DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Cinétique chimique....2
I.Loi de Beer-Lambert....2
II.Action de l'hydroxylamine sur la propanone....3
Pendule…simple?....5
I.Pendule non amorti....5
A.Période des petites oscillations:....5
B.Equation différentielle du mouvement par le théorème du moment cinétique:....5
C.Equation différentielle du mouvement par l'approche énergétique:....6
D.Résolution dans le cas des très petites oscillations:....6
E.Trajectoires possibles:....6
F.Période des oscillations:....7
II.Amplification paramétrique....7
A.Mise en évidence expérimentale:....7
B.Equations de conservation:....7
C.Evolution de l'énergie mécanique du système:....9
III.Pendule et chariot....9
A.Etude cinématique:....9
B.Etude cinétique:....9
C.Etude dynamique:....10
D.Autre étude dynamique:....11

Cinétique chimique

I. Loi de Beer-Lambert

Pour une substance en solution, traversée par un rayonnement de longueur d'onde fixée, la loi de Beer-Lambert nous indique que la densité optique D est proportionnelle à la. concentration de la substance absorbante :

$$D=\log(\frac{I_0}{I})=\varepsilon_i l c_i$$

I_0 et I représentent respectivement l'intensité du rayonnement avant et après le passage dans le milieu absorbant.

ε_i est le coefficient d'extinction molaire caractéristique de la substance absorbante à la longueur d'onde choisie.

l est la longueur du trajet optique dans le milieu absorbant.

c_i est la concentration de l'espèce i dans le milieu.

Pour un mélange de plusieurs substances en solution susceptibles d'absorber le rayonnement dans les mêmes conditions, il y a additivité des densités optiques:

$$D=\sum D_i$$

D_i est la densité optique relative à l'espèce i.

On considère deux espèces: la propanone de formule $(CH_3)_2$ C = O que l'on appellera *A* et l'hydroxyiminopropane de formule $(CH_3)_2$ C = NOH que l'on appellera *B*, en solution dans l'eau à 25°C et à pH = 2,0 (constant).

Ces deux espèces sont susceptibles d'absorber dans l'ultra violet avec des coefficients d'extinction molaire respectifs ε_A et ε_B, pour une longueur d'onde du rayonnement λ.

Dans un récipient de volume V constant, on réalise 5 mélanges à pH = 2,0 tels que la somme des concentrations des espèces *A* et *B* soit toujours la même avec $[A]+[B]=c_0$ avec $c_0=0{,}883\ 10^{-3}$ mol.L^{1}.

Des échantillons de chaque mélange sont introduits dans une cellule de spectrophotomètre UV d'épaisseur l = 1 cm thermostatée à 25°C.

Le tableau I ci-dessous donne la densité optique mesurée pour chacun des 5 échantillons.

Tableau I

N°échantillon	1	2	3	4	5
$[A]$ en 10^{-6} mol L^{-1}	795	662	441	220	89
$[B]$ en 10^{-6} mol L^{-1}	88	221	442	663	794
D	0,078	0,176	0,341	0,505	0,603

1. Montrer que la densité optique du mélange peut s'exprimer de façon simple en fonction de la seule concentration en constituant A et des constantes de l'énoncé (ε_A, ε_B, l, c_0) sous la forme $D=a[A]+b$ relation (1)

2. A l'aide d'une régression linéaire, déterminer a et b. Quel est le sens physique de b?

II. Action de l'hydroxylamine sur la propanone.

On s'intéresse maintenant à la réaction (totale) de l'hydroxylamine notée Y sur la propanone, en milieu aqueux à pH = 2,0 fixé à la température de 25°C.

$(CH_3)_2\,C=O + NH_2OH \rightarrow (CH_3)_2\,C=NOH + H_2O$

(A) (Y) (B)

Pour déterminer la loi de vitesse de la réaction, on opère par spectrophotométrie: on réalise donc l'expérience présentée dans le tableau II, au cours de laquelle on suit l'évolution de la densité optique D de la solution au cours du temps (en secondes). Dans les conditions d'analyse, seuls la propanone A et l'hydroxyiminopropane B absorbent le rayonnement.

Tableau II

$[A]_0 = 0{,}883\ 10^{-3}$ mol.L^{-1}
$[B]_0 = 0$
$[Y]_0 = 26{,}9\ 10^{-3}$ mol.L^{-1}

t (s)	20	60	100	150	200	250	300	350
D	0,060	0,156	0,235	0,319	0,386	0,440	0,483	0,519

On appellera D_∞ la densité optique de la solution mesurée à $t=\infty$.

3. La densité optique du mélange à un instant t donné peut être représentée en fonction de la concentration en propanone, par la relation (1). Pourquoi?

4. La réaction étant totale, donner la valeur de D_∞.

5. Ecrire la loi de vitesse de la réaction en considérant qu'elle est d'ordre 1 par rapport à la propanone A et d'ordre α inconnu par rapport à l'hydroxylamine Y (on appellera k la constante de vitesse de cette réaction).

6. Pourquoi est-il normal de trouver ici, pour la réaction, un ordre global apparent égal à 1. Pour

justifier, on comparera la concentration initiale $[Y]_0$ et la concentration finale $[Y]_\infty$ Comment désigne-t-on la méthode d'étude utilisée. Ecrire alors l'expression simplifiée de la vitesse. On nommera *k'* la constante apparente : que représente-t-elle?

7. Intégrer l'équation simplifiée établie à la question précédente.

8. Transformer l'expression obtenue pour exprimer l'évolution de la densité optique D en fonction du temps. On fera intervenir D_∞, $D_{t=0}$ (densité optique en $t = 0$), *k'*.

9. Vérifier par régression linéaire que A que l'ordre global apparent est 1 et déterminer la constante apparente *k'*.

10. A partir du tableau III ci-dessous, rechercher l'ordre partiel α par rapport à l'hydroxylamine.

Tableau III

pH (constant)	θ (°C)	$[A]_0$ ($mol.L^{-1}$)	$[B]_0$ ($mol.L^{-1}$)	$[Y]_0$ ($mol.L^{-1}$)	k' (s^{-1})
2,0	25	$7{,}53\ 10^{-4}$	0	$2{,}05\ 10^{-2}$	$3{,}23\ 10^{-3}$
2,0	25	$5{,}62\ 10^{-4}$	0	$1{,}42\ 10^{-2}$	$2{,}25\ 10^{-3}$

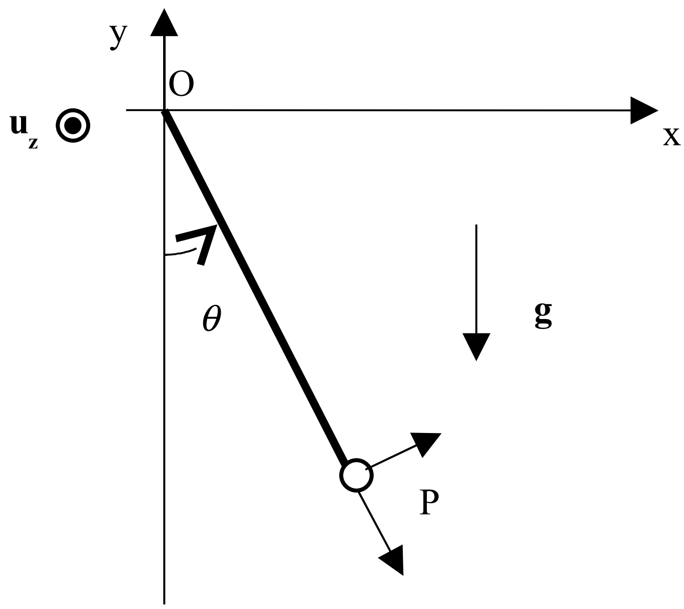
Pendule...simple?

I. Pendule non amorti.

Le pendule pesant simple considéré est modélisé par une masse ponctuelle m au point P et un fil inextensible le longueur OP = L et de masse négligeable. L'ensemble peut tourner autour de l'axe horizontal Oz. A priori le fil est supposé rester tendu au cours du mouvement. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}=-g\,\vec{u}_y$, $\vec{u}_y$ étant le vecteur unitaire de l'axe vertical Oy dirigé vers le haut. On néglige les frottements.

La position du pendule est repérée par l'angle orienté θ = $(-\vec{u}_y,\vec{u}_r)$ où $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ avec $\theta = \theta(t)$.

On définit donc la base directe du repère cartésien $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ et la base cylindrique directe associée à P $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$. Le référentiel d'origine O et de base $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ est galiléen.



A. Période des petites oscillations:

1. Par une simple analyse dimensionnelle que l'on expliquera avec précision, indiquer laquelle (ou lesquelles) des expressions suivantes de la période du mouvement est acceptable :

(a)	$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{mg}}$
(b)	$T_0 = \sqrt{2\pi}\ \dfrac{g}{L}$
(c)	$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

B. Equation différentielle du mouvement par le théorème du moment cinétique:

2. Quelles sont les forces subies par le point matériel. Donner leur expression dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. On écrira la tension exercée par le fil sous la forme $\vec{F}=-F\vec{u}_r$. Que peut-on dire a priori du signe de *F*? Justifier.

3. Démontrer l'équation différentielle du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique. On l'écrira sous la forme: $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0^2\sin(\theta)=0$ (1) et exprimer ω_0. Quelle est l'unité de ω_0 .

C. Equation différentielle du mouvement par l'approche énergétique:

4. Que peut-on dire ici du travail de la tension $\vec{F}$. Justifier qu'il y a conservation de l'énergie mécanique pour le point P. Ecrire la conservation de l'énergie en prenant une origine pour l'énergie potentielle à la position d'équilibre.(conditions initiales: le pendule a été lâché en $t = 0$ de $\theta = \theta_0$ avec une vitesse nulle).

5. Ecrire cette intégrale première (2) sous la forme: $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = ...$ et retrouver à partir de cette intégrale première l'équation différentielle (1) obtenue précédemment. Justifier avec précision le calcul.

D. Résolution dans le cas des très petites oscillations:

On suppose dans cette partie que les angles restent faibles ($\theta \ll 1$ rad).

6. Estimer la valeur maximale de θ en radians permettant d'assimiler $\sin(\theta)$ et θ à α % près dans l'équation (1). Application numérique: exprimer θ en degrés si on veut travailler à 1% près.

7. Résoudre complètement l'équation différentielle linéarisée pour ce cas des très petites oscillations (on prendra les mêmes conditions initiales définies plus haut). En déduire l'expression de la période T_0.

E. Trajectoires possibles:

On ne suppose plus que les angles restent faibles. Les conditions initiales adoptées ici sont différentes: le pendule a été lancé en $t = 0$ de la position $\theta = 0$ avec une vitesse angulaire notée Ω_0 (>0). On se propose d'étudier le mouvement en fonction de Ω_0. On rappelle que l'étude réalisée jusqu'à présent faisait l'hypothèse d'une trajectoire circulaire pour P donc d'un fil a priori tendu.

8. Quelle est l'énergie mécanique totale initiale? Quelle est l'expression de $\dot{\theta}$ pour la position θ (en fonction de Ω_0, ω_0 , θ). Exprimer $\frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2}$ A quoi correspondent les deux valeurs possibles?

9. Quelle est l'expression de la tension F pour la position θ (en fonction de Ω_0,θ et des constantes du problème). Exprimer $F/(m\,g)$.

10. Les deux résultats précédents fournissent donc deux inégalités à étudier entre $(\Omega_0/\omega_0)^2$ et $\cos(\theta)$. On étudie le cas particulier de vitesse initiale: $\Omega_0 = \omega_0\sqrt{2}$ afin de déterminer l'amplitude des oscillations. Pour quelle(s) valeur(s) de θ , $\dot{\theta}$ s'annule-t-il? Pour quelle(s) valeur(s) de θ , F s'annule-t-il? Conclure.

11. Que se passe-t-il pour une vitesse initiale légèrement supérieure? On pourra poser $(\Omega_0/\omega_0)^2= 2 + \varepsilon^2$. Que se passe-t-il pour une vitesse initiale légèrement inférieure? Justifier par calcul.

12.Quelle est la valeur minimale de Ω_0 pour obtenir un mouvement circulaire de révolution? Déterminer en fonction de la valeur de Ω_0, le type de mouvement présenté par le pendule (mouvement oscillatoire , mouvement révolutif, autre à décrire). Présenter les résultats en tableau.

13.En quoi le résultat serait-il modifié si on avait remplacé le fil du pendule par une tige métallique (solide) de masse négligeable et de longueur L? Faire un nouveau tableau.

F. Période des oscillations:

14.On se place dans le cas où le mouvement est oscillatoire. L'amplitude des oscillations est notée θ_{MAX} . En partant de l'intégrale première de conservation de l'énergie, écrire la durée mise par le pendule pour aller de $\theta = 0$ à $\theta = \theta_{MAX}$ sous forme d'une intégrale. Justifier le choix de signe.

15.En déduire l'expression de la période sous la forme: $T = A T_0 \int_0^{\theta_{MAX}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_{MAX}}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$ où l'on précisera la valeur de la constante A.

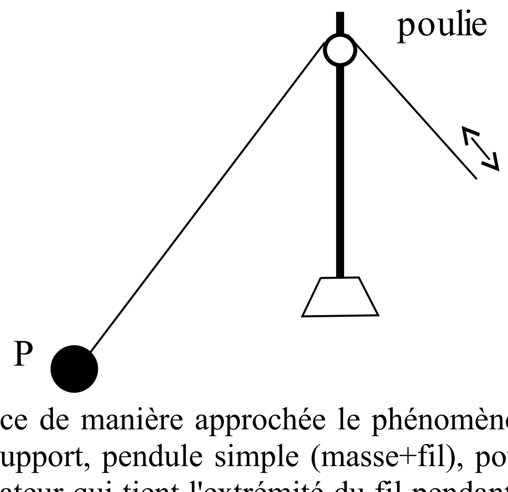
16.On se place dans le cas de petites oscillations: donner l'expression de T sous forme d'une intégrale en utilisant le changement de variable: $\sin(\theta/2) = \sin(\theta_{MAX}/2)\sin(\varphi)$ puis en se limitant au second ordre en θ_{MAX} , calculer T en fonction de T_0 et de θ_{MAX}.

II. Amplification paramétrique

On peut entretenir et amplifier les oscillations du pendule par variation périodique de sa longueur.

On peut penser à l'enfant sur une balançoire qui désire amplifier l'amplitude des oscillations de la balançoire. Au cours du mouvement, l'enfant se lève lorsqu'il passe par une position verticale (il diminue le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation) et s'accroupit aux positions extrêmales quand son élongation, en valeur absolue, est extrémale (il augmente le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation).

A. Mise en évidence expérimentale:

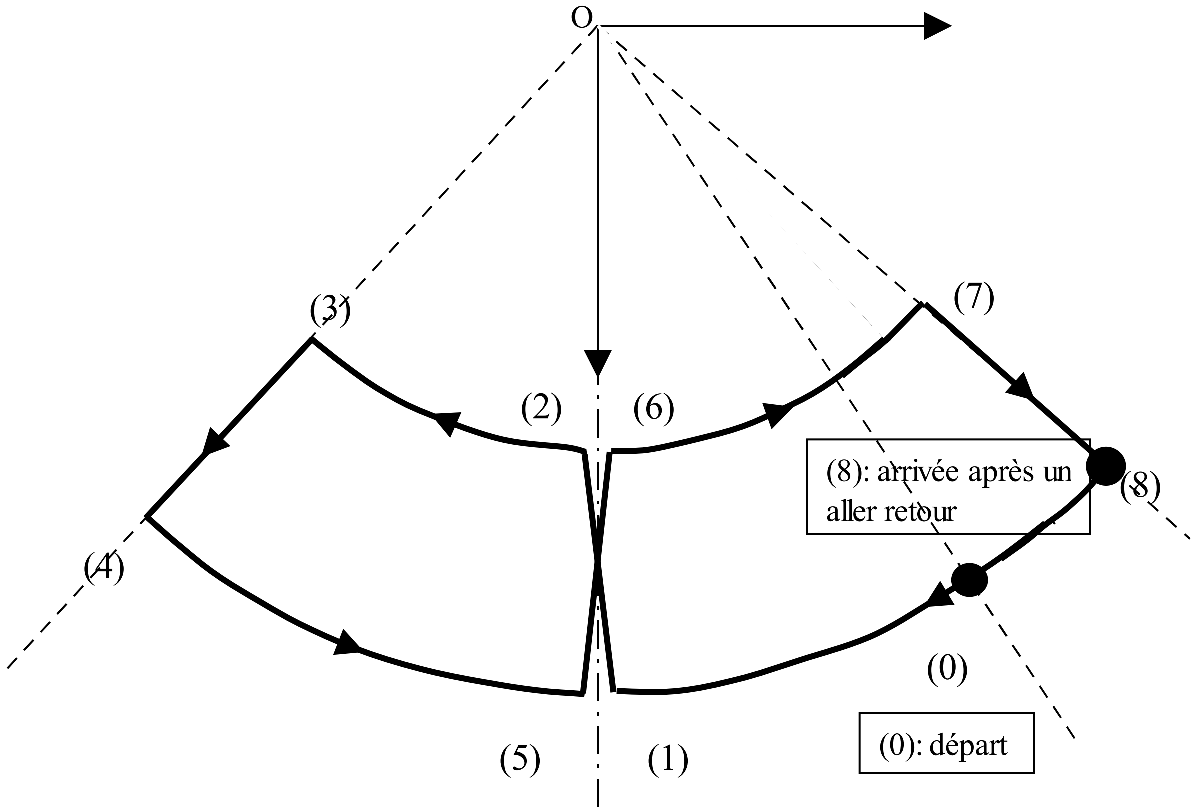


17.On veut mettre en évidence de manière approchée le phénomène d'amplification paramétrique avec un matériel simple: support, pendule simple (masse+fil), poulie. Décrire avec précision ce que doit faire l'expérimentateur qui tient l'extrémité du fil pendant que le pendule oscille. Quelle est la fréquence de ce mouvement comparée à la fréquence des oscillations du pendule.

B. Equations de conservation:

Le pendule étudié est ici constitué d'un simple point matériel P, de masse m, pouvant coulisser sur une tige rigide de masse négligeable qui oscille. La plus courte distance du point à l'axe est notée ℓ et la plus grande est notée L. Dans le modèle adopté, un dispositif interne au pendule (non représenté) permet de modifier la distance OP de ℓ à L ou de L à ℓ en un temps infiniment court, c'est-à-dire que la longueur OP peut varier sans que θ varie. C'est ce dispositif qui exerce la force $\vec{F}=-F\,\vec{u}_r$.

On néglige tout frottement.



Vu la modélisation adoptée, les trajets (1)-(2) et (5)-(6)sont verticaux alors qu'ils sont représentés inclinés pour les besoins du schéma.

18.Moment cinétique:

- Justifier avec précision que le moment cinétique en O, σ , de la masse P est conservé au cours du déplacement vertical: (1)-(2) et au cours du déplacement vertical (5)-(6),.*(voir figure)*.
- Quelle est la valeur du moment cinétique dans les positions extrêmes en (0), (3), (4), (7), (8). *(voir figure)*. Justifier avec soin.
- Commenter alors les évolutions (3)-(4) et (7)-(8) en considérant les forces appliquées au point P *(voir figure)*.

19.Energie mécanique: justifier avec précision que l'énergie mécanique totale de la masse P est conservée au cours de l' évolutions: (0)-(1). Idem pour (2)-(3), (4)-(5), (6)-(7).*(voir figure)*

20. Initialement le pendule est immobile en position (0)*(voir figure)*: l’élongation angulaire est θ_0 (grandeur positive) et la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0=0$.

 - Dans la position (1), l’élongation est notée θ_1 avec θ_1=0. La vitesse angulaire est $\dot{\theta}_1$. Déterminer sa valeur en utilisant une équation de conservation.
 - Dans la position (2) à la verticale de (1), la vitesse angulaire est $\dot{\theta}_2$. Déterminer sa valeur en utilisant une équation de conservation en fonction de θ_0, g, L, ℓ.

21. Finalement déterminer l'élongation θ_8 en fonction de θ_0, L, ℓ. (En fait on exprimera sin(θ_8/2) en fonction de sin(θ_0/2)...)

C. Evolution de l’énergie mécanique du système:

22. Exprimer le travail de la force $\vec{F}$:

 - au cours de l'évolution (1)-(2) en fonction de $\dot{\theta}_1$
 - au cours de l'évolution (3)-(4) en fonction de θ_3

23. Quelle est la variation d'énergie mécanique de (0) à (8)? D'où provient-elle?

24. Si l’on considère l’expérience de laboratoire (mise en évidence expérimentale) décrite ci-dessus avec un pendule simple, indiquer la provenance de l’énergie mécanique supplémentaire du pendule. Même question pour l’enfant sur la balançoire.

III. Pendule et chariot

Le fil du pendule (masse du point P: m et longueur du fil: L) est désormais fixé au centre de masse G d’un chariot (masse du chariot M) glissant sans frottement sur un plan horizontal *(voir figure)*. On assimile le chariot en translation à un point matériel G de masse M. Le fil reste tendu au cours du mouvement: il se comporte comme une tige solide GP sans masse .

On distinguera le référentiel du laboratoire d’origine O et de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ supposé galiléen et le référentiel lié au chariot d’origine G et de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ non galiléen.

On adopte pour paramètres cinématiques du problème: θ (angle du pendule avec la verticale) et x (abscisse du point G du chariot).

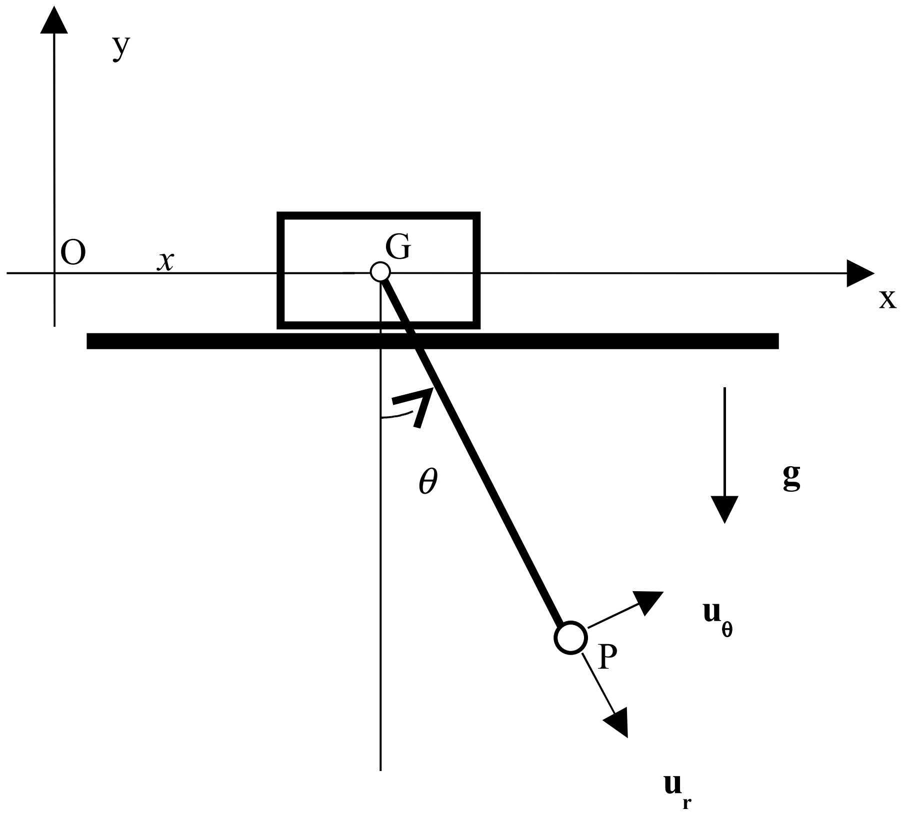
A. Etude cinématique:

25. Donner l’expression de la vitesse du point G par rapport au référentiel du laboratoire dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

26. En utilisant la formule fondamentale de la cinématique du solide aux points G et P de la tige, donner l’expression de la vitesse du point P par rapport au référentiel du laboratoire dans la même base.

B. Etude cinétique:

27. Donner l’expression de la quantité de mouvement du chariot, du pendule et la quantité de mouvement totale de l’ensemble chariot+pendule dans le référentiel du laboratoire en fonction des paramètres θ et x et des constantes du problème.



28.Donner l'expression de l'énergie mécanique totale de l'ensemble chariot+pendule dans le référentiel du laboratoire (on choisira une origine pour l'énergie potentielle qui permet de ne pas avoir de constante dans son expression).

29.Donner l'expression du moment cinétique en G pour le pendule (point P) <u>dans le référentiel lié au chariot</u>.

C. Etude dynamique:

Les conditions initiales sont les suivantes: on écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 négatif (angle entre $-\pi/2$ et 0) et on lâche P sans communiquer de vitesse initiale au système.

30.Intégrale première (1):

- Tracer sur un schéma les forces extérieures agissant sur l'ensemble chariot+pendule.
- Appliquer le théorème de la quantité de mouvement (ou théorème de la résultante cinétique) à l'ensemble chariot+pendule. En déduire que l'une des coordonnées de la quantité de mouvement est constante. On obtient ainsi une intégrale première. Préciser la valeur de la constante.
- Préciser qualitativement le mouvement du centre de masse de l'ensemble chariot+pendule (on ne s'occupera pas de ce point dans la suite) et décrire qualitativement le mouvement de G et celui de P. On pourra éventuellement préciser la trajectoire de P et justifier qu'il s'agit d'une ellipse.

31.Intégrale première (2):

- En utilisant la notion d'énergie, écrire une deuxième intégrale première.
- En déduire une équation différentielle du deuxième ordre et la simplifier en tenant compte de la relation suivante fournie: $\dot{x}=-\frac{m}{m+M}L\dot{\theta}\cos(\theta)$ afin d'obtenir finalement une équation différentielle uniquement en θ.

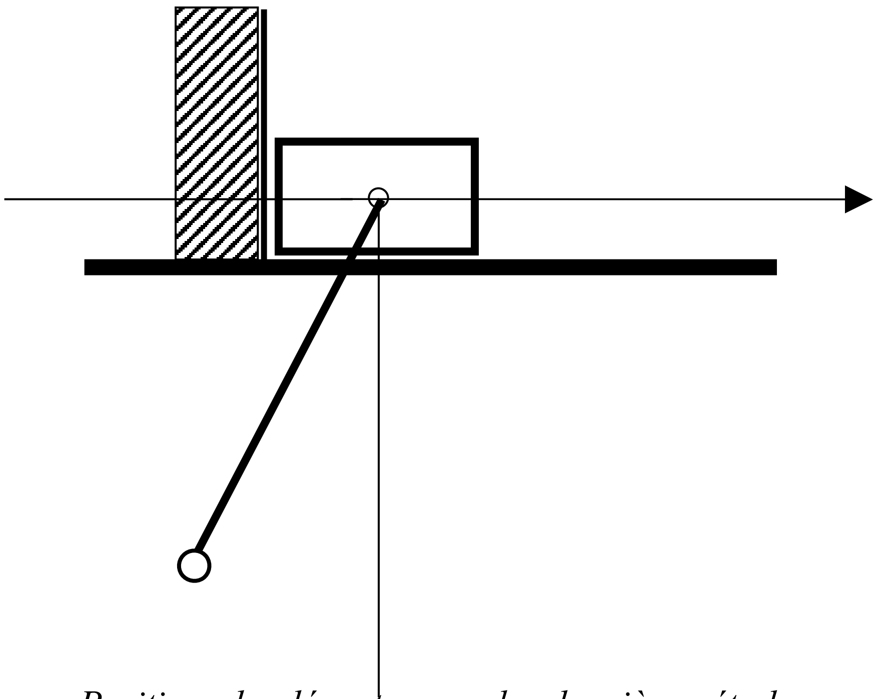
32.Autre équation (3): on étudie ici le mouvement du pendule dans le référentiel lié au chariot.

- Montrer, avec précision, que le point P est soumis à trois forces dont la force: $-m\ddot{x}\vec{u}_x$. Indiquer sur un schéma les trois forces agissant sur le point.
- On peut alors appliquer dans ce référentiel le théorème du moment cinétique (calculé en G) pour le point P. Pourquoi est-ce possible dans ce référentiel? Retrouver finalement l'équation différentielle en θ obtenue précédemment (on obtiendra $\ddot{x}$ en dérivant l'expression fournie plus haut pour $\dot{x}$).

33.Résolution:

- Pour simplifier l'équation différentielle du deuxième ordre, on ne considère que les petites oscillations. On travaille au premier ordre en θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$. Simplifier l'équation différentielle en θ.
- Donner les expressions de θ et x en fonction du temps (on prendra $x=0$ en $t=0$).

D. Autre étude dynamique:



Position de départ pour la deuxième étude dynamique

On procède de la même façon que pour l'expérience précédente (on écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 négatif et on lâche P sans communiquer de vitesse initiale au système) mais au départ le chariot se trouve contre un butoir *(voir figure)*.

34.Expliquer qualitativement pourquoi le mouvement est différent du cas précédent.

35.Etudier la phase de contact avec le butoir afin de trouver l'expression de la force de contact horizontale $\vec{f}$ exercée par le butoir. On appliquera le théorème de la résultante cinétique au système pendant cette phase. Montrer que $\vec{f}=\frac{d}{dt}(m L\dot{\theta}\cos\theta)\vec{u}_x$. Exprimer $\vec{f}$ en fonction de θ, θ_0, m, g . En déduire pour quelle valeur de θ le contact va-t-il cesser. Le système est alors (comme pour la première étude dynamique) pseudo-isolé en ce qui concerne le mouvement horizontal.

36.On fait $t=0$ quand le système quitte le contact avec le butoir. Déterminer $\dot{\theta}_1$ en $t=0$ en fonction de θ_0 et des constantes. On ne considère que les petites oscillations. Justifier que l'équation différentielle en θ obtenue dans l'étude dynamique précédente reste toujours valable et déterminer θ en fonction du temps.

37.Donner la valeur de la quantité de mouvement selon x du système en fonction de θ_0 et des constantes. En déduire la nouvelle relation entre $\dot{x}$ et $\dot{\theta}$.

38.Donner l' expression de x en fonction du temps et représenter graphiquement.

Réponses

cinétique chimique : hydroxylamine + propanone

1) $D = \varepsilon_A \, \ell \, [A] + \varepsilon_B \, \ell \, [B]$

avec $[A] + [B] = c_0$

$D = \varepsilon_A \, \ell \, [A] + \varepsilon_B \, \ell \, (c_0 - [A])$

$$\boxed{D = (\varepsilon_A - \varepsilon_B) \, \ell \, [A] + \varepsilon_B \, \ell \, c_0}$$

---

2) On fait une régression linéaire pour trouver D en fn de [A]
on obtient

$$\boxed{D = -743{,}8 \; [A] + 0{,}669}$$

L'ordonnée à l'origine est la densité optique pour $[A]=0$
donc $[B] = c_0 = 0{,}883 \; 10^{-3} \; mol \, L^{-1}$

La densité optique d'une solution de concentration c_0 en B vaut 0,669

---

3) $A + Y \longrightarrow B$

- une mole de A qui se transforme donne une mole de B et la concentration initiale de A est c_0
on aura donc ici aussi $[A] + [B] = c_0$
- il n'y a pas d'autres produits que A et B qui absorbent le rayonnement.

Donc la loi étudiée en 1 et 2 donnant D reste valable.

---

4) $[A]_0 = 0{,}883 \; 10^{-3} \; mol \, L^{-1}$ (c_0)
$[Y]_0 = 26{,}9 \; 10^{-3} \; mol \, L^{-1}$

donc A est le réactif déficitaire.
A la fin, $[A] = 0$ et $[B] = c_0$
donc $\boxed{D_\infty = 0{,}669}$ (cf question 2)

---

5) $\boxed{v = k\,[A]\,[Y]^{\alpha}}$

---

6) En $t=0$ $[Y]_0 = 26{,}9\ 10^{-3}\ \text{mol L}^{-1}$

En t_∞ $[Y]_\infty = 26{,}9\ 10^{-3} - 0{,}883\ 10^{-3}$

$= 26{,}1\ 10^{-3}\ \text{mol L}^{-1}$

donc $[Y] \simeq \text{cste}\ [Y]_0$

$v \simeq k\,[A]\,[Y]_0^{\alpha}$

$\boxed{v \simeq k'\,[A] \quad \text{avec} \quad k' = k\,[Y]_0^{\alpha}}$

(méthode d'étude dite de "<u>dégénérescence de l'ordre</u>")

---

7) $v = -\dfrac{d[A]}{dt} = k'[A]$

$$\int_{[A]_0}^{[A]} -\frac{d[A]}{[A]} = \int_0^t k'\,dt$$

$$\boxed{\ln \frac{[A]_0}{[A]} = k't}$$

---

8) $D = a\,[A] + b$

$D = a\,[A] + D_\infty$

et $D_0 = a\,[A]_0 + D_\infty$

L'équation devient :

$$\ln \frac{(D_0 - D_\infty)/a}{(D - D_\infty)/a} = k't$$

$$\boxed{\ln \frac{(D_0 - D_\infty)}{(D - D_\infty)} = k't}$$

---

9) $\ln (D - D_\infty) = \ln (D_0 - D_\infty) - k't$

Si on trace $\boxed{\ln(D - D_\infty) \text{ en fonction de } t}$

on doit obtenir une droite, de pente : $-k'$

Par régression linéaire, on obtient

$$\ln(D - D_\infty) = -0,412 - 4,24\ 10^{-3}\ t$$

donc $\boxed{k' = 4,24\ 10^{-3}\ s^{-1}}$

---

10) On donne $k' = k\,[Y]_0^\alpha$

$$\boxed{\frac{k'_1}{k'_2} = \left(\frac{[Y_1]_0}{[Y_2]_0}\right)^\alpha \quad \text{d'où } \alpha}$$

$$\frac{3,23\ 10^{-3}}{2,25\ 10^{-3}} = \left(\frac{2,05\ 10^{-2}}{1,42\ 10^{-2}}\right)^\alpha$$

$$1,436 = (1,444)^\alpha$$

$$\boxed{\alpha = 1}$$

---

pendule simple

1) dimensions : temps T
longueur L
masse M
...

formule a : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{mg}}$

$$\rightarrow \quad \frac{L^{1/2}}{M^{1/2}\ (L\,T^{-2})^{1/2}}$$

$$\boxed{\text{dimension : } \frac{T}{M^{1/2}} \qquad \text{incorrect}}$$

formule b : $T_0 = 2\pi\,\frac{g}{L}$

$$\rightarrow \quad \frac{L\,T^{-2}}{L}$$

$$\boxed{\text{dimension : } T^{-2} \qquad \text{incorrect}}$$

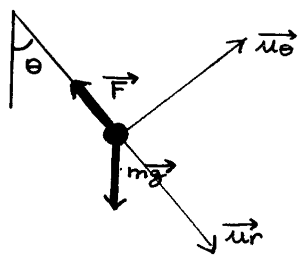
formule c : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$$\rightarrow \quad \frac{L^{1/2}}{(L\,T^{-2})^{1/2}}$$

$$\boxed{\text{dimension : } T \qquad \text{correct}}$$

---

2)



$\vec{F} = \boxed{-F\,\vec{u_r}}$ tension du fil
F est positif car le fil est supposé tendu
$F = \|\vec{F}\|$

$m\vec{g}$ poids

$$= \boxed{mg\cos\theta\ \vec{u_r} - mg\sin\theta\ \vec{u_\theta}}$$

---

3) expression du moment cinétique en O :

$$\overrightarrow{\sigma}(O) = \overrightarrow{OP} \wedge m\overrightarrow{v}$$

$$\begin{array}{c|c|c} & \overrightarrow{OP} & m\overrightarrow{v} \\ & L & 0 \\ & 0 & mL\dot{\theta} \\ \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z} & 0 & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}(O) = mL^2\dot{\theta}\ \overrightarrow{u_z}}$$

O étant un point fixe, on peut appliquer le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma}(O)}{dt} = \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(O)}\overrightarrow{F}}_{\text{nul}} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{(O)}m\overrightarrow{g}$$

($\overrightarrow{F}$ force centrale passe par O)

$$= \begin{array}{c|c|c} & \overrightarrow{OP} \wedge & m\overrightarrow{g} \\ & L & mg\cos\theta \\ & 0 & -mg\sin\theta \\ \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z} & 0 & 0 \end{array}$$

$$mL^2\ddot{\theta}\ \overrightarrow{u_z} = -mgL\sin\theta\ \overrightarrow{u_z}$$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$ soit avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}}$

(pulsation propre en rad s^{-1})

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0} \quad (1)$$

---

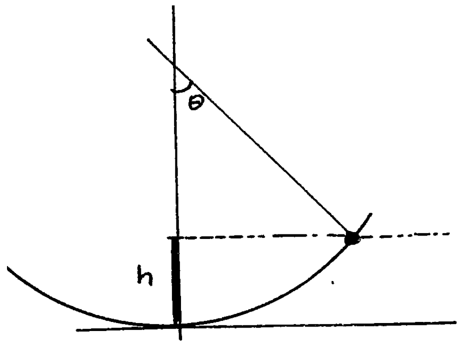
4) • $\overrightarrow{F} \perp \overrightarrow{dl}$ donc <u>ne travaille pas</u>

$\overrightarrow{F}$ ↓ selon $\overrightarrow{u_r}$; $\overrightarrow{dl}$ ↓ selon $\overrightarrow{u_\theta}$

• L'autre force est la pesanteur $m\overrightarrow{g}$ qui est une force conservative

L'énergie mécanique est donc conservée.

Expression de l'énergie potentielle :



$$E_p = mgh$$

$$\boxed{E_p = mgL(1-\cos\theta)}$$

Intégrale première de conservation de l'énergie :

$$E = E_p + E_c = mgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

C.I. $E = mgL(1-\cos\theta_0) + 0$

$$\boxed{mgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 = mgL(1-\cos\theta_0)}$$

---

5) $$mgL(\cos\theta_0 - \cos\theta) + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

on dérive par rapport au temps :

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 2\omega_0^2(-\sin\theta\ \dot{\theta})$$

La solution $\dot{\theta} = 0$ est une solution parasite, donc on retrouve

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0}$$

---

6) → On veut faire $\sin\theta \simeq \theta$

or $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots$ (à l'ordre 3)

L'erreur commise est majorée par $\frac{\theta^3}{6}$

soit en relatif, une erreur de $\frac{\theta^3}{6}/\theta = \frac{\theta^2}{6}$

→ On souhaite donc ici :

$$\boxed{\frac{\theta^2}{6} \leq \frac{\alpha}{100}}$$

soit : $\theta_{rad} \leqslant \frac{\sqrt{6\alpha}}{10}$

$\theta_{\text{degrés}} \leqslant \frac{\sqrt{6\alpha}}{10}\frac{180}{\pi}$

$$\boxed{\theta_{MAX\ \text{degrés}} = \frac{18\sqrt{6\alpha}}{\pi}}$$

A.N. $= \frac{18\sqrt{6\times 1}}{\pi}$

$$\boxed{\theta_{MAX} = 14 \text{ degrés}}$$

---

7) Pour les "petites" oscillations, on aura

$\sin\theta = \theta$

et (1) devient

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$$

$$\begin{cases} \theta = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\ \dot{\theta} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

C.I. $\begin{cases} \theta_0 = A + 0 & \rightarrow A = \theta_0 \\ 0 = 0 + B\omega_0 & \rightarrow B = 0 \end{cases}$

finalement $\boxed{\theta = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

---

8) $E = mgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$

C.I. $E = mgL(1-\cos 0) + \frac{1}{2}mL^2\Omega_0^2$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mL^2\Omega_0^2}$$

$$mgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mL^2\Omega_0^2$$

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2} = \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} + 2\cos\theta - 2}$$

d'où $\dot{\theta} = \pm\sqrt{\quad}$

Les deux valeurs correspondent au passage dans un sens ou au passage dans l'autre sens pour le même θ.

---

9) On cherche l'expression de la tension
On applique le principe fondamental

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & \vec{F} & + \; m\vec{g} & = \; m\vec{a} \\
\vec{u_r},\ \vec{u_\theta},\ \vec{u_z} & \begin{array}{c}-F\\0\\0\end{array} & \begin{array}{c}mg\cos\theta\\-mg\sin\theta\\0\end{array} & \begin{array}{c}-mL\dot{\theta}^2\\mL\ddot{\theta}\\0\end{array}
\end{array}$$

selon $\vec{u_\theta}$, on retrouve (1)

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

selon $\vec{u_r}$, on trouve F

$$\boxed{\frac{F}{mg} = \cos\theta + \frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2}}$$

et en utilisant le résultat de la question précédente :

$$\boxed{\frac{F}{mg} = \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} + 3\cos\theta - 2}$$

---

10) cas particulier $\frac{\Omega_0}{\omega_0} = \sqrt{2}$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2} &= 2\cos\theta \\ \frac{F}{mg} &= 3\cos\theta\end{aligned}}$$

Les deux grandeurs sont positives au départ ($\theta = 0$)
Elles sont nulles en $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ donc s'annulent pour la première fois quand $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$

> Le pendule oscille avec une amplitude égale à $\pi/2$.
> La tension s'annule quand l'élongation angulaire (en valeur absolue) est maximale.

---

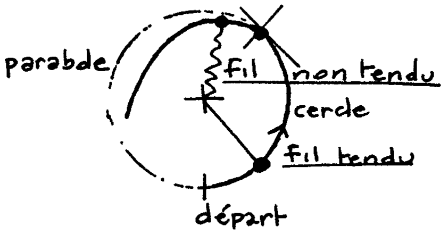
11) $\Omega_0 > \omega_0\sqrt{2}$ avec $\left(\frac{\Omega_0}{\omega_0}\right)^2 = 2 + \varepsilon^2$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2} = 2\cos\theta + \varepsilon^2$$

$$\frac{F}{mg} = 3\cos\theta + \varepsilon^2$$

$\frac{F}{mg}$ s'annule pour $\cos\theta = -\frac{\varepsilon^2}{3}$ donc pour la première fois pour θ légèrement supérieur à $\pi/2$

Pour cette valeur, $\frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2} = \frac{\varepsilon^2}{3}$ donc toujours positif.



$$\boxed{\text{Le fil se détend pour } \theta > \frac{\pi}{2} \text{ (et } < \pi) \text{ et le point tombe en chute libre selon une parabole}}$$

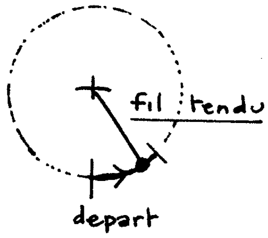
$\underline{\Omega_0 < \omega_0\sqrt{2}}$ avec $\left(\frac{\Omega_0}{\omega_0}\right)^2 = 2 - \varepsilon^2$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2} = 2\cos\theta - \varepsilon^2$$

$$\frac{F}{mg} = 3\cos\theta - \varepsilon^2$$

$\frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2}$ s'annule pour $\cos\theta = \frac{\varepsilon^2}{2}$ donc pour la première fois pour θ légèrement inférieur à $\frac{\pi}{2}$

Pour cette valeur, $\frac{F}{mg} = \frac{\varepsilon^2}{2}$ donc toujours positif



$$\boxed{\text{Le pendule oscille fil tendu. L'amplitude est inférieure à } \frac{\pi}{2}}$$

---

12)

Pour obtenir un mouvement de révolution, il faut donc que le fil reste tendu

or $\frac{F}{mg} = \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} + 3\cos(\theta) - 2 \geqslant 0 \quad \forall\theta$

$$\frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} \geqslant 2 - 3\cos(\theta)$$

En prenant le cas le plus défavorable $(\theta = \pi)$, il faut

$$\frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} \geqslant 5$$

$$\boxed{\Omega_{\text{révolution}} = \omega_0\sqrt{5}}$$

résumé

Ω_0	0	$\omega_0\sqrt{2}$	$\omega_0\sqrt{5}$ ∞
mvt	oscillation fil tendu amplitude $\theta_{max} < \frac{\pi}{2}$	rotation puis chute libre pour $\frac{\pi}{2} < \theta_{max} < \pi$	mouvement de révolution

13) Si le fil est remplacé par une tige, la condition sur F n'existe plus car une tige peut travailler en extension (comme un fil) mais aussi en compression. F peut devenir négatif.

La seule condition à retenir est : $\frac{\dot\theta^2}{\omega_0^2} = \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} + 2\cos(\theta) - 2 \geq 0$

Ω_0	0 $2\omega_0$	∞
mvt	oscillation	mouvement de révolution

14) On écrit la conservation de l'énergie

$$mgL(1-\cos\theta_{MAX}) = mgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mL^2\dot\theta^2$$

$$\boxed{\text{intégrale première} \quad \dot\theta^2 = 2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_{MAX})}$$

En $t=0^+$, $\dot\theta$ est positif

$$\frac{d\theta}{dt} = +\omega_0\sqrt{2}\sqrt{(1-\cos\theta_{MAX})-(1-\cos\theta)}$$

$$dt = \frac{1}{\omega_0\sqrt{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{(1-\cos\theta_{MAX})-(1-\cos\theta)}}$$

$$\boxed{\underset{\text{de } 0 \text{ à } \theta_{MAX}}{\Delta t} = \frac{1}{\omega_0\sqrt{2}}\int_{\theta=0}^{\theta_{MAX}}\frac{d\theta}{\sqrt{(1-\cos\theta_{MAX})-(1-\cos\theta)}}}$$

15) on a $\Delta t = \frac{T}{4}$

et on utilise $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

La durée pour aller de $\theta = 0$ à $\theta = \theta_{MAX}$ est

$$\Delta t = \boxed{\frac{T}{4} = \frac{1}{2\omega_0} \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_{MAX}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_{MAX}}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}}$$

d'où avec $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\boxed{T = \frac{T_0}{\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_{MAX}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_{MAX}}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}}$$

(la constante A proposé vaut $\frac{1}{\pi}$)

---

16) $\sin(\theta/2) = \sin(\theta_{MAX}/2) \sin\varphi$

$\frac{1}{2}\cos(\theta/2)\, d\theta = \sin(\theta_{MAX}/2) \cos\varphi \, d\varphi$ } changement de variable

$$T = \frac{T_0}{\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \frac{\frac{2\sin\left(\frac{\theta_{MAX}}{2}\right)}{\cos(\theta/2)} \cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_{MAX}}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta_{MAX}}{2}\right)\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2\, d\varphi}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\boxed{T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2\, d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\theta_{MAX}}{2}\right)\sin^2\varphi}}}$$

on suppose θ_{MAX} assez petit pour nous permettre de travailler au 2^e ordre donc $\sin^2\frac{\theta_{MAX}}{2} = \frac{\theta_{MAX}^2}{4}$

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\theta_{MAX}^2}{4}\sin^2\varphi}}$$

et toujours au 2^e ordre $\left(1 - \frac{\theta_{MAX}^2}{4}\sin^2\varphi\right)^{-1/2} = 1 + \frac{\theta_{MAX}^2}{8}\sin^2\varphi$

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{\theta_{MAX}^2}{8}\sin^2\varphi\right) d\varphi$$

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_{MAX}^2}{8} \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\boxed{T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_{MAX}^2}{16} \right)}$$

---

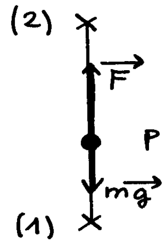
17) L'expérimentateur tire sur le fil à chaque passage par la verticale et relâche le fil aux extrémités de la course.

Pour un période : il doit donc raccourcir le fil à deux reprises et le relâcher à deux reprises.

$\boxed{\text{La fréquence du mouvement de l'expérimentateur est double de la fréquence des oscillations du pendule.}}$

---

18) → Pendant (1)-(2) le mouvement de P (vitesse et accélération) est vertical. Les forces sont verticales.



Donc $\boxed{\text{le mouvement est à force centrale}}$ (moment nul en O pour les forces)

Le moment cinétique $\vec{\sigma}(O)$ est donc conservé

Idem pendant (5)-(6)

→ Pour les positions extrémales en θ : (0), (3), (4), (7), (8)

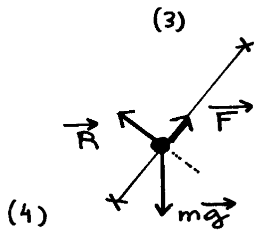
$\dot{\theta}$ est nul donc

$\boxed{\text{le moment cinétique est nul}}$

→ De (3) à (4) le moment cinétique passe de 0 à 0.

Il est donc conservé.

Les forces sont centrales ici encore (il faut ici considérer la somme des forces : poids, force $\vec{F}$, force $\vec{R}$ exercée par la tige sur laquelle coulisse le point)



(La somme de ces forces est selon $\vec{u_r}$)

Idem pour (7) - (8)

---

19) Pour les évolutions au cours desquelles la distance OP reste invariable Ex : (0) - (1) on retrouve le problème du pendule simple (2 forces $\vec{F}$ et $m\vec{g}$ conservatif)
L'énergie est conservée.
Idem pour (2) - (3), (4) - (5), (6) - (7)

---

20) → Entre (0) et (1) conservation de l'énergie

$$0 + \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}_1^2 = m g L (1 - \cos\theta_0) + 0$$

$$\dot{\theta}_1^2 = 2\omega_0^2 (1 - \cos\theta_0) \qquad \left(\omega_0^2 = \frac{g}{L}\right)$$

$$\dot{\theta}_1^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\frac{\theta_0}{2}$$

$\dot{\theta}_1$ est négatif

$$\boxed{\dot{\theta}_1 = -2\sqrt{\frac{g}{L}} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

→ Entre (1) et (2) conservation du moment cinétique

$$m \ell^2 \dot{\theta}_2 = m L^2 \dot{\theta}_1$$

$$\dot{\theta}_2 = \left(\frac{L}{\ell}\right)^2 \dot{\theta}_1$$

$$\boxed{\dot{\theta}_2 = -2\sqrt{\frac{g}{L}} \left(\frac{L}{\ell}\right)^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

---

21) → Entre (2) et (3) conservation de l'énergie. On cherche θ_3

$$0 + \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}_2^2 = m g \ell (1 - \cos\theta_3)$$

donc

$$\dot{\theta}_2^2 = 4 \frac{g}{\ell} \sin^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right)$$

$$4 \frac{g}{L} \left(\frac{L}{\ell}\right)^4 \sin^2\frac{\theta_0}{2} = 4 \frac{g}{\ell} \sin^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{\sin^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} = \left(\frac{L}{\ell}\right)^3}$$

→ En (4)

on a $\dot{\theta}_4 = 0$

et $\theta_4 = \theta_3$

$$\boxed{\sin^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right) = \left(\frac{L}{\ell}\right)^3 \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

→ Entre (4) et (8), on retrouve la même série qu'entre (0) et (4)

d'où
$$\boxed{\sin^2\left(\frac{\theta_8}{2}\right) = \left(\frac{L}{\ell}\right)^3 \sin^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}$$

finalement $\sin^2\left(\frac{\theta_8}{2}\right) = \left(\frac{L}{\ell}\right)^6 \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$

et θ_0 et θ_8 étant de même signe :

$$\boxed{\sin\left(\frac{\theta_8}{2}\right) = \left(\frac{L}{\ell}\right)^3 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

---

22) On a $\Delta E_{\text{mécanique}} = W_{\vec{F}}$

• de (1) à (2)

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}_1^2$$
$$= \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}_1^2 \left(\frac{L^2}{\ell^2} - 1\right)$$
$$\Delta E_p = -mg\ell - (-mgL)$$
$$\boxed{W_{\vec{F}} = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}_1^2 \left(\frac{L^2}{\ell^2} - 1\right) + mg(L - \ell)} > 0$$

• de (3) à (4)

$$\Delta E_c = 0 - 0 = 0$$
$$\Delta E_p = -mgL\cos\theta_3 - (-mg\ell\cos\theta_3)$$
$$\boxed{W_{\vec{F}} = -mg(L - \ell)\cos\theta_3} < 0$$

---

23) on a

$$\underset{\text{de (0) à (8)}}{\Delta E} = \Delta E_c + \Delta E_P$$
$$= 0 + (-mgL\cos\theta_8) - (-mgL\cos\theta_0)$$
$$\boxed{\Delta E = mgL(\cos\theta_0 - \cos\theta_8)} > 0$$
$$= 2mgL\left(\sin^2\frac{\theta_8}{2} - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$\boxed{\Delta E = 2\, mgL \sin^2\frac{\theta_0}{2} \left(\left(\frac{L}{\ell}\right)^6 - 1 \right)} > 0$$

Elle apparait pendant les 4 transformations non conservatives.
Elle est due au travail de $\overrightarrow{F}$

$$\boxed{\Delta E = W_{\overrightarrow{F}\,1\to 2} + W_{\overrightarrow{F}\,3\to 4} + W_{\overrightarrow{F}\,5\to 6} + W_{\overrightarrow{F}\,7\to 8}}$$

---

24) – dans l'expérience du labo, c'est l'expérimentateur qui apporte de l'énergie chaque fois qu'il tire sur le fil. (il en récupère un peu mais moins lorsqu'il laisse filer)

– pour la balançoire, l'enfant puise dans ses réserves d'énergie pour lutter contre la pesanteur en se dressant. Il apporte de l'énergie. (Il en récupère un peu mais moins en s'accroupissant aux extrémités des oscillations)

---

25)

$$\boxed{\overrightarrow{v_G} = \dot{x}\, \overrightarrow{u_x}}$$

---

26) $\overrightarrow{v_P} = \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{PG} \wedge \overrightarrow{\omega}_{tige}$

puisque P et G sont deux points de la tige

avec $\overrightarrow{\omega}_{tige} = \dot{\theta}\, \overrightarrow{u_z}$

$$\overrightarrow{v_P} = \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{GP}$$

$$\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right) \begin{vmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L\sin\theta \\ -L\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta \\ L\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{v_P} = \left(\dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta\right) \overrightarrow{u_x} + \left(L\dot{\theta}\sin\theta\right) \overrightarrow{u_y}}$$

---

27) $$\overrightarrow{P} = \underbrace{M\, \overrightarrow{v_G}}_{\substack{\text{quantité de} \\ \text{mvt du chariot} \\ \text{(translation)}}} + \underbrace{m\, \overrightarrow{v_P}}_{\substack{\text{quantité de} \\ \text{mvt de P} \\ \text{(point matériel)}}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{P} = \left[(M+m)\,\dot{x} + mL\dot{\theta}\cos\theta\right] \overrightarrow{u_x} + mL\dot{\theta}\sin\theta\, \overrightarrow{u_y}}$$

---

28) L'énergie potentielle du chariot est constante. On a donc

$$\boxed{E_P = -mgL\cos\theta} \quad (\text{on fait } E_P = 0 \text{ en } y=0)$$

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}mv_P^2$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}L\dot{\theta}\cos\theta)$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mL\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta}$$

$$E = E_c + E_P$$

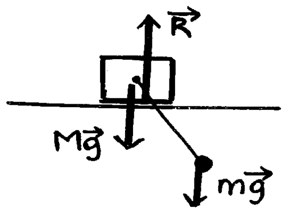
---

29) Dans le référentiel lié au chariot, le pendule décrit un mouvement circulaire. On aura

$$\boxed{\vec{\sigma}_{/\text{chariot}} = mL^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}}$$

---

30) →



forces extérieures sur pendule + chariot :
$M\vec{g}$
$m\vec{g}$
$\vec{R}$ (réaction du support, pas de frottements)

→ On applique le théorème de la quantité de mouvement à l'ensemble chariot + pendule

$$\sum\vec{F_{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$(M+m)\vec{g} + \vec{R} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} /x & 0 & = \frac{dP_x}{dt} \\ /y & -(M+m)g + R & = \frac{dP_y}{dt} \end{array}}$$

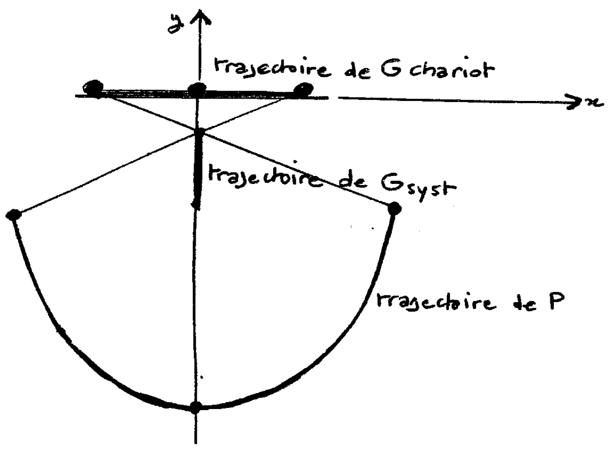
donc la quantité de mouvement selon x est une constante.

Intégrale première : $(M+m)\dot{x} + mL\dot{\theta}\cos\theta = \text{cste}$

C.I. $0 + 0 = \text{cste}$

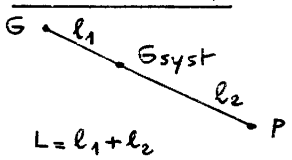
$$\boxed{(M+m)\dot{x} + mL\dot{\theta}\cos\theta = 0}$$

→ La relation précédente indique que le point G_{syst} (centre de masse du système complet) a une vitesse nulle selon x et ne se déplace que selon y.



remarque

il est facile de montrer que <u>la trajectoire de P est une ellipse</u>



cf $x = \ell_2 \sin\theta$

$y = - L \cos\theta$

$$\frac{x^2}{\ell_2^2} + \frac{y^2}{L^2} = 1$$

---

31) $\longrightarrow$ Les forces sont conservatives (pas de frottement) donc E est constante.

$$\frac{1}{2}(M+m)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2} mL^2\dot{\theta}^2 + mL\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - mgL\cos\theta = E$$

C.I.

$$0 + 0 + 0 - mgL\cos\theta_0 = E$$

d'où

<u>intégrale première</u>

$$\boxed{\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} mL^2\dot{\theta}^2 + mL\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - mgL\cos\theta = -mgL\cos\theta_0}$$

$\longrightarrow$ On dérive par rapport au temps :

$$\underline{(M+m)\ddot{x}\dot{x}} + mL^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + \underline{mL\ddot{x}\dot{\theta}\cos\theta} + mgL\sin\theta\,\dot{\theta} = 0$$
$$+ mL\dot{x}\ddot{\theta}\cos\theta$$
$$- mL\dot{x}\dot{\theta}^2\sin\theta$$

Les deux termes soulignés s'annulent (cf première intégrale première) d'où on obtient :

$$\boxed{L\dot{\theta}\left(\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta\right) + \dot{x}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) = 0}$$

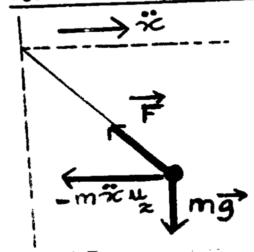
on remplace $\dot{x}$ (cf intégrale première 1)

$$L\dot\theta\left(\ddot\theta + \frac{g}{L}\sin\theta\right) - \frac{mL\dot\theta\cos\theta}{M+m}\left(\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2\sin\theta\right) = 0$$

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{g}{L}\sin\theta - \frac{m}{m+M}\ddot\theta\cos^2\theta + \frac{m}{m+M}\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta = 0}$$

---

32) → Le référentiel lié au chariot <u>n'est pas galiléen</u>, on doit <u>tenir compte des forces d'inertie</u>



(Figure avec $\ddot{x}$ positif)

Le référentiel est en translation, on ajoute <u>la force d'inertie d'entrainement</u>

$$-m\ddot{x}\vec{u_x}$$

→ Dans ce référentiel G est fixe. On peut donc y appliquer le théorème du moment cinétique pour le point P avec $\vec{\sigma} = mL^2\dot\theta\,\vec{u_z}$

$$\vec{GP}\wedge\vec{F} + \vec{GP}\wedge m\vec{g} + \vec{GP}\wedge(-m\ddot{x}\,\vec{u_x}) = mL^2\ddot\theta\,\vec{u_z}$$

$$0 \quad - mgL\sin\theta \quad - m\ddot{x}L\cos\theta = mL^2\ddot\theta$$

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{g}{L}\sin\theta + \frac{\ddot{x}}{L}\cos\theta = 0}$$

On avait (cf intégrale première 1)

$$\dot{x} = -\frac{m}{m+M}L\dot\theta\cos\theta$$

$$\ddot{x} = -\frac{m}{m+M}L\left(\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2\sin\theta\right)$$

on reporte :

$$\ddot\theta + \frac{g}{L}\sin\theta - \frac{m}{m+M}\ddot\theta\cos^2\theta + \frac{m}{m+M}\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

---

33) au premier ordre en θ, $\dot\theta$, $\ddot\theta$

$$\ddot\theta + \frac{g}{L}\theta - \frac{m}{m+M}\ddot\theta + 0 = 0$$

$$\boxed{\ddot\theta + \underbrace{\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{g}{L}}_{\omega^2}\theta = 0}$$

d'où $\boxed{\theta = \theta_0\cos(\omega t)}$ (cf C.I.)

et , au premier ordre , $\dot{x} = -\dfrac{m}{m+M} L\dot{\theta}$

$$x = -\frac{m}{m+M} L\,\theta + K$$

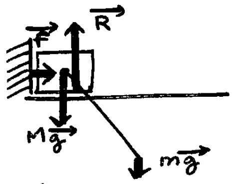
$$\boxed{x = \frac{m L \theta_0}{m+M}\left(1-\cos(\omega t)\right)}$$

---

34) Précédemment, en $t=0^+$ on avait $\dot{\theta}>0$ donc $\dot{x}<0$.
Ici <u>le chariot ne peut plus reculer à cause du butoir</u>.

---

35) Etude de la phase de contact avec le butoir.



(en fait $\theta<0$)

$$\vec{F} + \vec{R} + M\vec{g} + m\vec{g} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$/x \quad f = \frac{dP_x}{dt}$$

avec $\vec{P} = mL\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u_x} + mL\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u_y}$
(cf ici $\dot{x}=0$)

$$\boxed{f = \frac{d}{dt}\left(mL\dot{\theta}\cos\theta\right)}$$

$$= mL\ddot{\theta}\cos\theta - mL\dot{\theta}^2\sin\theta$$

Les variations de θ, G étant fixe, sont celles du pendule simple :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\boxed{f = mg\,(2\cos\theta_0 - 3\cos\theta)\sin\theta}$$

Le contact cesse quand f devient nul soit pour la première fois en $\theta=0$
<u>quand le pendule passe par la verticale</u>

---

36) en $t=0$: $\theta_1 = 0$

$$\dot{\theta}_1^2 = \frac{2g}{L}(1-\cos\theta_0)$$

$$\boxed{\dot{\theta}_1 = \sqrt{\frac{2g}{L}(1-\cos\theta_0)}}$$

L'équation obtenue en appliquant le th du σ reste valable :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta + \frac{\ddot{x}}{L}\cos\theta = 0$$

La conservation de P_x reste vraie (même si la constante diffère). En la dérivant l'expression de $\ddot{x}$ n'a donc pas changé.

Pour les petits angles, on retrouve donc le même ω

donc $\theta = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

En $t=0$,

$\theta = \theta_1 = 0$

$\dot{\theta} = \dot{\theta}_1 = \sqrt{\frac{2g}{L}(1-\underbrace{\cos\theta_0}_{\simeq 1-\frac{\theta_0^2}{2}})}$

$\simeq -\sqrt{\frac{g}{L}}\,\theta_0$

(cf $\theta_0<0$ et $\dot{\theta}_1>0$)

C.I. $0 = A$

$-\sqrt{\frac{g}{L}}\,\theta_0 = B\omega$

$$\boxed{\theta = -\frac{\theta_0}{\sqrt{1+\frac{m}{M}}}\sin(\omega t)}$$

---

37)

$P_x = (M+m)\dot{x} + mL\dot{\theta}\cos\theta$

C.I. $= 0 + mL\dot{\theta}_1\cos\theta_1$ avec $\theta_1 = 0$

$$\boxed{(M+m)\dot{x} + mL\dot{\theta}\cos\theta = mL\dot{\theta}_1}$$

---

38) En intégrant :

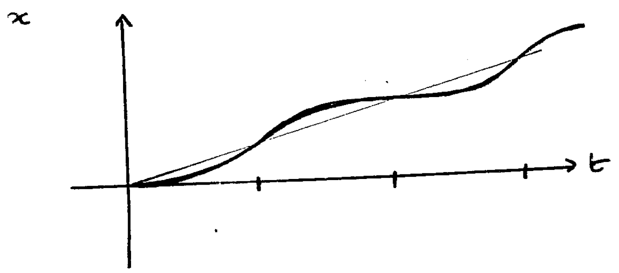
$(M+m)x + mL\sin\theta = mL\dot{\theta}_1\, t + K$

C.I. $0 + 0 = 0 + K$

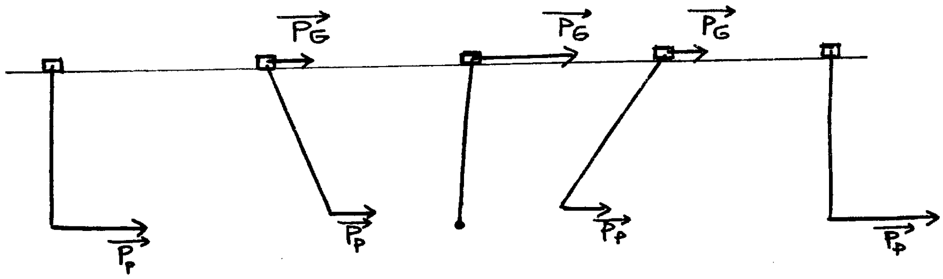
$$x = \frac{mL\dot{\theta}_1}{M+m}t - \frac{mL\sin\theta}{M+m}$$

Pour les petits angles, on a $\sin\theta \simeq \theta$

$$\boxed{x = \frac{m}{m+M}\sqrt{gL}\,(-\theta_0)\left(t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right)}$$



x(t)



conservation de la quantité de mouvement