DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: non autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Afin de faciliter le travail du correcteur:

- On indiquera la numérotation des questions
- On passera une ligne entre chaque question
- On *encadrera* les réponses au rouge

On justifiera toutes les réponses, même celles jugées « évidentes » avec précision.

Sphère conductrice dans un champ uniforme

I. Généralités

1. Quelles sont les deux équations intégrales auxquelles le champ électrostatique $\vec{E}$ doit satisfaire?
2. Donner les deux équations locales correspondantes.
3. On pose $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}\,V$. Montrer que le potentiel V vérifie l'équation de Poisson (équation donnant le Laplacien de V en fonction de ρ densité volumique de charge au point considéré et ε_0).

II. Exercices indépendants

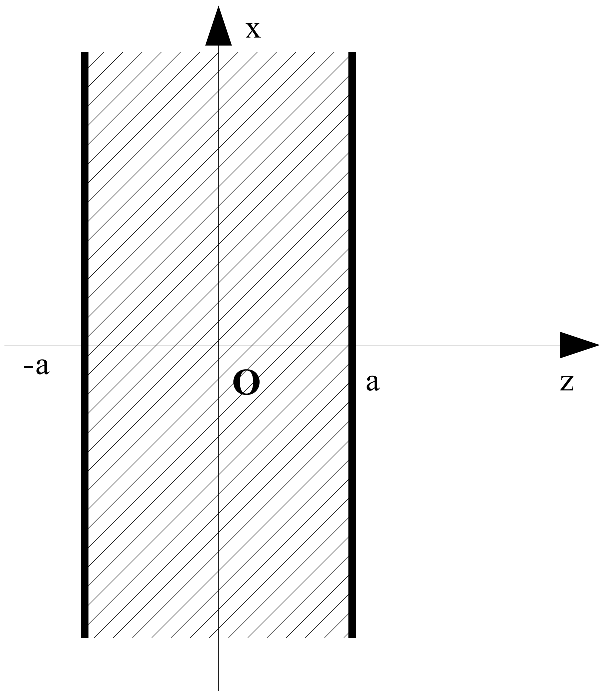
A. Couche plane de charge volumique:

On considère la répartition de charge $\rho=\rho(z)$ suivante:

pour $z<-a$ $\rho=0$

pour $-a<z<a$ $\rho=\rho_0$

pour $z>a$ $\rho=0$

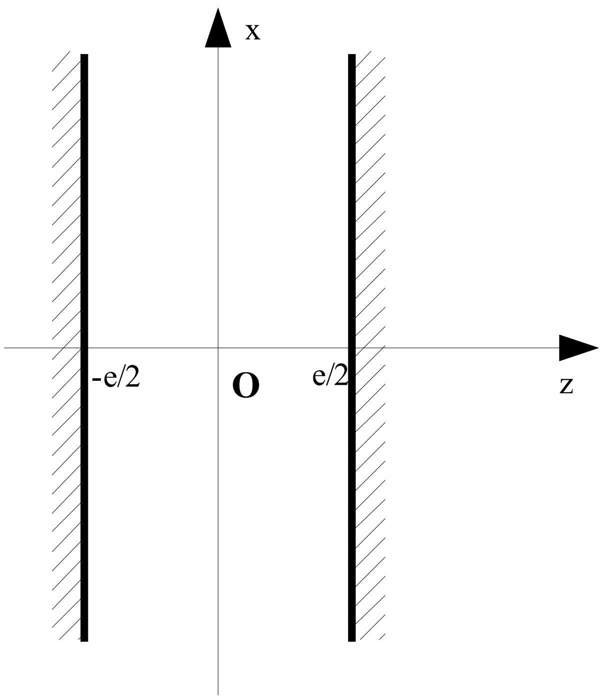


4. Montrer, en utilisant 3 plans de symétrie passant en un point N de cote $z=0$ que $\vec{E}$ en N est nul.
5. En utilisant deux plans de symétrie passant en un point M quelconque, déterminer la direction de

$\vec{E}$ en M.

6. $\vec{E}$ et V sont des fonctions de z .
   - La coordonnée non nulle E de $\vec{E}$ est-elle une fonction paire ou impaire de z . Justifier.
   - La fonction potentiel V est-elle une fonction paire ou impaire de z . Justifier.
   - Les parités de E et V sont obligatoirement contraires. Pourquoi?
7. En utilisant l'équation de Poisson, la parité de la fonction, déterminer complètement $V(z)$ dans la région $-a<z<a$ et en déduire le champ $\vec{E}$ dans cette région. On choisira $V(z=0)=0$
8. En déduire potentiel et champ dans les deux autres régions en utilisant la continuité de V (et de $\vec{E}$) pour une répartition volumique.
9. Tracer, avec soin, V et E en fonction de z pour $\rho_0>0$. Indiquer les valeurs particulières sur les graphes.
10. On modélise cette couche de charge volumique $\rho=\rho_0$ d'épaisseur $2a$ par une nappe surfacique chargée par une densité surfacique uniforme σ .
   - En faisant l'équivalence entre les charges pour une même surface $dS=dx\,dy$ donner l'expression de σ .
   - Déduire des résultats précédents l'expression du champ créé par une nappe plane chargée en surface pour $z>0$ et pour $z<0$. Expliquer.
   - Calculer la valeur de la discontinuité du champ $\vec{E}$ à la traversée de cette surface chargée. Commenter.

B. Condensateur:



On considère l'espace vide interarmatures dans un condensateur pour $-e/2<z<e/2$. L'une des armatures métalliques occupe l'espace $z>e/2$ et l'autre occupe l'espace $z<-e/2$.

11.Que devient l'équation de Poisson dans cet espace vide de charges.

12.On donne $V=-U/2$ pour $z\geq e/2$ et $V=U/2$ pour $z\leq -e/2$ avec $U>0$.

- Déterminer l'expression du potentiel V entre les armatures (V est continu).
- Quelle est la valeur de V_0 le potentiel en O.

13.En déduire l'expression du champ $\vec{E}$ en tout point entre les armatures. Vérifier que ce champ peut s'écrire $\vec{E}=E_0\vec{u}_z$.

14.Déterminer l'expression du champ dans les armatures métalliques.

15.Rappeler l'expression de la relation de passage pour le champ électrique à la traversée d'une surface chargée. En déduire la densité surfacique en $z=-e/2$ et le densité surfacique en $z=e/2$.

16.A titre de vérification retrouver le champ créé en tout point de l'espace par calcul direct connaissant les densités de charge des deux plans. Le résultat est-il conforme à la valeur obtenue plus haut.

C. Doublet à grande distance:

On retrouve ici le potentiel créé par un doublet à grande distance.

17.Rappeler, en sphériques, l'expression du champ et du potentiel créés par une charge ponctuelle (le potentiel est nul à l'infini). Vérifier la relation $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}(V)$.

18.Le doublet est constitué d'une charge $(-q)$ au point N $(x=0, y=0, z=-a)$ et d'une charge $(+q)$ au point P $(x=0, y=0, z=+a)$. Le milieu de NP est le point O. Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques: $r=OM$, $\theta=(\overrightarrow{Oz},\overrightarrow{OM})$ et φ . On pourra supposer q positive.

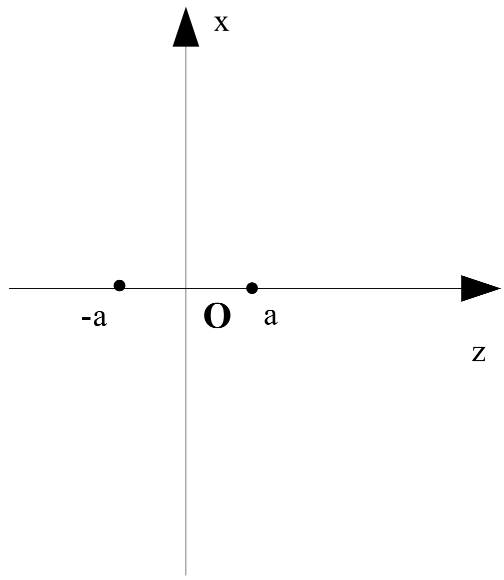
- Définir φ et justifier que les résultats sont indépendants de cet angle. Justifier sans calcul la valeur du champ selon $\vec{u}_\varphi$
- Ecrire le potentiel créé par le doublet en fonction de q, ε_0, NM, PM puis en fonction de $q, \varepsilon_0, r, a, \theta$.

19.On suppose pour retrouver le potentiel du dipôle que $r\gg a$.

- En travaillant au premier ordre en $\frac{a}{r}$, montrer que le potentiel s'écrit $V=\frac{\vec{p}\,\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ où $\vec{p}$ est le potentiel dipolaire du dipôle.
- Quelle expression de $\vec{p}$ peut-on en déduire ?

20.A titre de précision sur la qualité de l'approximation, on souhaite travailler au deuxième ordre en $\frac{a}{r}$.

- Ecrire $\frac{1}{PM}$ au deuxième ordre en $\frac{a}{r}$ sous la forme $\frac{1}{PM}=\frac{1}{r}\left(\ 1+\frac{a}{r}P_1(\cos\theta)+\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta)\ \right)$ où $P_1(\cos\theta)$ et $P_2(\cos\theta)$ désignent des polynomes en $\cos(\theta)$. Déterminer les polynomes de Legendre $P_1(\cos\theta)$ et $P_2(\cos\theta)$.
- Justifier que la formule précédente reste vraie au deuxième ordre.

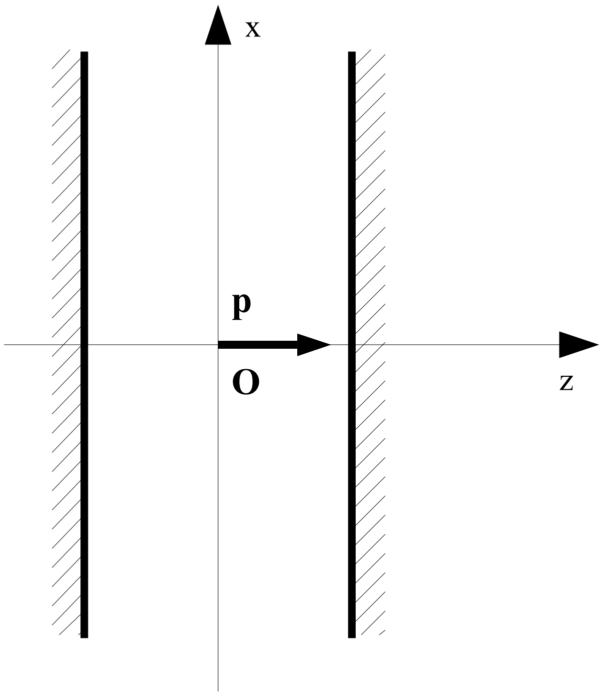


21. En déduire (en fonction de p, grandeur du dipôle) l'expression du champ électrostatique créé par un dipôle en coordonnées sphériques.
22. Représenter qualitativement l'allure des lignes de champ (les orienter). Les lignes de champ sont-elles fermées? Commenter, justifier?

III. Dipôle dans un champ uniforme

Dans le champ $\vec{E}=E_0\vec{u}_z$ étudié précédemment, on place en O, un dipôle électrostatique $\vec{p}=p\vec{u}_z$. Les grandeurs E_0 et p sont positives.

23. Donner l'expression du potentiel total (potentiel dû au dipôle et aux charges du condensateur) en chaque point dans un système de coordonnées sphériques de centre O.
24. Montrer que l'équipotentielle $V=V_0$ - voir plus haut - comporte un plan et une sphère dont on exprimera le rayon noté r_{V_0} en fonction des données: E_0, p, ε_0 .
25. Donner l'expression du champ électrostatique total et indiquer les points ou le champ est nul.
26. Sur un dessin dans le plan xOz, représenter l'équipotentielle $V=V_0$ et donner l'allure de plusieurs lignes de champ (les orienter). On indique que près du dipôle, les lignes de champ ressemblent à celles du dipôle et que loin du dipôle, les lignes tendent vers celles du champ du condensateur.



IV. Sphère métallique dans un champ uniforme

On étudie ici ce qui se passe lorsque l'on place une sphère (creuse ou pleine) métallique, non chargée, de rayon R , de centre O, dans le champ électrostatique $\vec{E}=E_0\vec{u}_z$ du condensateur. Sous l'influence de ce champ, des électrons libres se déplacent dans la sphère. Le champ total est donc dû aux charges du condensateur (on suppose que cette répartition de charge est totalement inchangée) soit $E_0\vec{u}_z$ et aux charges apparues au niveau de la sphère.Cette phase s'arrête lorsque <u>le champ total est nul</u> dans la sphère (la force sur une charge libre est alors nulle). Lorsque cet équilibre électrostatique est atteint, la sphère est chargée en surface.

27.La sphère était neutre (pas chargée) au départ et isolée électriquement. Pourquoi (donner un principe physique important) la charge totale de la sphère reste nulle bien que des charges sont apparues localement (uniquement en surface) sur la sphère.

28.Montrer que, à l'équilibre électrostatique, la sphère constitue un volume équipotentiel.

29.Pour calculer le potentiel de cette sphère, on calcule le potentiel en O.

- Quel est le potentiel dû aux charges du condensateur?
- Calculer le potentiel en O dû aux charges de la sphère (faire l'intégrale des potentiels élémentaires dus aux charges élémentaires).
- En déduire que la sphère est au potentiel V_0 -voir texte plus haut-.

30.<u>On admet</u> que dans la région extérieure à la sphère métallique de rayon R , le champ et le potentiel sont les mêmes que ceux obtenus dans le problème précédent dipôle+condensateur à condition de faire correspondre r_{V_0} à R .

- Donner l'expression du potentiel total à l'extérieur de la sphère métallique de rayon R en fonction des données: E_0, R, r, θ .

- La sphère se comporte pour l'extérieur (même immédiat) comme un dipôle $\vec{p}$. Donner l'expression de $\vec{p}$ en fonction des données E_0, R, ε_0 .

31.Donner l'expression du champ total $\vec{E}$ en coordonnées sphériques en tout point où il est défini.

32.Sur un dessin dans le plan xOz, représenter la surface de la sphère de rayon R et indiquer l'allure des lignes de champ.

33.On se propose de déterminer les charges apparues sur la sphère.

- Rappeler la relation générale de passage à la traversée d'une surface chargée. La simplifier sachant que le champ intérieur est nul pour obtenir: $\vec{E}(r \rightarrow R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$. A quel vecteur correspond ici ce vecteur unitaire $\vec{n}$?
- En déduire l'expression de σ et l'écrire sous la forme $\sigma_0 \cos(\theta)$. Exprimer σ_0 en fonction des données.

34.A titre de vérification, on se propose de calculer directement la champ créé par une sphère chargée par une densité de charge $\sigma_0 \cos(\theta)$.

- Retrouver l'expression du champ $\vec{E}$ créé, sur son axe, par une spire de rayon R chargée linéiquement. La charge totale de la spire est notée Q .
- En décomposant la sphère de rayon R en spires élémentaires, déterminer le champ créé par la sphère en son centre O.
- Conclure.

35.A titre de vérification, on se propose de calculer directement le moment dipolaire de la sphère chargée par une densité de charge $\sigma_0 \cos(\theta)$.

- On associe deux à deux les éléments de surface dS et dS' symétriques par rapport au plan équatorial $z=0$. Calculer le moment dipolaire élémentaire $\overrightarrow{dp}$ d'un tel doublet.
- En déduire le moment dipolaire total de la sphère.
- Conclure.

Pièges électroniques 1D, 2D, 3D

Conformément à l'usage international, les vecteurs sont représentés en **gras**.

Constantes physiques :

Charge élémentaire :	e	$= 1{,}60.10^{-19}$C
Masse de l'électron :	m_e	$= 0{,}911.10^{-30}$kg
Vitesse de la lumière dans le vide :	c	$= 3\text{x}10^{8}$m.s^{-1}
Permittivité du vide :	ε_o	$= 8{,}85\ 10^{-12}$ F.m^{-1}
Perméabilité du vide :	μ_o	$= 4\pi\ 10^{-7}$ H.m^{-1}

(On rappelle que, dans les problèmes de particules se déplaçant dans des champs **E** *et* **B***, la force poids est négligeable)*

Les pièges électroniques 1D, 2D, 3D sont des dispositifs qui permettent, à l'aide de champs électriques et magnétiques, de confiner un électron (masse m_e et charge - e) dans une très petite région de l'espace, selon une, deux ou trois dimensions, respectivement. Les mouvements de l'électron seront rapportés à un référentiel $\mathscr{R}$(Oxyz).

1. Question préliminaire : rappeler l'expression de la force de Lorentz subie par une charge q se déplaçant à la vitesse **v** dans un champ (**E**, **B**).

I. Piège 1D

On considère un champ électrostatique **E** dont le potentiel V associé a pour expression :

$$V(r) = V_0 \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{4d^2}$$

2. Etablir en électrostatique du vide l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, où Δ est l'opérateur laplacien.
3. Vérifier que le potentiel proposé, dit quadrupolaire, satisfait à l'équation de Laplace.
4. Donner l'expression du champ **E** en coordonnées cartésiennes dans la base (**i**, **j**, **k**) en fonction de V_0, d, x, y ,z .
5. Un électron (charge : $-$ e)est soumis à la force électrostatique exercée par le champ électrostatique précédent. Etablir dans la même base les trois équations différentielles du second ordre du mouvement de l'électron liant $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ à x, y ,z.
6. A quelle condition sur V_0 le mouvement axial suivant Oz de l'électron est-il confiné dans une région limitée de l'espace ? Le mouvement transversal, dans le plan Oxy, est-il alors lui-même confiné ?

7. Exprimer, en fonction de V_0 et d et des constantes du problème, la pulsation ω_A du mouvement confiné et la fréquence correspondante f_A .

8. Dans le cas V_0 = - 9,3 V et d = 3,4 mm ; donner un ordre de grandeur de la fréquence f_A en MHz.

II. Piège 2D

Un électron se déplace dans un champ magnétique uniforme et constant **B**.

9. Ecrire, dans le cadre de la dynamique newtonienne, l'équation vectorielle du mouvement d'une particule de charge q dans le référentiel $\mathscr{R}$(Oxyz), dont l'axe Oz est défini par la direction et le sens de **B**.
   - On écrira le résultat sous la forme $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}$. Donner l'expression de $\boldsymbol{\omega}$, préciser la direction et le sens du vecteur.
   - Commenter en détail la signification physique de ce résultat.
   - Préciser le mouvement résultant en fonction du signe de q.

10. La particule est un électron. On introduit la pulsation cyclotron $\omega_C = eB/m_e$. Donner l'ordre de grandeur de la fréquence correspondante f_C en Ghz pour B = 0,55 T .

11. Ecrire les trois équations différentielles du mouvement donnant $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ et $\ddot{z}$ en utilisant la notation ω_C.

12. On pose $\zeta = x + i\,y$ et $\dot{\zeta}(t) = \frac{d\zeta(t)}{dt}$. En couplant deux des équations précédentes, déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait la variable complexe $\dot{\zeta}(t)$.

13. En intégrant l'équation différentielle, obtenir $\dot{\zeta}(t)$ en fonction du temps (et non pas en fonction de ζ) et des constantes du problème (la constante inconnue d'intégration sera déterminée à la question suivante)

14. L'origine O de $\mathscr{R}$ a été choisie au point où se trouvait l'électron à l'instant pris comme origine et le plan Ozx est défini par la vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ et le champ **B** ; on désigne par θ_0 l'angle que fait $\mathbf{v}_0$ avec **B**. Donner alors z(t), $\dot{\zeta}(t)$ puis $\zeta(t)$ d'où x(t) et y(t).

15. Dessiner l'allure de la trajectoire de l'électron.

16. Préciser l'équation et la forme de la trajectoire en projection dans le plan Oxy . Un tel système se comporte donc pour l'électron comme un piège 2D dont on exprimera la largeur maximale caractéristique notée $2\rho_C$. Donner un ordre de grandeur pour $v_0 = 42\ 10^3$ m.s^{-1}.

III. Piège 3D

On soumet simultanément un électron aux forces exercées par un champ magnétique uniforme (Cf.II) et par un champ électrique quadrupolaire (Cf.I). On réalise ainsi un piège 3D, appelé piège de Penning.

17. Ecrire les trois équations différentielles du mouvement, dans la base de R en fonction de ω_C et ω_A. A quelle équation différentielle du second ordre, satisfait la variable complexe $\zeta = x + i\, y$?

18. En déduire les deux solutions de cette dernière équation en fonction de ω_C et ω_A. Montrer que le mouvement est la superposition de deux mouvements sinusoïdaux, de pulsations telles que l'une est voisine de ω_C .L'autre est notée ω_M. Elle est appelée pulsation magnétron. On l'exprimera en fonction de ω_C et ω_A. Montrer qu'à chacune de ces pulsations est associée une trajectoire circulaire de l'électron et donner l'expression ρ_M du rayon de la trajectoire circulaire associée à la pulsation magnétron pour un électron de vitesse v_0.

19. Estimer l'ordre de grandeur de la fréquence magnétron f_M et du rayon ρ_M avec les données précédentes et comparer les trois fréquences f_A , f_C , f_M.

20. On peut considérer la mouvement de l'électron, dans une première approche sommaire, comme résultant de la superposition de trois mouvements :

   - entraînement ou dérive sur un cercle de rayon ρ_m à la fréquence magnétron dans xOy
   - oscillations suivant Oz
   - rotation cyclotronique de rayon ρ_c calculé précédemment.

   Donner sur un schéma l'allure de la trajectoire de l'électron.On ne respectera bien sûr ni l'échelle des fréquences, ni l'échelle des amplitudes.

Réponses

Sphère conductrice dans un champ uniforme

1) $\oint \vec{E}\, \vec{dl} = 0$

$\oiint \vec{E}\, \vec{dS} = \dfrac{q_{intérieur}}{\varepsilon_0}$

---

2) $\overrightarrow{rot}\, \vec{E} = \vec{0}$

$div\, \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

---

3) $\overrightarrow{rot}\, \vec{E} = \vec{0}$ donc $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$

$div(-\overrightarrow{grad}\, V) = \rho/\varepsilon_0$

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

---

4) Les plans Nxz
Nyz
Oxy
qui contiennent le point N sont des plans de symétrie
Donc $\vec{E}(N)$ doit appartenir à ces 3 plans orthogonaux.

$$\boxed{\vec{E}(N) = \vec{0}}$$

---

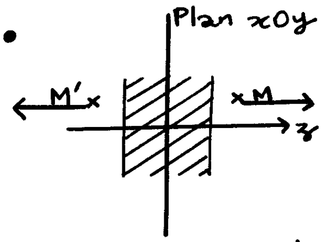
5) Les plans Mxz
Myz
sont des plans de symétrie
Donc $\vec{E}(M)$ est selon $\vec{u_z}$

$$\boxed{\vec{E}(M) = E\, \vec{u_z}}$$

↳ qui ne dépend que de z
car le problème est invariant en translation selon x et y

---

6) •



M en z et M' en $z' = -z$ sont symétriques par rapport au plan xOy donc $\vec{E}(M')$ est symétrique de $\vec{E}(M)$ par rapport au plan

$E(z' = -z) = -E(z)$

$\boxed{\text{E est une fonction impaire de } z}$

- V est une grandeur scalaire.
  Pour la même raison :
  $V(M') = V(M)$
  $V(-z) = V(z)$
  $\boxed{\text{V est une fonction paire de } z}$

- on sait (maths) que la dérivée d'une fonction paire est impaire et réciproquement.
  Ici $E = -\frac{dV}{dz}$
  $\boxed{\text{E est la dérivée de V (au signe près)}}$. Si V est paire, E est impaire.

---

7) $\Delta V = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

$$V = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{z^2}{2} + Az + B$$

avec
$A = 0$ car V est paire
$B = 0$ car on pose $V(z=0) = 0$

$$\boxed{V = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{z^2}{2}}$$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dz}\,\vec{u_z}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\,z\,\vec{u_z}}$$

---

8) <u>Pour $z > a$</u> $\rho = 0$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

$V = Az + B$ et $E = -A$

Pour une distribution volumique V et E sont continus (en $z = a$)

donc en $z = a$ on aura $\underset{(z=a)}{V} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{a^2}{2}$ et $\underset{(z=a)}{E} = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}$

finalement :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\,\vec{u_z}}$$

$$\boxed{V = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}(a - 2z)}$$

Pour $z < -a$

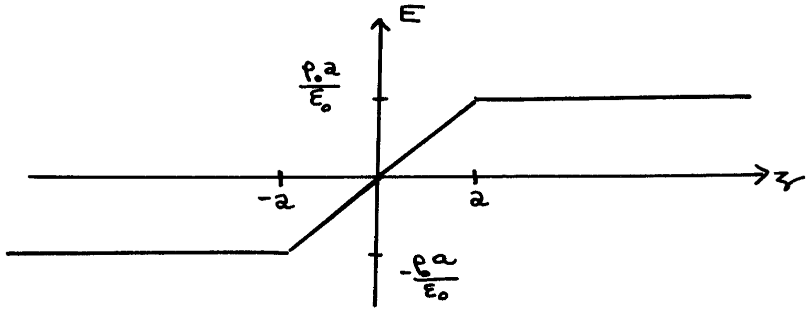
on utilise la parité de V et l'imparité de E

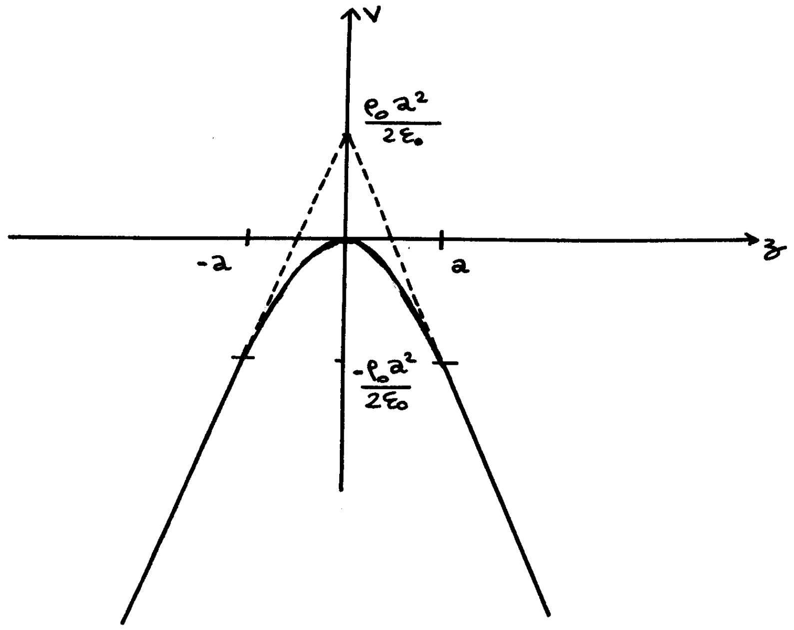
$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\vec{u_z}}$$

$$\boxed{V = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}(a + 2z)}$$

---

9)



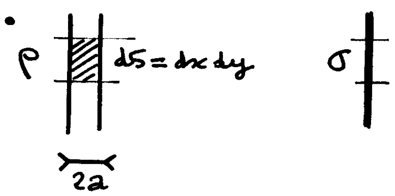


E est égal à moins la dérivée de V

(V est dérivable en $\pm a$)

---

10) •



La charge est la même pour les 2 modèles donc

$$\rho\, d\tau \Leftrightarrow \sigma\, dS$$

$$\rho\, 2a\, dS \Leftrightarrow \sigma\, dS$$

on fera donc

$$\boxed{\sigma = \rho\, 2a}$$

- d'où

$z > a$ $\quad \vec{E} = \dfrac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\,\vec{u_z}$

$z < a$ $\quad \vec{E} = \dfrac{-\rho_0 a}{\varepsilon_0}\,\vec{u_z}$

devient dans le modèle surfacique ($\rho \to \infty$, $a \to 0$, $\lim(\rho 2a) = \sigma$)

$$\boxed{\begin{array}{lll} z>0 & \vec{E} & = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} \\ z<0 & \vec{E} & = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} \\ z=0 & \vec{E} & \text{non défini} \end{array}}$$

- discontinuité à la traversée

$$\boxed{\vec{E}(z=0^+) - \vec{E}(z=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{u_z}}$$

conforme à la relation générale

$$\vec{E}_{\text{voisinage}2} - \vec{E}_{\text{voisinage}1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n}_{1\to 2}$$

si 2 désigne ici le milieu $z > 0$.

---

11) Dans l'espace vide , l'équation de Poisson devient

$$\boxed{\Delta V = 0 \quad (\text{équation de Laplace})}$$

soit ici avec $V = V(z)$

$$\boxed{\frac{d^2V}{dz^2} = 0}$$

---

13) $\qquad -e/2 < z < +e/2$

$V = A\, z + B$ avec les C.L.

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{U}{2} = A\,\dfrac{e}{2} + B \\ +\dfrac{U}{2} = A\left(-\dfrac{e}{2}\right) + B \end{array}\right\}$$

$$\boxed{V = -\frac{U}{e}\, z}$$

En O, $V(0) = \boxed{V_0 = 0}$

---

13) $E = -\dfrac{dV}{dz}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{U}{e}\,\vec{u_z}}$$

On retrouve le résultat connu : dans un condensateur, le champ est uniforme. Il est égal à la ddp divisée par la distance entre les armatures.

---

14) Dans l'armature supérieure, V est uniforme $(-\frac{U}{2})$ donc le gradient est nul.
Dans l'armature inférieure, V est uniforme $(+\frac{U}{2})$ donc le gradient est nul.

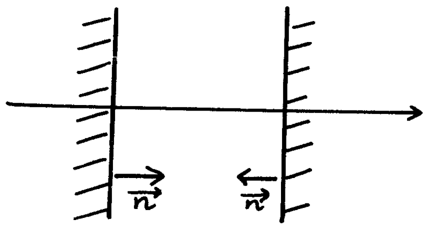
$$\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$$

---

15) $\vec{E}_{voisinage\,2} - \vec{E}_{voisinage\,1} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n}_{1\to 2}$

En désignant par (1) le métal d'une armature $(\vec{E_1} = \vec{0})$
par $\vec{n}_{ext}$ la normale vers l'extérieur du métal :

$$\boxed{\vec{E}_{\substack{vide\\ \text{au voisinage}}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n}_{ext}}$$



Ici :

$\dfrac{U}{e}\vec{u_z} = \sigma_{(-\frac{e}{2})}\dfrac{1}{\varepsilon_0}\vec{u_z}$

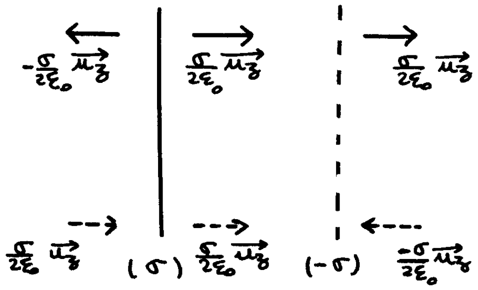
Ici :

$\dfrac{U}{e}\vec{u_z} = \sigma_{(+\frac{e}{2})}\dfrac{1}{\varepsilon_0}(-\vec{u_z})$

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma(-\tfrac{e}{2}) &= \frac{\varepsilon_0 U}{e} = +\sigma\\ \sigma(+\tfrac{e}{2}) &= -\frac{\varepsilon_0 U}{e} = -\sigma\end{aligned}}$$

---

16) On vérifie la cohérence en calculant par superposition le champ créé par deux plans chargés



D'où $z < -\frac{e}{2}$ $\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$

$-\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2}$ $\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}}$ (avec $\sigma = \frac{\varepsilon_0 U}{e}$)

$= \frac{U}{e}\overrightarrow{u_z}$

$z > \frac{e}{2}$ $\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$

On retrouve bien les résultats précédents.

---

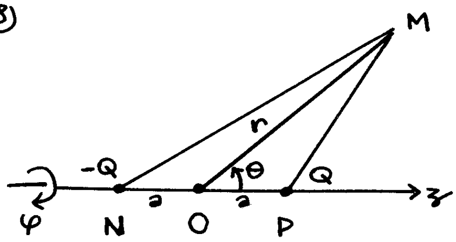
17) $\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}} = E\,\overrightarrow{u_r}$

$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

$E = -\frac{dV}{dr}$

---

18)



- $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om})$ avec m : projeté de M dans le plan xOy.
- Oz est un axe de révolution donc il y a invariance en rotation autour de Oz et les résultats ne dépendent pas de φ
- Le plan $(O\,\overrightarrow{u_r}\,\overrightarrow{u_\theta})$ est un plan de symétrie passant par M donc $\vec{E}(M)$ est dans ce plan soit $E_\varphi = 0$

- $$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right)}$$

- $$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+2ar\cos\theta+a^2}}\right)}$$

---

19) Au premier ordre en $\frac{a}{r}$

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta + \cancel{\frac{a^2}{r^2}}\right)^{-1/2}$$

$$\simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta\right)$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left[\left(1+\frac{a}{r}\cos\theta\right) - \left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right)\right]$$

$$= \frac{Q\ 2a\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

on pose $\boxed{\vec{p} = 2aQ\,\vec{u_z}}$

$$V = \frac{\vec{p}\,\vec{u_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

---

20) Au deuxième ordre en $\frac{a}{r}$, en utilisant :

$$(1+u)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{u}{2} + \frac{3}{8}u^2$$

$$\frac{1}{PM} \simeq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\left(-\frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)}{2} + \frac{3}{8}\left(-\frac{2a}{r}\cos\theta + \cancel{\frac{a^2}{r^2}}\right)^2\right)$$

$$\simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}(\cos\theta) + \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right)\right)$$

donc
$$\boxed{\begin{aligned} P_1(\cos\theta) &= \cos\theta \\ P_2(\cos\theta) &= \frac{3\cos^2\theta-1}{2}\end{aligned}}$$

D'où <u>on retrouve bien le même résultat</u> pour V :

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}P_1 + \frac{a^2}{r^2}P_2\right)$$

$$\frac{1}{NM} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}P_1 + \frac{a^2}{r^2}P_2\right)$$

$$\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} = \frac{1}{r}\left(\frac{2a}{r}\cos\theta\right)$$

---

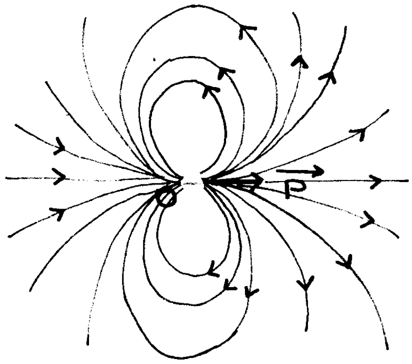
21)
$$V = \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u_r} - \frac{\partial V}{r\partial\theta}\vec{u_\theta} - \frac{\partial V}{r\sin\theta\,\partial\varphi}\vec{u_\varphi}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\vec{u_r} + \frac{\sin\theta}{r^3}\vec{u_\theta}\right)}$$

---

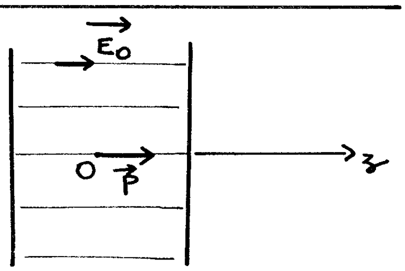
22)



Les lignes de champ semblent se fermer en O.
C'est impossible : une ligne de champ ne peut être fermée en électrostatique puisque le long de cette ligne V diminue sans cesse.
En fait, le champ n'est pas défini en O (cf r=0) d'où les lignes ne sont pas fermées.

---

23)



$$V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - E_0 z \quad \text{avec } z = r\cos\theta$$

$$\boxed{V_{(r,\theta,\varphi)} = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - E_0 r\right)\cos\theta}$$

---

24) On cherche l'équipotentielle $V = V_0 = 0$

$$0 = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - E_0 r\right)\cos\theta$$

soit $\cos\theta = 0$ ou $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{plan}}$

soit $\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - E_0 r$ ou $\boxed{\underset{(r_{V_0})}{r} = \sqrt[3]{\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}} \quad \text{sphère}}$

---

25) $$\boxed{\vec{E} = \left(\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + E_0\right)\cos\theta\,\vec{u_r} + \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - E_0\right)\sin\theta\,\vec{u_\theta}}$$

Sur le cercle de rayon r_{V_0} (E_θ sera nul)

en $\theta = \frac{\pi}{2}$ (E_r sera nul)

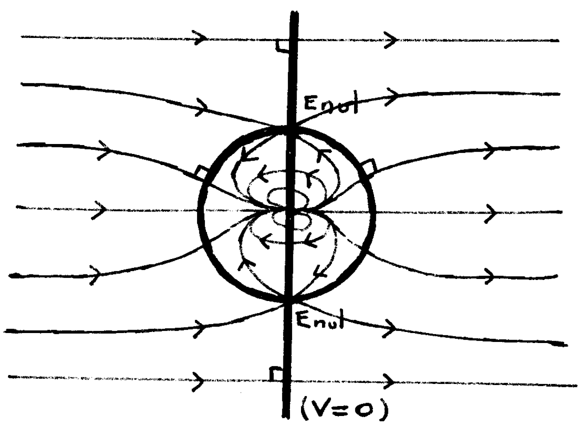
le champ est nul.

$\boxed{\vec{E}}$ **est nul sur le cercle d'intersection entre les deux nappes de l'équipotentielle $V = V_0 = 0$ (= cercle équatorial)**

(en ces points, des lignes de champ semblent – ce qui est impossible – se croiser. En fait le champ y est nul)

---

26)



En O, E non défini

---

27) La sphère étant isolée, la charge totale est conservée. Puisque la charge initiale était nulle, la charge totale finale est nulle aussi

---

28) $\vec{E} = \vec{0}$ dans la sphère car à l'équilibre électrostatique, les charges libres ne bougent plus.

Donc $\boxed{\overrightarrow{grad}\, V = \vec{0}}$

V est uniforme dans la sphère.

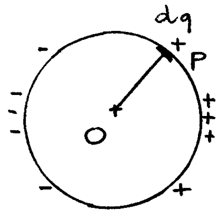
La sphère est donc un volume équipotentiel.

---

29) Potentiel en O

- dû au condensateur : V_0 $(=0)$ calculé précédemment.
- dû aux charges sur la sphère

On utilise la formule : $V = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$



Ici $V_{(O)} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PO}$

$= \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$= \frac{q_{\text{totale sphère}}}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$= 0$

- potentiel total en O :

$V_0 + 0 = V_0$

La sphère est donc au potentiel V_0 $(=0)$

---

30) A l'extérieur :

$V = \cos\theta \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - E_0 r \right)$

avec $r_0 = R = \sqrt[3]{\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}}$ soit $\boxed{p = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0}$

$V = \cos\theta \left(\frac{E_0 R^3}{r^2} - E_0 r \right)$

$$\boxed{V_{(r>R)} = E_0 \cos\theta \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right)}$$

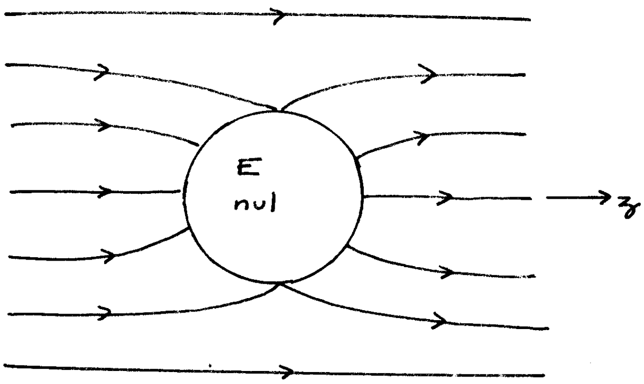
---

31) $\boxed{\vec{E}_{(r<R)} = \vec{0}}$

$$\boxed{\vec{E}_{(r>R)} = E_0 \cos\theta \left(\frac{2R^3}{r^3} + 1 \right) \vec{u_r} + E_0 \sin\theta \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) \vec{u_\theta}}$$

---

32)



---

33) $\overrightarrow{E}_{\text{voisinage } 2} - \overrightarrow{E}_{\text{voisinage } 1} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \overrightarrow{n}_{1\to 2}$

$$\boxed{\overrightarrow{E}(r=R^+) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \overrightarrow{u_r}}$$

or ici

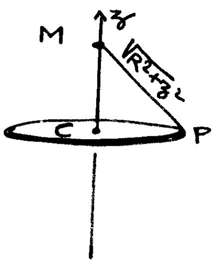
$$\overrightarrow{E}(r=R^+) = E_0 \cos\theta \ (2+1) \overrightarrow{u_r} + E_0 \sin\theta \ (1-1) \overrightarrow{u_\theta}$$

donc

$$\boxed{\sigma = \underbrace{3 \varepsilon_0 E_0}_{\sigma_0} \cos\theta}$$

---

34) - champ créé par une spire sur son axe :



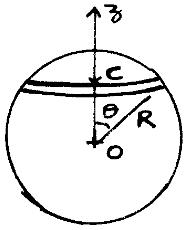
$$\overrightarrow{E}(M) = E(z) \overrightarrow{u}_{(z)}$$

$$= \int_{\text{spire}} \frac{dq \ \overrightarrow{PM}}{4\pi\varepsilon_0 PM^3}$$

$$E = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\lambda R d\theta \ z}{4\pi\varepsilon_0 \ (R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{Q \ \overrightarrow{CM}}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}} \quad \text{avec } \overrightarrow{CM} = z \overrightarrow{u_z}$$

- sphère avec $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$



$$d\overrightarrow{E} = \frac{dQ \ \overrightarrow{CO}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad \text{avec } \overrightarrow{CO} = -z \overrightarrow{u_z}$$

$$= \frac{\sigma \, 2\pi R \sin\theta \ R \, d\theta \ (-z)}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \overrightarrow{u_z}$$

$$E = \int_{\theta=0}^{\pi} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \sin\theta \cos\theta \, d\theta$$

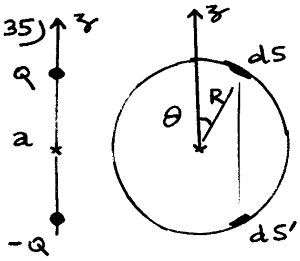
$$= \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \cos^2\theta \times \underbrace{-\sin\theta\, d\theta}_{d(\cos\theta)}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} \vec{u_z}}$$

- Le champ créé par la sphère est donc bien égal à $-E_0 \vec{u_z}$ en son centre. Si on admet que ce résultat est identique en tout point intérieur à la sphère, on trouve que <u>le champ total</u> en présence du condensateur (qui crée $E_0 \vec{u_z}$) <u>est bien nul à l'intérieur de la sphère</u>.

---

35)



au lieu de $\vec{P} = Q\, a\, \vec{u_z}$

Ici $\quad d\vec{p} = \underbrace{dQ}_{\sigma R d\theta\, R \sin\theta\, d\varphi}\ 2R\cos\theta\ \vec{u_z}$

$$= 2\underbrace{\sigma}_{\sigma_0 \cos\theta} R^3 \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\vec{P} = 4\pi\sigma_0 R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$\boxed{\vec{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_0 \vec{u_z}}$$

on retrouve bien $\quad \vec{P} = 4\pi R^3 \varepsilon_0 E_0 \vec{u_z}$

Pièges électroniques 1D, 2D, 3D

1) $\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$

Piège 1D

2) En électrostatique du vide :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$$

$$div\,\vec{E} = 0 \quad \text{d'où} \quad div(-\overrightarrow{grad}\,V) = 0$$

$$-\Delta V = 0$$

on obtient l'équation de Laplace :

$$\boxed{\Delta V = 0}$$

---

3) On donne $V = V_0 \dfrac{2z^2 - x^2 - y^2}{4d^2}$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{2V_0}{4d^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{2V_0}{4d^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{4V_0}{4d^2}$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

on a bien

$$\Delta V = 0$$

---

4)

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$$

$$\boxed{\vec{E}\ \begin{vmatrix} \dfrac{V_0 x}{2d^2} \\ \dfrac{V_0 y}{2d^2} \\ -\dfrac{V_0 z}{d^2} \end{vmatrix}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}}$$

---

5) principe fondamental appliqué à l'électron :

$$-e\vec{E} = m\vec{a}$$

$$\left|\begin{array}{l} -e\dfrac{V_0 x}{2d^2} = m\ddot{x} \\ -e\dfrac{V_0 y}{2d^2} = m\ddot{y} \\ +e\dfrac{V_0 z}{d^2} = m\ddot{z} \end{array}\right.$$

soit

$$\boxed{\begin{array}{l} \ddot{x} + \dfrac{eV_0}{2md^2}x = 0 \\ \ddot{y} + \dfrac{eV_0}{2md^2}y = 0 \\ \ddot{z} - \dfrac{eV_0}{md^2}z = 0 \end{array}}$$

---

6) - Pour que le mouvement suivant Oz reste confiné, il faut que l'équation soit de la forme $\ddot{z} + \omega_a^2 z = 0$

donc $\boxed{V_0 \text{ doit être négatif}}$

alors $z = A\cos(\omega_a t) + B\sin(\omega_a t)$

- on aura alors $\boxed{\omega_a^2 = -\dfrac{eV_0}{md^2}}$

$$\ddot{x} - \frac{\omega_a^2}{2}x = 0$$
$$\ddot{y} - \frac{\omega_a^2}{2}y = 0$$

Les mouvements selon x et y ne seront pas confinés

(cf solutions avec un terme en $\exp(\frac{\omega_a}{\sqrt{2}}t)$)

---

7) $f_a = \dfrac{\omega_a}{2\pi}$

$$\boxed{f_a = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{-eV_0}{md^2}}}$$

---

8) $f_a \simeq 60$ MHz

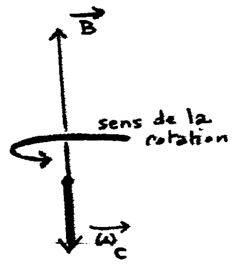
Pièges 2D

9)
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\,\vec{v}\wedge\vec{B}$$
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{q\vec{B}}{m}\wedge\vec{v} \qquad \text{avec } \boxed{\vec{\omega_c} = -\frac{q\vec{B}}{m}} = \text{cste}$$
$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega_c}\wedge\vec{v}}$$

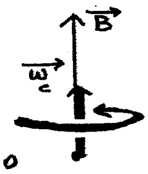
Ce résultat est caractéristique de la dérivée d'un vecteur de norme constante tournant à la vitesse angulaire $\vec{\omega_c}$

démonstration
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{v}$$
$$\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}\,(\vec{\omega}\wedge\vec{v}) = 0$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{v}^{\,2} = 0$$
donc $\vec{v}^{\,2} = \text{cste}$
$$\underline{\|\vec{v}\| = \text{cste}}$$

$q>0$



$q<0$



---

10)
$$\vec{\omega_c} = \frac{e\vec{B}}{m} = \omega_c\,\vec{k}$$
$$\omega_c = \frac{eB}{m}$$
$$\boxed{f_c = \frac{1}{2\pi}\frac{eB}{m}}$$
$$\simeq 15\ \text{GHz}$$

---

11)
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega_c}\wedge\vec{v}$$
$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_c\,\dot{y} \quad (1)\\ \ddot{y} &= \omega_c\,\dot{x} \quad (2)\\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned}}$$

---

12) on fait (1) + i (2)

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -\omega_c \dot{y} + i\omega_c \dot{x}$$
$$= i\omega_c(\dot{x} + i\dot{y})$$

on pose $\underline{q} = x + iy$

Le système d'équa diff couplées (1) et (2) devient :

$$\ddot{\underline{q}} = i\omega_c \dot{\underline{q}}$$

$$\boxed{\frac{d\dot{\underline{q}}}{dt} - i\omega_c \dot{\underline{q}} = 0}$$

---

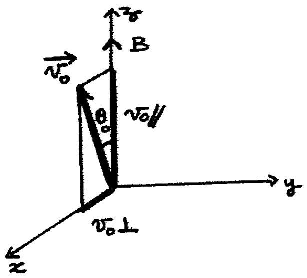
13) équation caractéristique :

$$r - i\omega_c = 0$$

$$\boxed{\dot{\underline{q}} = \underline{A}\, e^{i\omega_c t}}$$

---

14)



$\longrightarrow$ $\ddot{z} = 0$

$\dot{z} = cste = v_0 \cos\theta_0$

$$\boxed{z = v_0 \cos(\theta_0)\, t} + \cancel{cste}$$

$\longrightarrow$ en $t=0$ $\dot{x} = v_0 \sin(\theta_0)$

$\dot{\underline{q}} = \dot{x} + i\dot{y}$

$= v_0 \sin(\theta_0)$

$$\dot{\underline{q}} = \underline{A}\, e^{i\omega_c t}$$

C.I. $v_0 \sin\theta_0 = \underline{A}$

$$\boxed{\dot{\underline{q}} = v_0 \sin(\theta_0)\, e^{i\omega_c t}}$$

La partie réelle donnerait $\dot{x}$

La partie imaginaire donnerait $\dot{y}$

$$\longrightarrow \quad \xi = v_0 \sin(\theta_0) \frac{e^{i\omega_c t}}{i\omega_c} + cste$$

$$\text{C.I.} \quad 0 = v_0 \sin(\theta_0) \frac{1}{i\omega_c} + cste$$

$$\xi = \frac{v_0 \sin(\theta_0)}{i\omega_c} \left(e^{i\omega_c t} - 1\right)$$

on pose $\rho_c = \frac{v_\perp}{\omega_c}$

$$\boxed{\rho_c = \frac{v_0 \sin\theta_0}{\omega_c}}$$

$$\boxed{\xi = i\rho_c\left(1 - e^{i\omega_c t}\right)}$$

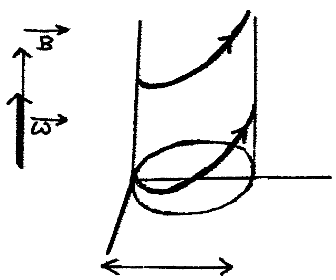
La partie réelle donne x

La partie imaginaire donne y

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \rho_c \sin(\omega_c t) \\ y = \rho_c(1 - \cos(\omega_c t)) \end{array}}$$

---

15) La trajectoire est une hélice circulaire



---

16) Trajectoire en projection dans le plan de base

$$\left.\begin{array}{r} \frac{x}{\rho_c} = \sin(\omega_c t) \\ \left(\frac{y}{\rho_c} - 1\right) = -\cos(\omega_c t) \end{array}\right\} \quad \left(\frac{x}{\rho_c}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho_c} - 1\right)^2 = 1$$

$$\boxed{x^2 + (y - \rho_c)^2 = \rho_c^2}$$

cercle de centre $x = 0$, $y = \rho_c$

et de rayon ρ_c

Le piège 2D est de largeur $\boxed{2\rho_c = \frac{2 v_0 \sin\theta_0}{\omega_c}}$

A.N. $\boxed{2\rho_c = 0{,}87\ \mu m}$

Piège 3D

17) Piège de Penning

On fait la somme des forces précédentes.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \ddot{x} - \frac{\omega_a^2}{2} x + \omega_c \dot{y} = 0 & (1) \\ \ddot{y} - \frac{\omega_a^2}{2} y - \omega_c \dot{x} = 0 & (2) \\ \ddot{z} + \omega_a^2 z = 0 & \end{array}}$$

- selon z, oscillations de pulsation ω_a donc confinement.
- selon x et y, en posant $\xi = x + iy$

On fait (1) + i (2) d'où

$$\boxed{\ddot{\xi} - i\omega_c \dot{\xi} - \frac{\omega_a^2}{2} \xi = 0}$$

---

18) on cherche, par exemple, des solutions en $e^{i\omega t}$

$$(i\omega)^2 - i\omega_c (i\omega) - \frac{\omega_a^2}{2} = 0$$

$$\omega^2 - \omega_c \omega + \frac{\omega_a^2}{2} = 0$$

Les deux racines pour ω sont donc

$$\omega = \frac{\omega_c}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} - \frac{\omega_a^2}{2}}$$

$$= \frac{\omega_c}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2\frac{\omega_a^2}{\omega_c^2}}\right)$$

A.N. $\varepsilon = \frac{2\omega_a^2}{\omega_c^2} = 30\ 10^{-6}$

en développant au premier ordre en ε

$$\omega \simeq \frac{\omega_c}{2} \left(1 \pm \left(1 - \frac{\omega_a^2}{\omega_c^2}\right)\right)$$

d'où les deux racines

$$\omega \simeq \omega_c - \underbrace{\frac{\omega_a^2}{2\omega_c}}_{\text{négligeable}}$$

$$\boxed{\omega \simeq \omega_c}$$

et $\boxed{\omega_m \simeq \frac{\omega_a^2}{2\omega_c}}$ pulsation magnétron

A une pulsation, correspond une solution de la forme

$$\xi = \underset{\substack{\uparrow \\ A \exp i\alpha}}{\underline{A}} \exp(i\omega t)$$

$$x + iy = A \exp i(\omega t + \alpha)$$

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$
$$y = A \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = A^2}$$

Il s'agit bien d'un cercle, de rayon $\frac{v_0}{\omega}$

$$\rho_c = \frac{v_0}{\omega_c}$$

$$\boxed{\rho_m = \frac{v_0}{\omega_m}}$$

---

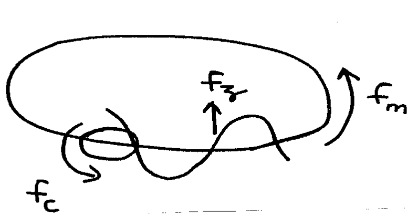
19) $\boxed{\begin{matrix} f_m \simeq 0{,}12\,MHz \\ \rho_m \simeq 60\,mm \end{matrix}}$ ($f_a = 60$ MHz, $f_c = 15$ GHz)

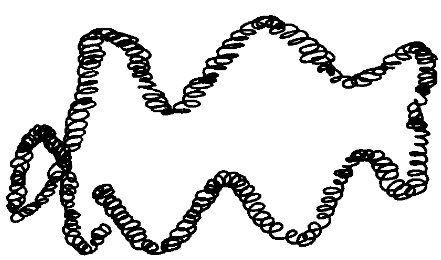
---

20) Dans le plan xOy

- précession à fréquence cyclotron f_c (rayon ρ_c)
- autre mouvement circulaire plus lent à fréquence magnétron f_m (rayon ρ_m) ou dérive

Selon Oz, vibration à fréquence f_a





(schéma rapide)