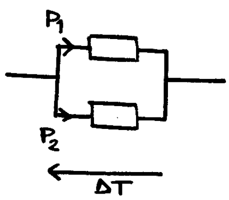
8) Lois d'associations

→ résistances en série



$$\boxed{R_{th} = R_{th_1} + R_{th_2}}$$

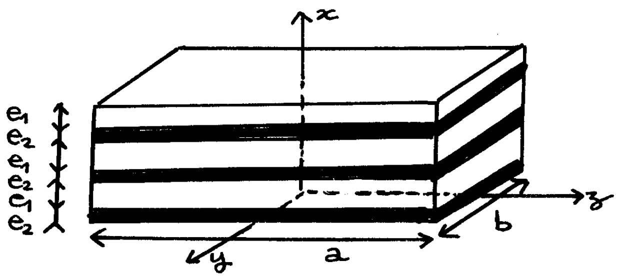
→ résistances en parallèle



$$\boxed{G_{th} = G_{th_1} + G_{th_2}}$$ avec $G = \dfrac{1}{R}$

---

9)



$A = a\,b$

dessin avec $N = 3$

$\rightarrow$ $\boxed{R = N\left(\frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S}\right)}$

$\rightarrow$ on pose

$$R = \frac{e}{\lambda S} \quad \text{avec} \quad e = N(e_1 + e_2)$$

donc :

$$\frac{N(e_1+e_2)}{\lambda S} = \frac{N}{S}\left(\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2}\right)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{(e_1+e_2)}{\left(\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2}\right)}}$$

$\rightarrow$ vérifications

- le milieu est homogène $\lambda_1 = \lambda_2$ au niveau conductivité

<u>on doit trouver $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$</u>

$$\lambda = \frac{(e_1+e_2)}{(e_1+e_2)/\lambda_1} \qquad \text{O.K.}$$

- $e_1 \ll e_2$. le milieu se comporte quasiment comme le milieu 2

<u>on doit trouver $\lambda = \lambda_2$</u>

$$\lambda = \frac{e_2\left(\frac{e_1}{e_2} + 1\right)}{\frac{e_2}{\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{e_1}{e_2} + 1\right)}$$

$$\simeq \lambda_2\left(1 + \frac{e_1}{e_2}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)$$

$$\simeq \lambda_2 \qquad \text{O.K.}$$

---

10)

$\rightarrow$ $$G = N\left(\frac{\lambda_1 (e_1 b)}{a} + \frac{\lambda_2 (e_2 b)}{a}\right)$$

$\rightarrow$ on pose

$$G = \frac{\lambda_{//} S'}{a} \quad \text{avec} \quad S' = N(e_1 b + e_2 b)$$

donc

$$\frac{\lambda'' N(e_1+e_2) b}{a} = \frac{N}{a}(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) b$$

$$\boxed{\lambda_{//} = \frac{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2}{e_1 + e_2}}$$

→ vérifications

- le milieu est homogène $\lambda_1 = \lambda_2$ au niveau conductivité.
  On doit trouver $\lambda_{//} = \lambda_1 = \lambda_2$

$$\lambda_{//} = \frac{\lambda_1 e_1 + \lambda_1 e_2}{e_1 + e_2} = \lambda_1 \quad \text{O.K.}$$

- $e_1 \ll e_2$. La conductance est assurée quasi uniquement par le milieu 2. On doit trouver $\lambda = \lambda_2$

$$\lambda_{//} = \frac{\lambda_2 e_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{e_1}{e_2} + 1\right)}{e_2 \left(\frac{e_1}{e_2} + 1\right)}$$

$$\simeq \lambda_2 \left(1 + \frac{e_1}{e_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1\right)\right)$$

$$\simeq \lambda_2 \quad \text{O.K.}$$

---

11) Γ_P est la capacité thermique par unité de volume à pression constante

$$\mathcal{C}_{P\,\text{système}} = N \left(c_{P_1} (\rho_1 S e_1) + c_{P_2} (\rho_2 S e_2) \right)$$

$$V_{\text{système}} = N \left(S e_1 + S e_2 \right)$$

$$\Gamma_P = \frac{\mathcal{C}_P}{V} = \frac{c_{P_1} \rho_1 \cancel{S} e_1 + c_{P_2} \rho_2 \cancel{S} e_2}{\cancel{S} e_1 + \cancel{S} e_2}$$

$$\boxed{\Gamma_P = \frac{\Gamma_{P_1} e_1 + \Gamma_{P_2} e_2}{e_1 + e_2}}$$

---

12) A.N. (avec $e_1 = e_2 = 2{,}5\ 10^{-3}$ mm)

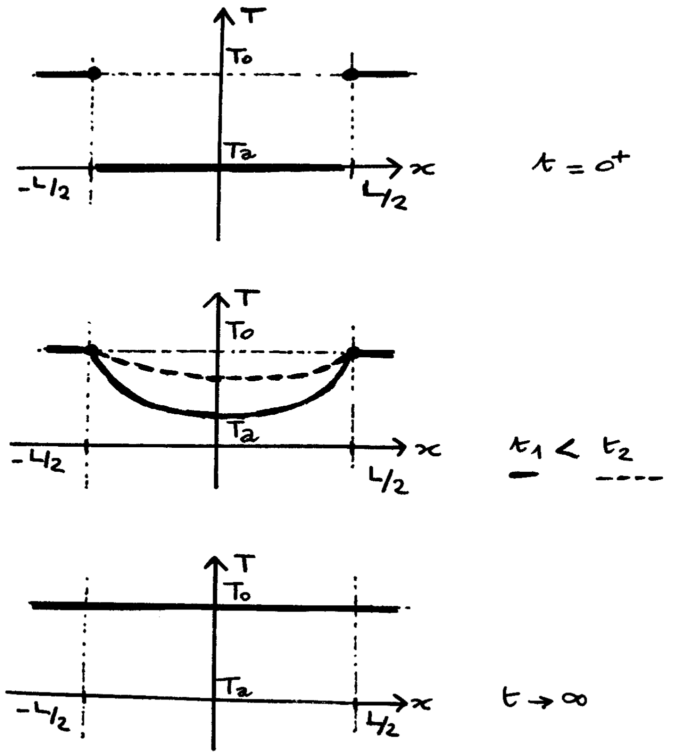
$$\lambda = \frac{2}{\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)} = \underline{0{,}585 \ \text{W m}^{-1}\,\text{K}^{-1}}$$

$$\lambda'' = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \underline{6{,}15 \ \text{W m}^{-1}\,\text{K}^{-1}}$$

$$\Gamma_P = \frac{\Gamma_{P_1} + \Gamma_{P_2}}{2} = \underline{2{,}67\ 10^{6} \ \text{J K}^{-1}\,\text{m}^{-3}}$$

---

13)



($T(x,t)$ est une fonction paire de x)

---

14) → soit, en partant de l'équation de la diffusion thermique :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

on a :

$$[\lambda] \frac{[\theta]}{[L]^2} = [c_p] \frac{[\theta]}{[t]}$$

$$[t] = \frac{[c_p][L]^2}{[\lambda]}$$

on peut donc poser :

$$\boxed{\tau = \frac{c_p L^2}{\lambda}}$$

→ soit, on cherche une combinaison de la forme

$$[t] = [c_p]^x \, [\lambda]^y \, [L]^z$$

$$= \left([W][\theta]^{-1}[L]^{-3}\right)^x \times$$

$$\left([W][\theta]^{-1}[L]^{-1}[t]^{-1}\right)^y \times$$

$$[L]^z$$

(en toute rigueur, il faudrait faire $\underset{\text{énergie}}{[W]} = M\, L^2\, t^{-2}$)

il est évident qu'on élimine $[\theta]$ en faisant $y = -x$

d'où

$$[t] = [L]^{-2x}\ [t]^{x}\ [L]^{z}$$

et finalement : $x = 1 \quad (y = -1)$

$z = 2$

ce qui donne

$$\tau = \frac{\mu c_p L^2}{\lambda}$$

A.N. $\boxed{\tau \simeq 3\,h}$

Temps caractéristique du temps d'uniformisation de la température à T_0 par les phénomènes de conduction

(l'approche qualitative donne un bon ordre de grandeur)

---

15) $\longrightarrow$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

on pose $\theta_{(x,t)} = T_{(x,t)} - T_0$ donc θ vérifie aussi

$$\boxed{\lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \mu c_p \frac{\partial \theta}{\partial t}}$$

$\longrightarrow$ Les conditions aux limites sont :

$$\boxed{\begin{aligned} \theta\left(\tfrac{L}{2}, t\right) &= 0 \\ \theta\left(-\tfrac{L}{2}, t\right) &= 0 \end{aligned}}$$

---

16) On pose $\theta(x,t) = \sum_{n \text{ impair}} \theta_n(x,t)$

avec $\theta_n(x,t) = f_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$\longrightarrow$ Cette fonction vérifie les conditions aux limites en $\pm \frac{L}{2}$ puisque $\cos\left(\frac{n\pi L/2}{L}\right) = \boxed{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0}$

puisque n est impair.

→ équation différentielle pour $f_n(t)$

$$\lambda \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \Gamma_p \frac{\partial\theta}{\partial t}$$

$$-\lambda \frac{n^2\pi^2}{L^2} f_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \Gamma_p \frac{df_n(t)}{dt}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\boxed{\frac{df_n(t)}{dt} + \frac{n^2\pi^2\lambda}{\Gamma_p L^2} f_n(t) = 0}$$

$$\frac{df_n(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_n} f_n(t) = 0$$

---

17) → $$\boxed{\tau_n = \frac{1}{n^2\pi^2}\frac{\Gamma_p L^2}{\lambda}}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\tau$$

A.N. $\tau_1 = \underline{1146\ s}$

→ solution :

$$\boxed{f_n(t) = A_n e^{-t/\tau_n}}$$

(A_n est obtenu grâce aux C.I.)

---

18) $$f_n(t) = 4\frac{(T_0-T_2)}{n\pi}(-1)^{\frac{n+1}{2}} e^{-t/\tau_n}$$

on veut : $$\left|\frac{f_1(t_1)}{f_3(t_1)}\right| = 3\ e^{-t_1\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{9}{\tau_1}\right)} = 100$$

soit $$\boxed{t_1 = \frac{\tau_1}{8}\ln\frac{100}{3}}$$

A.N. $t_1 = \underline{502\ s}$

<u>Si $t > t_1$ l'amplitude du 3e harmonique est encore plus faible</u> (cf $\tau_3 = \tau_1/9$) que $\frac{1}{100}$ du premier harmonique

On considère alors que <u>θ est confondu avec le premier terme du développement</u>, la somme des autres termes étant négligeable.

---

19) $\theta(x,t) \simeq -\frac{4}{\pi}(T_0-T_a)\, e^{-t/\tau_1} \cos\frac{\pi x}{L}$

et au centre, on veut que

$$\theta(0,t) = -\frac{4}{\pi}(T_0-T_a)\, e^{-t/\tau_1} > T_d - T_0$$
$$> -(T_0 - T_d)$$
$$e^{-t/\tau_1} < \frac{\pi}{4}\left(\frac{T_0-T_d}{T_0-T_a}\right)$$

soit $\boxed{t > \tau_1 \ln\left[\frac{4}{\pi}\frac{T_0-T_a}{T_0-T_d}\right]}$

A.N. $t > 2730\,s$

$t_d = \underline{2730\,s} \gg t_1$

ce qui est en accord avec l'approximation.

---

20) $\frac{\lambda_{//}}{\lambda} \simeq 10,4$

La conduction se fait beaucoup plus rapidement selon y et z que selon x.

Dans la suite, on fera alors

$$T = T(x,y,z,t)$$
$$T = T(x,t)$$

---

21) Sur une tranche dx, pendant dt (cf 3)

$$dH = \delta Q_{reçu} + \cancel{\delta Q_{produit}}$$
$$= \delta Q_{\substack{reçu \\ par\ conduction}} + \delta Q_{\substack{reçu \\ par\ conducto-convection}}.$$

$$\Gamma_p\, A\, dx\, \frac{\partial T}{\partial t}\, dt = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} A\, dx\, dt - h(T-T_a)\, d\Sigma\, dt$$

avec $A = ab$

$d\Sigma = 2(a+b)\,dx$

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{2(a+b)}{ab}\frac{h}{\lambda}}_{K^2}(T-T_a) = \frac{\Gamma_p}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}}$$

avec $\boxed{K^2 = \dfrac{2(a+b)}{ab}\dfrac{h}{\lambda}}$

dimension de K

→ en partant de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - K^2 (T - T_a) = \dots$$

$$\frac{[\theta]}{[L]^2} = [K]^2[\theta]$$

donc $[K] = L^{-1}$

$$\underline{K \text{ en } m^{-1}}$$

→ en partant de l'expression de K

$$K^2 = \frac{2(a+b)}{ab}\frac{h}{\lambda}$$

énergie (ML^2T^{-2})

$$[K]^2 = \frac{[L]}{[L]^2}\,\frac{[W]\,[L]^{-2}[\theta]^{-1}}{[W]\,[L]^{-1}\,[\theta]^{-1}}$$

$$= [L]^{-2}$$

idem.

---

22) → Pour le régime permanent, l'équation différentielle devient :

$$\boxed{\frac{d^2T^{\infty}_{(x)}}{dx^2} - K^2\,(T^{\infty}_{(x)} - T_a) = 0}$$

→ donc $(T^{\infty}_{(x)} - T_a) = A\,e^{Kx} + B\,e^{-Kx}$

C.L.

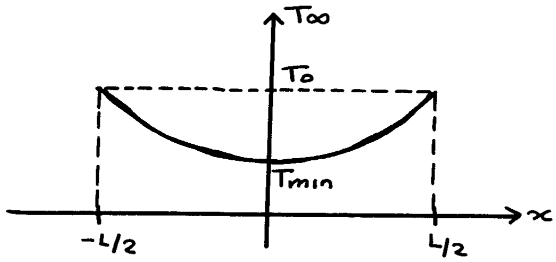
$x = \frac{L}{2}$ $\quad T_0 - T_a = A\,e^{KL/2} + B\,e^{-KL/2}$

$x = -\frac{L}{2}$ $\quad T_0 - T_a = A\,e^{-KL/2} + B\,e^{+KL/2}$

soit $A = B = \dfrac{(T_0 - T_a)}{2\,ch(KL/2)}$

$$\boxed{(T^{\infty}_{(x)} - T_a) = (T_0 - T_a)\,\frac{ch(Kx)}{ch(KL/2)}}$$

→ représentation graphique



→ En $x = 0$

$$\boxed{T_{min} - T_a = (T_0 - T_a)\,\frac{1}{ch\left(K\frac{L}{2}\right)}}$$

---

23) → $T_{min} > T_d$ donc

$$ch\left(K\frac{L}{2}\right) < \frac{T_0 - T_a}{T_d - T_a}$$

$$\boxed{K\frac{L}{2} < Argch\left(\frac{T_0 - T_a}{T_d - T_a}\right)}$$

d'où l'existence d'un h_{max} puisque K varie en $\sqrt{h}$

→ or $K^2 = \frac{2(a+b)}{ab}\,\frac{h}{\lambda}$

on étudie $\frac{(a+b)}{ab} = \alpha$ avec $A = ab$

donc $\alpha = \frac{1}{A}\left(a + \frac{A}{a}\right)$

minimal si $a = \sqrt{A} = b$

finalement h_{max} est le plus grand pour une plaque carrée alors

$$K^2 = \frac{4}{\sqrt{A}}\,\frac{h}{\lambda}$$

et pour cette valeur

$$\boxed{h_{max} = \frac{\lambda\sqrt{A}}{L^2}\,Argch^2\left(\frac{T_0 - T_a}{T_d - T_a}\right)}$$

A.N. $h_{max} = \frac{0{,}585\,\sqrt{0{,}02}}{(0{,}05)^2}\,Argch^2\left(\frac{460 - 290}{440 - 290}\right)$

$$\boxed{h_{max} = 8{,}6 \ W\,m^{-2}\,K^{-1}}$$

---

24) On pose $\xi(x,t) = T(x,t) - T^{\infty}(x)$

avec

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = K^2 (T - T_a) + \frac{\Gamma_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{d^2 T^{\infty}}{dx^2} = K^2 (T^{\infty} - T_a)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = K^2 \xi + \frac{\Gamma_p}{\lambda} \frac{\partial \xi}{\partial t}}$$

(en faisant la différence des deux équations différentielles)

25) → On écrit l'équation différentielle pour $g_n(t)$ en étudiant $\xi_n(x,t)$

$$\frac{\partial^2 \xi_n}{\partial x^2} = K^2 \xi_n + \frac{\Gamma_p}{\lambda} \frac{\partial \xi_n}{\partial t}$$

$$-\frac{n^2\pi^2}{L^2} g_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = K^2 g_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{\Gamma_p}{\lambda} \frac{dg_n}{dt} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\boxed{\frac{dg_n(t)}{dt} + \frac{\lambda}{\Gamma_p}\left(K^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) g_n(t) = 0}$$

→ On pose

$$\tau'_n = \frac{\Gamma_p}{\lambda} \frac{1}{K^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}} \quad \text{or}$$

$$\tau_n = \frac{\Gamma_p}{\lambda} \frac{1}{\frac{n^2\pi^2}{L^2}}$$

$$\boxed{\frac{\tau'_n}{\tau_n} = \frac{1}{1 + \left(\frac{KL}{n\pi}\right)^2}}$$

→ solution :

$$\boxed{g_n(t) = B_n \exp - \frac{t}{\tau'_n}}$$

26) $$\boxed{\frac{\tau'_1}{\tau_1} = 0{,}94}$$

Les temps caractéristiques restent du même ordre (mais on atteint le régime permanent un peu plus vite).