DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

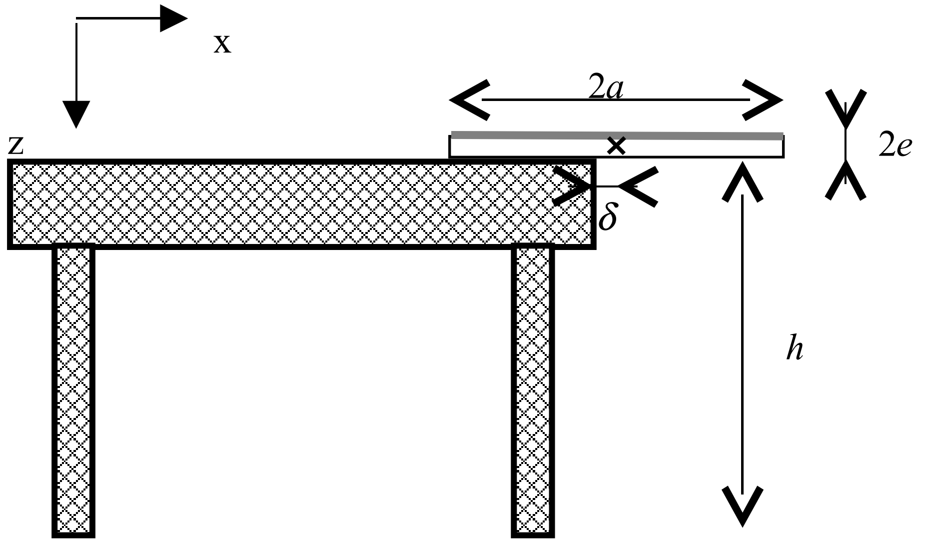
durée: 4 heures

Sujet

Chute d'une tartine beurrée

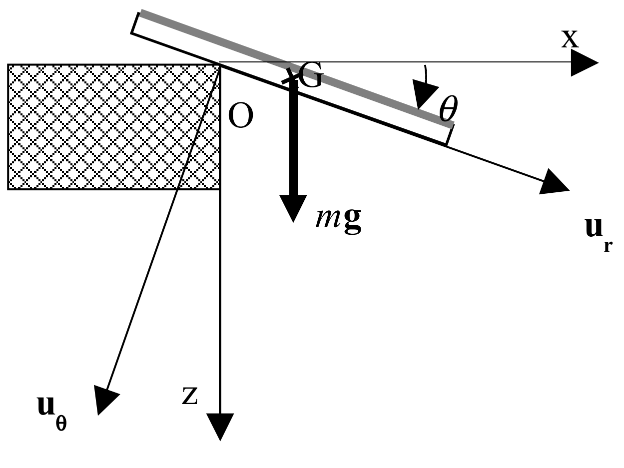
Ce problème propose une étude simplifiée de la chute d'une tartine beurrée posée sur le bord d'une table afin de déterminer la face qui rencontre le sol. Pourquoi est-ce toujours la face beurrée ?

Une tartine, modélisée par un parallélépipède rectangle, homogène, de dimensions suivantes : longueur $2a$, largeur $2b$, épaisseur $2e$, de centre d'inertie G, de masse m, est posée sur le bord d'une table dans la position schématisée ci-dessous:



Le mouvement est décrit dans le repère $\mathscr{R}$(O,x,y,z) direct et supposé galiléen: O est sur le bord de la table,l'axe Ox est horizontal dirigé vers l'extérieur de la table; l'axe Oy est porté par le rebord de la table et l'axe Oz, vertical, est dirigé vers le bas; les petits côtés de la tartine sont parallèles à Oy.

I. Etude de la rotation:



En $t = 0$, la tartine est horizontale et sa vitesse est nulle et le point G se trouve dans le plan xOz décalé de δ selon l'axe Ox par rapport à l'origine O. La tartine amorce une rotation **sans glissement** autour de l'arête Oy du bord de la table. A l'instant t, la tartine est repérée par l'angle θ de la figure.

On note la vitesse angulaire $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$.

Le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe Gy, parallèle à Oy et passant par G, est $J_{Gy} = 1/3\ m\ (a^2 + e^2)$ et celui par rapport à l'axe Oy est $J_{Oy} = J_{Gy} + m\ (e^2 + \delta^2)$.

A. Cinématique de la première phase de rotation sans glissement:

1. Exprimer le vecteur rotation $\vec{\omega}$ de la tartine en fonction de $\dfrac{d\theta}{dt}$ dans la base directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u})$.
2. Exprimer les coordonnées de G dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u})$.
3. Exprimer la vitesse $\vec{v}_G$ de G dans cette base en fonction de e, δ, ω.

Dans la partie D, on fera $\delta = 0$. Que devient dans ce cas la vitesse $\vec{v}_G$.

4. Exprimer l'accélération $\vec{a}_G$ de G dans cette même base.

Dans la partie D, on fera $\delta = 0$. Que devient dans ce cas l'accélération $\vec{a}_G$.

B. Etude dynamique de la première phase:

La réaction de la table en O est notée $\vec{R} = T\,\vec{u}_r + N\,\vec{u}_\theta$, T: réaction tangentielle et N:réaction normale.

5. Ecrire les deux relations issues du théorème du mouvement du centre de masse dans le repère galiléen $\mathscr{R}$(O,x,y,z), en projection sur la base mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u})$. On notera g l'accélération de la pesanteur. Ecrire en utilisant les notations définies plus haut.
6. Ecrire la relation issue du théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe. Ecrire en utilisant les notations définies plus haut.
7. Ecrire aussi le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique et vérifier que le résultat obtenu est identique au résultat précédent.
8. En déduire l'expression de ω^2 en fonction de θ, J_{Oy} et autres constantes figurant dans l'énoncé.

C. Etude énergétique de la première phase:

9. Retrouver l'expression de ω^2 par une étude énergétique. Justifier avec précision l'utilisation du théorème utilisé et expliquer le calcul avec soin.

D. Approximation du léger déséquilibre:

<u>A partir de maintenant</u> et jusqu'à la fin du problème, on tient compte du fait que la chute de la tartine a été causée par un très léger déséquilibre. La valeur de δ/a est faible: dans les circonstances courantes, ce coefficient de surplomb ne dépasse guère 0,02. <u>On fait donc pour simplifier $\delta = 0$.</u>

10. On posera $\eta = e/a$. Montrer que l'on a $\omega^2 = \omega_0^2\ (1 - \cos\theta)$ et donner l'expression de ω_0^2 en fonction de η , g , a .

E. Vérification des hypothèses pour la première phase de rotation:

11.Etablir les expressions de $\frac{T}{mg}$ et $\frac{N}{mg}$ en fonction de θ et η.

12.Quel est le signe de $\frac{N}{mg}$ pour $\theta = 0$? pour $\theta = \pi/2$? Commenter la signification physique.

13.Etudier le signe de $\frac{T}{mg}$. Commenter éventuellement.

14.Donner l'allure sur un même graphique des courbes représentant $\left|\frac{T}{mg}\right|$ et $f \times \left|\frac{N}{mg}\right|$ en fonction de θ. La tartine peut-elle quitter le coin de la table sans glisser? Justifier avec précision.

F. Deuxième phase de rotation:

<u>A partir de maintenant</u> et jusqu'à la fin du problème, l'épaisseur de la tartine étant «petite», la valeur de $\eta = e/a$ est faible : <u>On travaille donc pour simplifier au premier ordre en η.</u> (On néglige les termes du deuxième ordre).

La tartine commence à glisser pour $\theta_0 = \pi/4$.

15.Déterminer le coefficient de frottement f entre la table et la tartine.

II. Etude de la chute:

On s'intéresse maintenant à la chute de la tartine. A partir du moment où elle commence à glisser, la tartine perd très vite le contact avec la table <u>conservant quasiment la même orientation et la même vitesse angulaire qu'au début de cette phase très brève de glissement</u>. On considère donc ici que la tartine est en chute libre dès $\theta_0 = \pi/4$. On prend l'origine des temps au début de la chute libre. On néglige les frottements de l'air sur la tartine.

On suppose, bien entendu, qu'il n'y a pas de contact ultérieur de la tartine avec la table.

A. La chute:

16.Ecrire le théorème du centre de masse, le théorème du moment cinétique. Ecrire la conservation de l'énergie mécanique totale.

17.Quelle est la loi d'évolution ultérieure de l'angle θ . Justifier. Donner l'expression de θ en fonction de t, θ_0 , ω_0 (notation définie plus haut).

18.Ecrire les équations littérales du mouvement de G en fonction de g, t, θ_0 , ω_0 , e .

B. L'arrivée au sol:

On considère que, lorsque la tartine atteint le sol, à l'instant τ, elle ne subit pas de rebond et que toute son énergie cinétique devient négligeable.

19.Quels sont les angles limites θ_1 et θ_2 ($\theta_2 > \theta_1$) tels que la tartine atterrisse côté pain, en admettant qu'elle fasse moins d'un tour avant de toucher le sol. Faire un schéma représentant 5 ou 6 des positions de la tartine (dont les positions initiale et finale) dans le plan xOz pour cette chute dans le cas limite θ_2 . Indiquer clairement la face beurrée.

20.En négligeant toutes les dimensions de la tartine devant h (hauteur de la table), évaluer la durée de la chute τ si la hauteur de la table est h et l'angle dont a tourné la tartine depuis sa position d'équilibre initiale.

21. Applications numériques: calculer τ et l'angle en degrés pour h = 75 cm, g = 9,8 ms^{-2}, a = 4 cm, e = 0,4 cm.Conclusion?

Elaboration du nickel

Le minerai de Nouvelle Calédonie ou garniérite (3 MgO, 2SiO, $2H_2O$) contient environ 2,5% de nickel (% en masse). Ce nickel se trouve sous forme d'oxyde NiO. Il est séché et réduit à la température T, dans un four de 95m de long, sous une pression constante P, par l'addition de 50kg de charbon par tonne de minerai.

A.N. $T = 1000°C$ soit 1273 K
$P = 1$ bar soit $100\ 10^3$ Pa
$R = 8{,}314\ J\ mol^{-1}\ K^{-1}$

I. Réduction supposée de NiO par C uniquement:

On suppose que la seule réaction qui puisse se produire est:

$NiO(s) + C(graphite) = Ni(s) + CO(g)$ *(1)*

1. Dans l'approximation d'Ellingham, déterminer l' enthalpie libre standard de la réaction $\Delta rG°_1$ en fonction de la température T et sa valeur à 1000°C.
2. Calculer la constante d'équilibre $K°_1(T)$ à 1000°C. Calculer la pression à l'équilibre.
3. Exprimer l'affinité de la réaction en faisant intervenir le quotient de réaction et la constante d'équilibre. La pression à laquelle s'effectue la réaction vaut 1 bar. Que peut-on déduire? Vérifier en calculant l'affinité. Commenter.
4. Dans le réacteur où la température et la pression sont maintenues constantes, (respectivement à 1000°C et 1 bar), on introduit 50kg de carbone par tonne de minerai; celui-ci contient 2,5% en masse de nickel (sous forme de NiO, le pourcentage en masse de NiO est supérieur donc à 2,5%). En supposant que les cinétiques des réactions soient suffisamment rapides, déterminer, par tonne de minerai
   - la masse du Nickel obtenu en fin de réaction
   - l'avancement en fin de réaction
   - le nombre de moles de carbone en fin de réaction

II. Réduction de NiO par C et CO:

En fait, les réactions qui peuvent se produire sont au nombre de trois:

$NiO(s) + C(graphite) = Ni(s) + CO(g)$ (1)

$NiO(s) + CO(g) = Ni(s) + CO_2(g)$ (2)

$2CO(g) = C(graphite) + CO_2(g)$ (3)

5. Montrer que ces trois équilibres ne sont pas indépendants: on vérifiera par exemple que l'équation (2) est une combinaison linéaire de (1) et (3). Dans la suite, il suffit alors de ne prendre en compte que deux de ces trois réactions.

6. En déduire la relation entre les $\Delta rG°_i(T)$ avec i = 1, 2, 3. Quelle est la relation entre les constantes d'équilibre $K°_i(T)$ avec i = 1, 2, 3. Calculer les $\Delta rG°_i$(1000°C) et les $K°_i$ (1000°C).

7. P_{CO} et P_{CO2} désignent les pressions partielles des gaz. On suppose les trois équilibres chimiques réalisés.

   - Ecrire les expressions des trois constantes d'équilibre en fonction de : $(P_{CO})_{\text{équilibre}}$ et $(P_{CO2})_{\text{équilibre}}$ et de la pression standard $P°$.
   - Combien de relations indépendantes peut-on écrire entre les quatre variables du problème: P, T, $(P_{CO})_{\text{équilibre}}$, $(P_{CO2})_{\text{équilibre}}$ en supposant les équilibres réalisés. Les écrire. Combien de ces quatre variables est-on alors libre de fixer a priori ?
   - En prenant en compte les contraintes industrielles, on fixe P à 1bar et T à 1000°C. Il y a alors rupture de certains équilibres chimiques. Dans le cas où le réactif excédentaire est NiO, quel équilibre chimique reste alors à considérer? Même question si le réactif excédentaire est C.

8. On considère le réacteur étudié précédemment (1000°C, 1 bar)

   - déterminer, par tonne de minerai, la masse de Nickel obtenu
   - calculer les pressions partielles en CO et en CO_2 en fin de réaction.

9. On considère les deux réactions indépendantes (1) et (3) et on désigne l'avancement de ces réactions par ξ_1 et ξ_3.

   - Exprimer le nombre de moles de NiO et le nombre de moles de C en fonction de ξ_1 et ξ_3 et des nombres de moles initiaux.
   - Calculer ξ_1 et ξ_3 en fin de réaction.
   - En déduire le nombre de moles de carbone en fin de la réaction. Conclure en comparant au résultat approché obtenu dans la première partie.

Données:
Ni = 58,70 g.mol^{-1}
C = 12,00 g.mol^{-1}
O = 16,00 g.mol^{-1}
R = 8,314 J.K^{-1} mol^{-1}

A 298 K	Ni*(s)*	NiO*(s)*	C*(graphite)*	CO*(g)*	CO2*(g)*
$\Delta H_f°$ *(kJ.mol^{-1})*	0	-239,85	0	-110,59	-393,68
$S°$ *(J.K^{-1}.mol^{-1})*	30,14	38,00	5,69	197,99	213,73

Conduction thermique dans une barre en régime quasipermanent

On étudie la conduction thermique à pression constante dans un barreau de longueur L, de section droite carrée de surface S dont le côté est très inférieur à L. Ce barreau est entouré par une enveloppe adiabatique. On considère que la température est uniforme sur une section droite du barreau et ne dépend que de son abscisse x et éventuellement du temps t. On désigne par k la conductivité thermique, par μ la masse volumique et par c la capacité thermique massique à pression constante.

I. Régime permanent:

On se place pour l'instant en régime permanent. Les extrémités $x=0$ et $x=L$ du barreau sont en contact avec deux sources idéales de chaleur de températures respectivement égales à T_1 et T_2 avec $T_1>T_2$. On désigne par $\Phi(x)$ le flux thermique c'est-à-dire la quantité de chaleur traversant la section d'abscisse x par unité de temps. $\Phi(x)$ est compté positivement dans le sens des x croissants.

1. Démontrer que $\Phi(x)$ est indépendant de x.
2. Rappeler la loi de Fourier. Déterminer l'expression de $T(x)$ en fonction de x , L , T_1 et T_2.
3. Montrer que le flux thermique Φ est de la forme $\Phi = \dfrac{T_1 - T_2}{R_{th}}$ et déterminer l'expression de la résistance thermique R_{th} de la barre en fonction de S, k, L.

II. Equation de la chaleur:

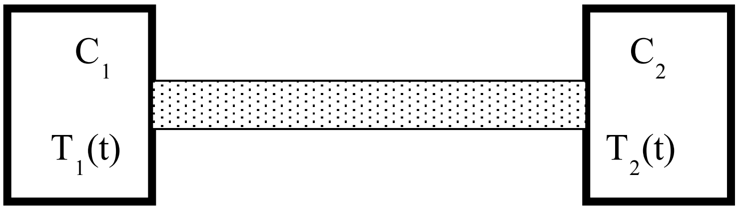
On ne se place plus ici en régime permanent et donc $\Phi = \Phi(x,t)$.

4. En effectuant un bilan enthalpique, pour un système élémentaire que l'on précisera, exprimer en $\dfrac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x}$ fonction de $\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t}$ (et des constantes de l'énoncé).
5. Retrouver l'équation aux dérivées partielles dont $T(x,t)$ est solution.
6. En régime dépendant du temps, pour une diffusion thermique sur une distance L, il faut une durée de l'ordre de τ_d.
   - A partir des grandeurs k, μ, c et L, construire une grandeur homogène à une durée notée τ_d.
   - Commenter la dépendance de ce temps caractéristique de diffusion thermique avec L.

III. Approximation des régimes quasi-permanents:

En réalité, le barreau est relié à deux sources de chaleur dont les températures $T_1(t)$ et $T_2(t)$ sont uniformes mais dépendent du temps. On note C_1 et C_2 les capacités thermiques respectives à pression constante de ces sources (voir figure).

A l'instant $t = 0$, on a $T_1(0) = T_{01}$ et $T_2(0) = T_{02}$.



On se place dans l'approximation des régimes quasi permanents: la température dans la barre évolue suffisamment lentement pour que l'on puisse conserver à chaque instant l'expression $\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$ donnant $\Phi(t)$ en fonction de $T_1(t)$ et $T_2(t)$.

7. En considérant la source 1 , établir une autre relation pour $\Phi(t)$ en fonction de $T_1(t)$. Idem établir une troisième relation pour $\Phi(t)$ en fonction de $T_2(t)$.

8. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\Phi(t)$. Quelle est la constante de temps τ caractéristique de l'évolution de ce système? Résoudre pour trouver $\Phi(t)$.

9. Montrer que $C_1 T_1(t) + C_2 T_2(t)$ est une constante? Commenter la signification physique.

10. Expression des températures:
    - Exprimer alors $T_1(t)$ et $T_2(t)$ en partant des deux réponses précédentes.
    - Préciser les limites $T_1(t \to \infty)$ et $T_2(t \to \infty)$.
    - Retrouver par un raisonnement physique simple la valeur de $T_1(t \to \infty)$ et celle de $T_2(t \to \infty)$.
    - Tracer les graphes donnant $T_1(t)$ et $T_2(t)$ lorsque $C_1 = C_2$ (on suppose $T_{01} > T_{02}$).

11. Trouver une analogie électrocinétique pour ce problème.

12. En comparant τ et τ_d établir une condition sur μ, c, S, L, C_1 et C_2 pour que l'approximation des régimes quasi-permanents soit correcte. Interpréter qualitativement cette condition. Commenter.

IV. Entropie créée:

13. Déterminer la variation d'entropie de chaque partie du système en supposant que l'on peut négliger la capacité thermique de la tige et en déduire l'entropie créée au cours de l'évolution de ce système. Où cette entropie se crée-t-elle?

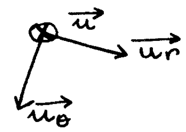
14. On considère une tranche de la tige.
    - Montrer que, dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires, la variation d'entropie d^2S pour cette tranche entre x et x+dx pour les instants entre t et t+dt est nulle.
    - Montrer que l'entropie échangée par la tranche vaut: $\delta^2 S_e = \Phi \left(\frac{1}{T(x,t)} - \frac{1}{T(x+dx,t)} \right) dt$

- En déduire que l'entropie créée par unité de temps et de volume $\sigma(x,t)$ vérifie: $\sigma(x,t)=\frac{k}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2$
- Retrouver le résultat de la question précédente en partant de cette expression

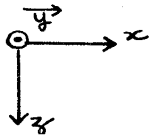
Réponses

Chute d'une tartine beurrée

1)

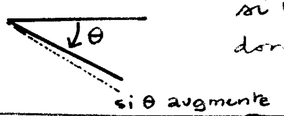


$\vec{u}$ "s'enfonce dans la feuille" pour que la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u})$ soit directe



$\vec{y}$ " vient vers nous" pour que la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ soit directe.

On a $\vec{y} = -\vec{u}$



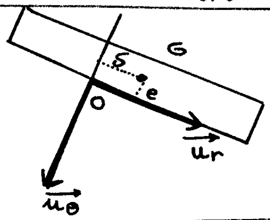
si $\dot\theta$ positif, $\vec{\omega}$ "s'enfonce"

donc $\boxed{\vec{\omega} = \dot\theta\, \vec{u}}$

$\dot\theta$ noté ω

---

2)



$$\boxed{\vec{OG} = \delta\, \vec{u_r} - e\, \vec{u_\theta}}$$

---

3) G et O ($\in$ tartine) sont deux points ~~du solide~~ tartine

$$\vec{v_G} = \vec{v}_{O \in \text{tartine}} + \vec{GO} \wedge \vec{\omega}$$

$\hookrightarrow = \vec{v}_{O \in \text{table}}$ car non glissement en O

$= 0$

$$\boxed{\vec{v_G} = \vec{\omega} \wedge \vec{OG}}$$

on retrouve bien l'idée que G est en rotation autour de O

$$\begin{array}{c|c|c} & \vec{\omega} & \vec{OG} \\ & 0 & \delta \\ & 0 & -e \\ \vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u} & \omega & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\vec{v_G} = e\omega\, \vec{u_r} + \delta\omega\, \vec{u_\theta}}$$

Si $\delta = 0$

$$\boxed{\vec{v_G} = e\omega\, \vec{u_r}}$$

---

4) Pour trouver $\vec{a_G}$, on dérive.

Par exemple :

$$\vec{a_G} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{OG}\right)$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OG} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OG}}{dt}$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OG} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OG})$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OG} - \omega^2 \overrightarrow{OG}$$

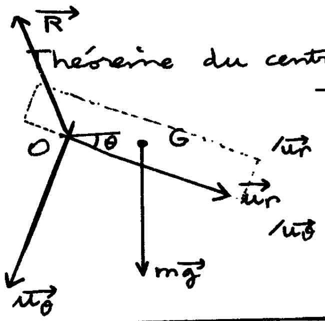
$$\begin{array}{c} \\ \\ \vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u} \end{array} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \frac{d\omega}{dt} \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \delta \\ -e \\ 0 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} \delta \\ -e \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\vec{a_G} = (e\dot{\omega} - \omega^2 \delta)\vec{u_r} + (\dot{\omega}\delta + e\omega^2)\vec{u_\theta}}$$

si $\delta = 0$ $\boxed{\vec{a_G} = e\dot{\omega}\,\vec{u_r} + e\omega^2\,\vec{u_\theta}}$

---

5)



Théorème du centre de masse appliqué à la tartine :

$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a_G}$$

$/\vec{u_r}$ $\boxed{T + mg\sin\theta = m(e\dot{\omega} - \delta\omega^2)}$

$/\vec{u_\theta}$ $\boxed{N + mg\cos\theta = m(e\omega^2 + \delta\dot{\omega})}$

---

6) La tartine tourne autour de l'axe fixe $(O, \vec{u})$

$$\sum \mathcal{M}_{ext\,/(O,\vec{u})} = \frac{d}{dt}\sigma_{(O,\vec{u})}$$

$$\mathcal{M}(O)_{poids/\vec{u}} + \underbrace{\mathcal{M}(O)_{Reaction/\vec{u}}}_{nul} = J_{Oy}\frac{d\omega}{dt}$$

on a $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{poids}(O) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}$

$$(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u}) \left| \begin{array}{l} \delta \\ -e \\ 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} mg\sin\theta \\ mg\cos\theta \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{poids(O)} = mg(\delta\cos\theta + e\sin\theta)\vec{u}$$

$$\boxed{mg(\delta\cos\theta + e\sin\theta) = J_{Oy}\,\dot{\omega}}$$

---

7) Dans le référentiel barycentrique, la rotation s'effectue

autour de l'axe $(G,\vec{u})$

$$\sum \mathcal{M}_{ext}/(G,\vec{u}) = \frac{d}{dt}\sigma^*_{/\vec{u}}$$

$$\underbrace{\mathcal{M}(G)_{poids/\vec{u}}}_{nul} + \mathcal{M}(G)_{réaction}/\vec{u} = J_{Gy}\frac{d\omega}{dt}$$

on a $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{réaction}(G) = \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{R}$

$$\underset{(\vec{u_r},\vec{u_\theta},\vec{u})}{} \begin{vmatrix} -\delta \\ e \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} T \\ N \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{réaction}(G) = -(\delta N + eT)\vec{u}$$

$$\boxed{-\delta N - eT = J_{Gy}\,\dot{\omega}}$$

Cette forme est moins intéressante puisque elle fait intervenir N et T non donnés.

On reporte N et T obtenus par le théorème du centre de masse :

$$\begin{aligned} &-\delta\,(m(e\omega^2+\delta\dot{\omega}) - mg\cos\theta) \\ &-e\,(m(e\dot{\omega} - \delta\omega^2) - mg\sin\theta) \end{aligned} = J_{Gy}\,\dot{\omega}$$

finalement :

$$mg(\delta\cos\theta + e\sin\theta) = \underbrace{\left(J_{Gy} + m(e^2+\delta^2)\right)}_{J_{Oy}}\dot{\omega}$$

<u>on retrouve bien le résultat précédent.</u>

---

8) On intègre en multipliant par $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

$$mg(\delta\cos\theta + e\sin\theta)\frac{d\theta}{dt} = J_{Oy}\frac{d^2\theta}{dt^2}\frac{d\theta}{dt} \quad \text{donc :}$$

$$\boxed{mg(\delta\sin\theta - e\cos\theta) = J_{Oy}\frac{\omega^2}{2} + A}$$

On porte les conditions initiales d'où A

$$mg(\ 0 \ - e\ ) = 0 + A$$

finalement

$$\boxed{\omega^2 = \frac{2mg}{J_{Oy}}\left(\delta\sin\theta + e(1-\cos\theta)\right)}$$

---

9) L'étude énergétique était préférable pour obtenir le résultat précédent : en l'absence de glissement, $\overrightarrow{R}$ ne travaille pas donc :

$$E_m = E_c + E_{P(\text{poids})} = \text{constante}.$$

avec $E_c = \frac{1}{2} J_{Oy}\,\omega^2$

et $E_P = -mg\,z_G$

$$= -mg\,(\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{u_z})$$

$$\begin{array}{c|c|c} & \delta & \sin\theta \\ & -e & \cos\theta \\ \overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u} & 0 & 0 \end{array}$$

$$= -mg\,(\delta\sin\theta - e\cos\theta)$$

finalement :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} J_{Oy}\,\omega^2 - mg\,(\delta\sin\theta - e\cos\theta)}$$

C.I. $E_m = 0 - mg\,(0 - e)$

$$\frac{1}{2} J_{Oy}\,\omega^2 = mg\,(\delta\sin\theta + e(1-\cos\theta))$$

on retrouve le même résultat.

---

10) Si $\delta = 0$ $\omega^2 = \dfrac{2mge}{J_{Oy}}(1-\cos\theta)$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2\,(1-\cos\theta)}$$

avec : $\omega_0^2 = \dfrac{2mge}{\frac{1}{3}m(a^2+e^2)+m(e^2+\cancel{\delta^2})}$

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{6g}{a}\,\frac{\eta}{1+4\eta^2}}$$

(remarque : en dérivant ω^2 par rapport au temps, on retrouve $\dot\omega$

$$2\omega\dot\omega = \omega_0^2\sin\theta\;\omega$$

$$\boxed{\dot\omega = \frac{\omega_0^2}{2}\sin\theta}$$

---

11) On reporte dans les expressions de T et N

$$\boxed{\frac{T}{mg} = -\frac{1+\eta^2}{1+4\eta^2}\sin\theta}$$

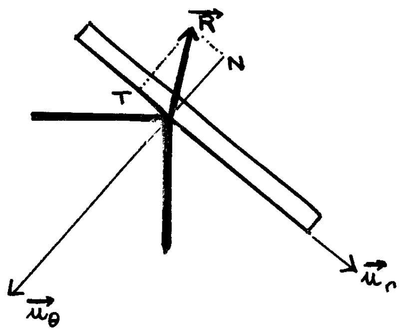
$$\boxed{\frac{N}{mg} = \frac{6\eta^2}{1+4\eta^2} - \frac{1+10\eta^2}{1+4\eta^2}\cos\theta}$$

---

12)

$$\boxed{\begin{array}{lll} \theta = 0 & \dfrac{N}{mg} = -1 & \text{négatif} \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} & \dfrac{N}{mg} = \dfrac{6\eta^2}{1+4\eta^2} & \text{positif} \end{array}}$$

il y a contact si $N < 0$



il y a donc décollage pour un angle entre 0 et $\pi/2$ dans le cadre de l'hypothèse du non glissement

---

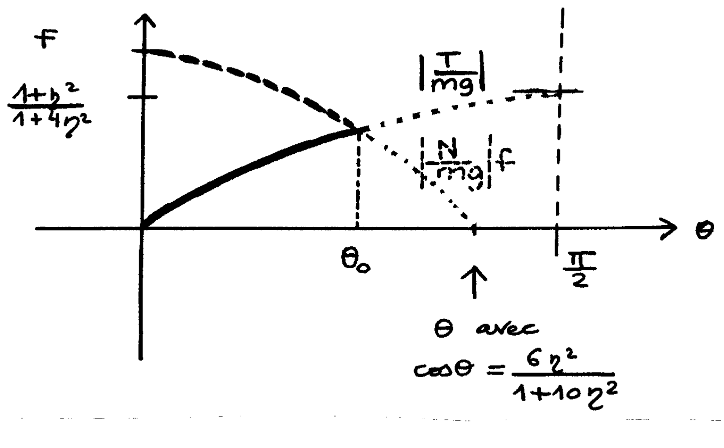
13)

$$\boxed{T < 0 \text{ entre } 0 \text{ et } \pi/2}$$

La loi de Coulomb ne donne pas ce signe pour le non glissement

---

14)



Il y a non glissement si $\left|\frac{T}{N}\right| \leqslant f$

soit $\left|\frac{T}{mg}\right| \leqslant f\left|\frac{N}{mg}\right|$

Les deux courbes se croisent obligatoirement avant $\pi/2$ pour $\theta = \theta_0$ (voir figure). Le glissement commence en θ_0.

---

15) Au premier ordre en η :

$$\frac{T}{mg} = -\sin\theta$$

$$\frac{N}{mg} = -\cos\theta$$

Le glissement commence pour θ_0 tel que

$$\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} = f$$

$$\boxed{\tan\theta_0 = f}$$

A.N. $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{f = 1}$$

---

16) _ th du centre de masse :

$$m\vec{g} = m\vec{a_G}$$

$$\boxed{\vec{a_G} = \vec{g}}$$

(le point G est en chute libre)

— th du moment cinétique dans le référentiel barycentrique

Le moment du poids est nul en G donc :

$$\vec{\sigma}^* = \text{constante}$$

$$\boxed{\omega = \text{constante}}$$

— conservation de l'énergie :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}m v_G^2 + \underbrace{\frac{1}{2}J_{Gy}\,\omega^2}_{\text{constant}} - mgz}$$

---

17) A la fin de la première phase : $\omega_{fin} = \omega_0\sqrt{1-\cos\theta_0}$.
Cette vitesse reste constante pendant la seconde phase de chute libre.

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0\sqrt{1-\cos\theta_0}\; t}$$

---

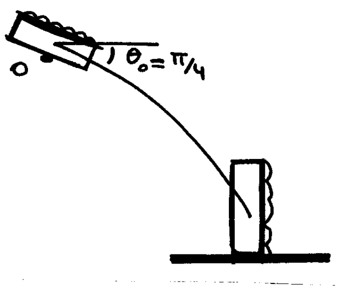
18) G est en chute libre avec $\overrightarrow{v_0} = e\,\omega_{fin}\,\overrightarrow{u_r}_{fin}$ et $\overrightarrow{OG_0} = -e\,\overrightarrow{u_\theta}_{fin}$

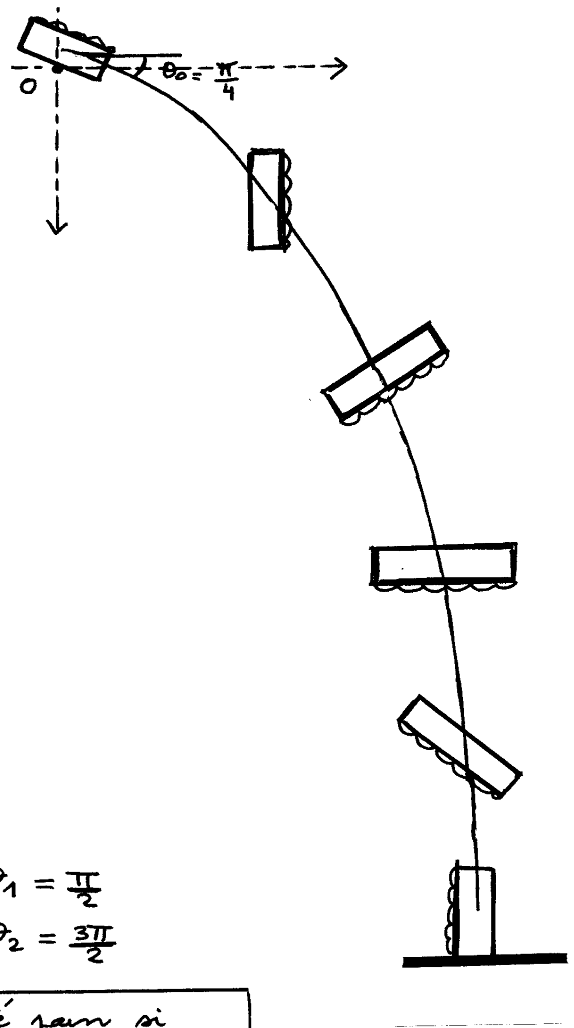
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \overrightarrow{v_{G_0}}\,t + \overrightarrow{OG_0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_G &= (e\omega_0\sqrt{1-\cos\theta_0})\cos\theta_0\, t + e\sin\theta_0 \\ z_G &= \frac{1}{2}g\,t^2 + (e\omega_0\sqrt{1-\cos\theta_0})\sin\theta_0\, t - e\cos\theta_0 \end{aligned}}$$

---

19)





Les deux cas limites : $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$

$\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$

$$\boxed{\text{La tartine atterrit côté pain si } \theta \leqslant \theta_1 \text{ ou si } \theta \geqslant \theta_2}$$

---

20) $h \simeq \frac{1}{2} g \tau^2$ donc $\boxed{\tau \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}}}$

$$\omega_0 \simeq \sqrt{6 \frac{g}{a} \varepsilon}$$
$$\simeq \frac{1}{a}\sqrt{6ge}$$

$$\theta \simeq \theta_0 + \frac{1}{a}\sqrt{6ge}\,\sqrt{1-\cos\theta_0}\,\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

donc $\boxed{\theta \simeq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{a}\sqrt{12eh}\,\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}}$

---

21) A.N. $\boxed{\begin{array}{l} \tau = 0{,}39 \text{ s} \\ \theta = 192° \end{array}}$ $\left(< \frac{3\pi}{2}\right)$

La tartine atterrit côté beurre.

Elaboration du nickel

1) Dans le cadre de l'approximation d'Ellingham

$$\Delta_r G^\circ_1(T) = \Delta_r H^\circ_1(T) - T\,\Delta_r S^\circ_1(T)$$
$$= \Delta_r H^\circ_1(298K) - T\,\Delta_r S^\circ_1(298K)$$

$$\boxed{\Delta_r G^\circ_1(T) = 129{,}26\ 10^3 - T\ 184{,}44 \quad /\mathrm{J\,mol^{-1}}}$$

$$\boxed{\Delta_r G^\circ_1(1273K) = -105{,}53\ \mathrm{kJ\,mol^{-1}}}$$

---

2) $\Delta_r G^\circ_1(T) = -RT \ln K^\circ_1(T)$

$$\boxed{K^\circ_1(T) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ_1(T)}{RT}\right)}$$

A.N. $K^\circ_1(1273K) = \exp\left(-\frac{-105530}{8{,}314 \times 1273}\right)$

$$\boxed{K^\circ_1(1273K) = 21{,}4\ 10^3}$$

avec $K^\circ_1 = \frac{P_{eq}}{P^\circ}$

$$\boxed{P_{eq}(1273K) = 21{,}4\ 10^3\ \mathrm{bar}}$$

---

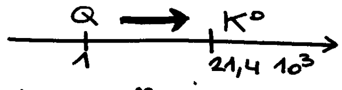
3) $A = -(\Delta_r G^\circ(T) + RT \ln Q)$

$0 = -(\Delta_r G^\circ(T) + RT \ln K^\circ)$

d'où

$$\boxed{A = RT \ln \frac{K^\circ}{Q}}$$

ici $Q = \frac{P}{P^\circ}$ avec $P = 1\,\mathrm{bar}$ est inférieur à K°



L'évolution se fait donc effectivement vers la droite comme voulu. Malgré cela, Q n'augmente pas (indépendant de ξ) et donc la réaction sera totale jusqu'à rupture d'équilibre chimique (disparition de NiO ou de C)

A.N. $\boxed{A = RT \ln \frac{P_{eq}(T)}{P}}$

$\boxed{A = -\left(\Delta_r G^\circ_{(T)} + RT \ln \frac{P}{P^\circ}\right)}$

finalement ici

$A = -\Delta_r G^\circ(T)$

$\underline{A = 105{,}53 \text{ kJ mol}^{-1}}$ > 0 $(+\xi)$

La réaction est bien totale vers la droite

---

4)

	$NiO_{(s)}$	+	$C_{(graph)}$	$\xrightarrow[\text{totale}]{\text{réaction}}$	$Ni_{(s)}$	+	$CO_{(g)}$
moles initial	$\frac{25 \text{ (kg)}}{M_{Ni} \text{ (kg)}}$ $= 426$ mol.		$\frac{50 \text{ (kg)}}{M_C \text{ (kg)}}$ $= 4167$				
moles	$426 - \xi$		$4167 - \xi$		ξ		ξ

NiO est le réactif limitant donc $\boxed{\xi_{final} = 426 \text{ mol}}$

on a réduit tout le NiO et donc on a récupéré tout le Ni $\boxed{m_{Ni} = 25 \text{ kg}}$

Le nombre de moles de C restant est $4167 - \xi$ $\boxed{n_{C\,final} = 3741 \text{ mol}}$

---

5)

$NiO + C = Ni + CO_{(g)}$ (1)

$NiO + CO_{(g)} = Ni + CO_{2(g)}$ (2)

$2CO_{(g)} = C + CO_{2(g)}$ (3)

$NiO + \cancel{C} + \cancel{2}CO = Ni + \cancel{CO} + \cancel{C} + CO_2$ (1)+(3)

on obtient $\boxed{(1) + (3) = (2)}$

---

6) donc $\boxed{\Delta_r G^\circ_{1(T)} + \Delta_r G^\circ_{3(T)} = \Delta_r G^\circ_{2(T)}}$

et puisque $\Delta_r G°(T)$ est proportionnel à $\ln K°(T)$

car $\Delta_r G°(T) = -RT \ln K°(T)$, on aura

$$\boxed{K°_1(T)\ K°_3(T) = K°_2(T)}$$

A.N. $\Delta_r G°_1(1273K) = -105{,}53\ kJ\ mol^{-1}$ (déjà calculé)

$$\boxed{\Delta_r G°_3(1273K) = 52{,}26\ kJ\ mol^{-1}}$$

en faisant la somme

$$\boxed{\Delta_r G°_2(1273K) = -53{,}27\ kJ\ mol^{-1}}$$

$K°_1(1273K) = 21{,}4\ 10^3$ (déjà calculé)

$$\boxed{K°_3(1273K) = 7{,}17\ 10^{-3}}$$

en faisant le produit

$$\boxed{K°_2(1273K) = 153{,}4}$$

---

7) →

$$\boxed{\begin{aligned} K°_1 &= \left(\frac{P_{CO}}{P°}\right)_{eq} \\ K°_2 &= \left(\frac{P_{CO_2}}{P_{CO}}\right)_{eq} \\ K°_3 &= \left(\frac{P_{CO_2}\ P°}{(P_{CO})^2}\right)_{eq} \end{aligned}}$$

(on retrouve bien $K°_2 = K°_1 K°_3$)

→ Entre les 4 variables, on peut écrire <u>3 équations</u>

- deux constantes d'équilibre indépendantes qui lient ces paramètres
- et la relation $P_{CO} + P_{CO_2} = P$

on peut donc choisir un paramètre intensif

(ou : 1 degré de liberté

ou : $\boxed{\text{Variance} = 1}$)

→ On a fixé deux paramètres T et P, il y a alors rupture d'équilibres.

- <u>si NiO est excédentaire</u>, C disparait et <u>il ne reste que l'équilibre chimique (2)</u> à étudier
- <u>si C est excédentaire</u>, NiO disparait et il ne reste <u>que l'équilibre chimique (3)</u> à étudier

8) Le C est excédentaire. On recupère tout le Ni

$\boxed{\text{masse de Nickel obtenu : 25 kg}}$

L'équilibre (3) permet d'écrire : (valeurs à l'équilibre)

$$K_3^o = \frac{P_{CO_2}\,P^o}{(P_{CO})^2} = 7{,}17\ 10^{-3}$$

$$P_{CO_2} + P_{CO} = P = 1 \quad \text{(en bar)}$$

on résout en tenant compte de $K_3^o \ll 1$ donc $P_{CO_2} \ll P_{CO}$

soit
$$\boxed{\begin{array}{l} P_{CO} \simeq 1\,\text{bar} \\ P_{CO_2} \simeq 7\ 10^{-3}\,\text{bar} \end{array}}$$

(mieux : $P_{CO} \simeq 0{,}993$ bar)

---

9) $\longrightarrow$

$$\begin{array}{ccccccc} NiO & + & C & = & Ni & + & CO(g) \\ n_{NiO} - \xi_1 & & n_C - \xi_1 + \xi_3 & & \xi_1 & & \xi_1 - 2\xi_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2\,CO(g) & = & C & + & CO_2(g) \\ \xi_1 - 2\xi_3 & & n_C - \xi_1 + \xi_3 & & \xi_3 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{moles de } NiO : & n_{NiO} - \xi_1 \\ \text{moles de } C : & n_C - \xi_1 + \xi_3 \end{array}}$$

$\longrightarrow$ NiO disparait donc

$$\boxed{\xi_1 = 426\ \text{mol}}$$

et
$$\frac{P_{CO_2}}{P_{CO}} = \frac{\xi_3}{\xi_1 - 2\xi_3} \simeq \frac{\xi_3}{\xi_1}$$

A.N. $\xi_3 \simeq \dfrac{426\ \ 7\ 10^{-3}}{1}$

$$\boxed{\xi_3 \simeq 3\ \text{mol}}$$

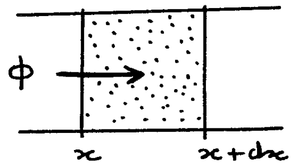
$\longrightarrow$ Moles de C restant en fin de réaction :

$= 4167 - 426 + 3$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{moles de C} = 3744\ \text{mol} \\ \text{au lieu de } 3741 \end{array}}$$

Conduction dans une barre en régime quasipermanent

1)



bilan pour la tranche entre x et $x+dx$ pendant dt

$$\underbrace{d^2H}_{\substack{\text{nul}\\ \text{(régime}\\ \text{permanent)}}} = \delta^2 Q_{\text{reçu}} + \underbrace{\delta^2 Q_{\text{produit}}}_{\substack{\text{nul}\\ \text{(pas de}\\ \text{sources)}}}$$

$$\delta^2 Q_{\text{reçu}} = \phi(x)\,dt - \phi(x+dx)\,dt$$

donc $\boxed{\phi(x) = \phi(x+dx)}$

ϕ est uniforme

---

2) Loi de Fourier

$$\boxed{\vec{j}_{\text{conduction}} = -k\ \overrightarrow{\text{grad}}\ T}$$

Ici, pour le problème unidimensionnel, selon x

$$j = -k\frac{dT}{dx}$$

et $$\phi = \iint_{\substack{\text{section}\\ \text{droite}}} \vec{j}\,\vec{dS} = j\,S$$

d'où $$\boxed{\frac{dT}{dx} = -\frac{1}{kS}\phi} = \text{constante}$$

$$T = -\frac{1}{kS}\phi\, x + B$$

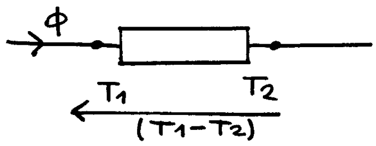
$x=0 \quad T_1 = B$

$x=L \quad T_2 = -\frac{1}{kS}\phi\, L + B$

$$\boxed{T = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1}$$

---

3)



on a trouvé ci-dessus :

$$-\frac{\phi}{KS} = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

donc
$$\phi = \frac{KS}{L}(T_1 - T_2)$$
$$= \frac{1}{R_{Th}}(T_2 - T_1)$$

avec
$$\boxed{R_{Th} = \frac{1}{K}\frac{L}{S}}$$

---

4) En régime non permanent, le bilan devient

$$d^2H = \delta^2Q \text{ reçu} + \cancel{\delta^2Q \text{ produit}}$$
$$\mu c S\, dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = \left(\Phi_{(x,t)} - \Phi_{(x+dx,t)}\right) dt$$
$$= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx \quad dt$$

donc :
$$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\mu c S \frac{\partial T}{\partial t}}$$

---

5) avec
$$\phi = -KS\frac{\partial T}{\partial x}$$
$$-KS\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\mu c S \frac{\partial T}{\partial x}$$
$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\mu c}{K}\frac{\partial T}{\partial x} = 0}$$

---

6) en posant $D = \frac{K}{\mu c}$ (diffusivité), la dimension de D est $[D] = L^2 T^{-1}$

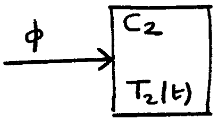
donc si on désigne par L la longueur caractéristique et τ_d le temps de diffusion sur une longueur L

$$D = L^2 \tau_d^{-1}$$
$$\boxed{\tau_d = \frac{\mu c}{K} L^2}$$

<u>Ce temps n'est pas proportionnel à L mais à L^2</u>
La diffusion s'émousse en progressant.

---

7)

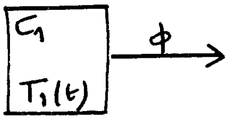


bilan pour C_2 pendant dt

$$dH = \delta Q_{reçu} + \underbrace{\delta Q_{produit}}_{nul}$$

$$dH \to C_2 \frac{dT_2}{dt} dt \qquad \delta Q_{reçu} \to \phi \, dt$$

$$\boxed{\phi = C_2 \frac{dT_2}{dt}}$$



bilan pour C_1 pendant dt

$$dH = \delta Q_{reçu} + \underbrace{\delta Q_{produit}}_{nul}$$

$$dH \to C_1 \frac{dT_1}{dt} dt \qquad \delta Q_{reçu} \to -\phi \, dt$$

$$\boxed{\phi = -C_1 \frac{dT_1}{dt}}$$

8) On dispose des trois relations :

$$T_1 - T_2 = R_{th} \, \phi$$
$$\phi = C_2 \frac{dT_2}{dt}$$
$$\phi = -C_1 \frac{dT_1}{dt}$$

on dérive la première relation :

$$\frac{dT_1}{dt} - \frac{dT_2}{dt} = R_{th} \frac{d\phi}{dt}$$

$$-\frac{\phi}{C_1} - \frac{\phi}{C_2} = R_{th} \frac{d\phi}{dt}$$

$$-\frac{\phi}{C_{eq}} = R_{th} \frac{d\phi}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{dt} + \frac{\phi}{\tau} = 0}$$

$$\tau = R_{th} \, C_{eq}$$

$$\boxed{\tau = R_{th} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$$

en posant $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

(analogie avec la capacité de deux condensateurs en série)

$$\phi = A\, e^{-t/\tau}$$

C.I. $\frac{T_{10}-T_{20}}{R_{th}} = A$

$$\boxed{\phi = \frac{T_{10}-T_{20}}{R_{th}}\, e^{-t/\tau}}$$

---

9) On avait $\phi = -C_1 \frac{dT_1}{dt} = C_2 \frac{dT_2}{dt}$

d'où :

$$C_1 T_1 + C_2 T_2 = Cste$$

$$\boxed{C_1 T_1 + C_2 T_2 = C_1 T_{10} + C_2 T_{20}}$$

soit :

$$C_1 (T_1 - T_{10}) + C_2 (T_2 - T_{20}) = 0$$

$$\Delta (H_1 + H_2) = 0$$

L'enthalpie est une constante pour (1)+(2) soit à pression constante :

> la "chaleur" perdue par (1) est reçue par (2)
> (la résistance intermédiaire n'intervient pas dans le bilan)

---

10) on avait en 8)

$$T_1 - T_2 = (T_{10} - T_{20})\, e^{-t/\tau}$$

et en 9)

$$C_1 T_1 + C_2 T_2 = C_1 T_{10} + C_2 T_{20}$$

→ de ces deux équations à deux inconnues T_1 et T_2, on tire T_1 et T_2 :

$$\boxed{\begin{aligned} T_{1(t)} &= T_{10} - \frac{C_2}{C_1+C_2}(T_{10}-T_{20})\left(1-e^{-t/\tau}\right) \\ T_{2(t)} &= T_{20} + \frac{C_1}{C_1+C_2}(T_{10}-T_{20})\left(1-e^{-t/\tau}\right) \end{aligned}}$$

→ $T_1(t\to\infty) \to \boxed{\dfrac{C_1T_{10}+C_2T_{20}}{C_1+C_2} = T_\infty}$

$T_2(t\to\infty) \to$ idem

→ à l'infini les deux sources seront à la même température (cf $\phi \to 0$)

$\boxed{\text{L' enthalpie est conservée}}$ pour (1+2) d'où :

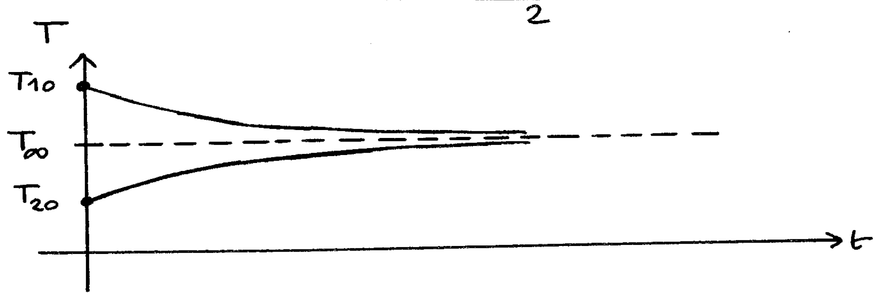
$$C_1T_{10} + C_2T_{20} = (C_1+C_2)\,T_\infty$$

(capacité deux deux condensateurs en parallèle donc chargés sous la même tension)

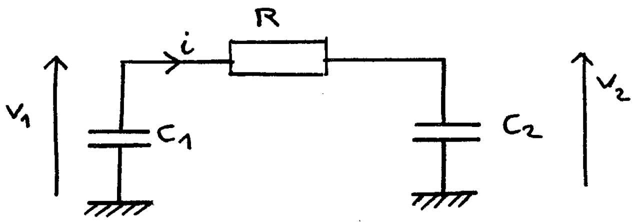
→

Si $C_1 = C_2$ $\qquad \tau = R_{th}\dfrac{C}{2}$

$$T_\infty = \frac{T_{10}+T_{20}}{2}$$



11) Ce problème est l'analogue en thermique du problème de la décharge d'un condensateur dans un autre (décharge irréversible)



correspondance :

elec	therm
V	T
i	ϕ
R	R_{th}
C (capacité condensat)	C (capacité thermique)

---

12)

Dans le cadre de l'approximation des régimes quasipermanents on a supposé que ϕ était le même en tout point de la tige ce qui revient à négliger le temps de diffusion τ_d.

on a supposé $\boxed{\tau_d \ll \tau}$

soit $$\frac{\mu c L^2}{k} \ll \underbrace{R_{th}}_{\frac{L}{kS}} C_{eq}$$

$$\mu c L S \ll C_{eq}$$

$$\boxed{\text{Capacité thermique de la tige} \ll C_{eq} \text{ aux deux sources} \quad C_1C_2/(C_1+C_2)}$$

(remarque :

Précédemment, on aurait dû trouver :

$$\boxed{\text{enthalpie de (1)} + \text{enthalpie de (2)} + \cancel{\text{enthalpie tige}} = \text{cte}}$$

Dans le cadre de l'approximation, l'enthalpie de la tige est négligée : les variations de T de la tige ne donnent lieu à aucun échange énergétique ce qui revient à faire

Capacité thermique de la tige << Capacité des sources

---

13) - variation d'entropie de 1 : $\Delta S_1 = C_1 \ln \frac{T_\infty}{T_{10}}$

- variation d'entropie de 2 : $\Delta S_2 = C_2 \ln \frac{T_\infty}{T_{10}}$

- variation d'entropie de la tige : $\Delta S_{tige} = 0$
(cf C_{tige} est négligée)

finalement $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_{tige}$

$$\Delta S = C_1 \ln \frac{T_\infty}{T_{10}} + C_2 \ln \frac{T_\infty}{T_{20}}$$

Le système 1+2+tige étant isolé, le terme d'échange d'entropie avec l'extérieur est nul

$$\Delta S = \underbrace{S_{échange}}_{nul} + S_{créé}$$

$$\boxed{S_{créé} = C_1 \ln \frac{T_\infty}{T_{10}} + C_2 \ln \frac{T_\infty}{T_{20}}} > 0$$

- il n'y a pas de création d'entropie dans la source 1 (cf pas de $\overrightarrow{grad}\, T$ donc pas d'irréversibilité thermique)
- idem pour la source 2
- <u>l'entropie se crée donc dans la tige</u> (cf $\overrightarrow{grad}\, T$ donc flux irréversible de chaleur)

---

14) On étudie la création d'entropie dans la tige

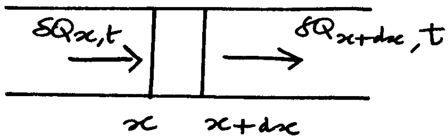
→ Pour une tranche :

$$d^2S = \frac{\overbrace{\mu c S\,dx}^{dC} \,\frac{\partial T}{\partial t}\, dt}{T}$$

Dans le cadre de l'approximation, on néglige la capacité thermique de la tige et à plus forte raison la capacité élémentaire dC d'une tranche dx. On fait donc :

$$\boxed{d^2S = 0}$$

→ L'entropie échangée est l'entropie "reçue" de la gauche plus l'entropie "reçue" de la droite



$$\delta_e^2 S = \frac{\delta Q(x,t)}{T(x,t)} - \frac{\delta Q(x+dx,t)}{T(x+dx,t)}$$

$$= \frac{\phi(x,t)\,dt}{T(x,t)} - \frac{\phi(x+dx,t)\,dt}{T(x+dx,t)}$$

dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-permanents, ϕ est indépendant de x

$$\boxed{\delta_e^2 S = \phi(t)\,dt\left(\frac{1}{T(x,t)} - \frac{1}{T(x+dx,t)}\right)}$$

→ or

$$\underbrace{d^2S}_{\text{nul ici}} = \delta_e^2 S + \delta^2_{\text{créé}} S$$

donc

$$\delta^2_{\text{créé}} S = -\delta_e^2 S$$

$$= \phi(t)\,dt\left(\frac{1}{T(x+dx,t)} - \frac{1}{T(x,t)}\right)$$

$$= \phi(t)\,dt\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{T(x,t)}\right)dx$$

$$= \phi(t)\,dt \times -\frac{1}{T^2(x,t)}\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\,dx$$

$$\delta^2_{créé} S = -\phi_{(t)}\, dt\, dx\, \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$= k\, S\, \frac{\partial T}{\partial x}\, dt\, dx\, \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x}$$

avec $d\tau = S\, dx$

$$\boxed{\delta^2_{créé} S = \underbrace{\frac{k}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2}_{\sigma} d\tau\, dt}$$

→ L'entropie créée au total est obtenue en intégrant σ sur tout le volume, de $t=0$ à l'infini

$$S_{créé} = \int_{t=0}^{t=\infty}\left[\int_{x=0}^{x=L} \frac{k}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 S\, dx\right] dt$$

↓ cf $\frac{\partial T}{\partial x}$ indépendant de x

$$\underbrace{-k\,S\,\frac{\partial T}{\partial x}}\int_{x=0}^{L} -\frac{\frac{\partial T}{\partial x}}{T^2}\, dx$$

$$\phi_{(t)}\left(\frac{1}{T_2(t)} - \frac{1}{T_1(t)}\right)$$

On retrouve alors

$$S_{créé} = C_2\int_{T_{20}}^{T_\infty}\frac{dT_2}{T_2} + C_1\int_{T_{10}}^{T_\infty}\frac{dT_1}{T_1}$$